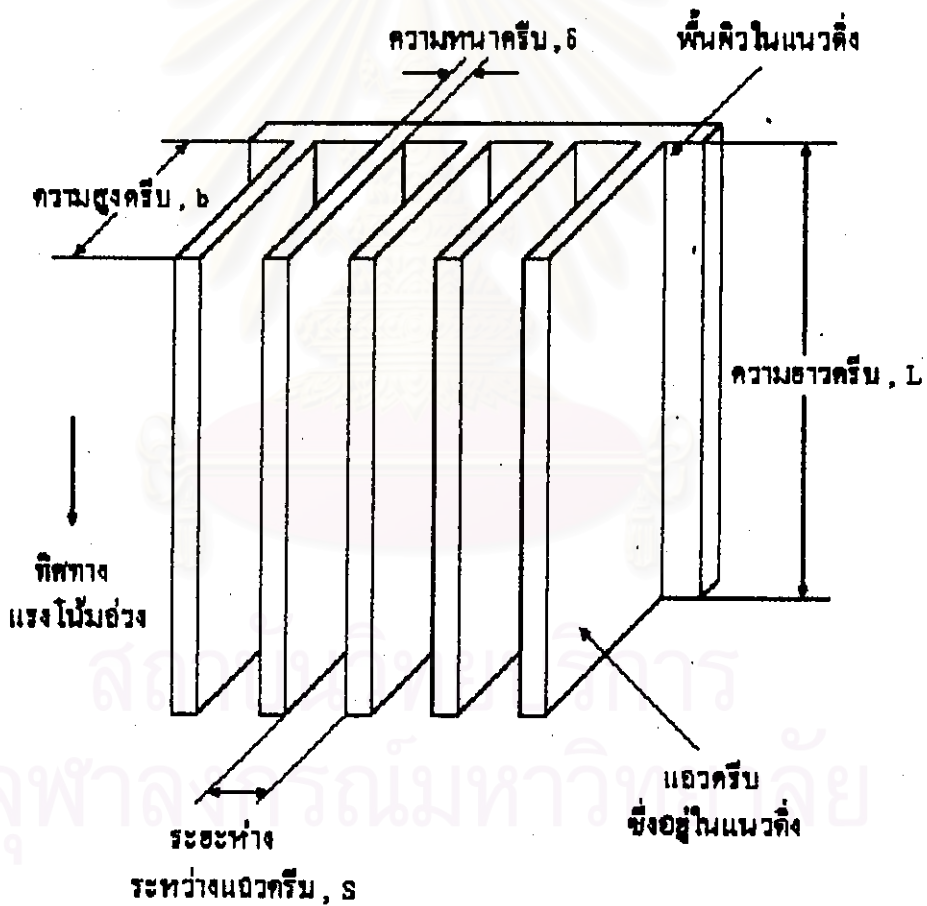


## บทที่ 2

### ฉนวนการกั้นอุณหภูมิซึ่งควบคุมปัญหา

#### 2.1 รูปทรงและคิ้วแปรเกี่ยวกับรูปทรงของครีบริบ

รูปทรงของชุดครีบริบที่เหลื่อมกันกันในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง และ คิ้วแปรเกี่ยวกับรูปทรงของครีบริบที่มีผลต่อประสิทธิภาพในการถ่ายเทความร้อนออกจากชุดครีบริบ แสดงในรูปที่ 2-1



รูปที่ 2-1 แสดงชุดครีบริบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง และ คิ้วแปรเกี่ยวกับรูปทรงที่มีผลต่อประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนออกจากชุดครีบริบ

จากรูปที่ 2-1 ตัวแปรเกี่ยวกับรูปทรงของครีบริที่มีผลต่อประสิทธิภาพในการถ่ายเทความร้อนออกจากซุกครีบริ ประกอบด้วย ความสูงครีบริ , ระยะห่างระหว่างแถวครีบริ , ความหนาครีบริ และ ความยาวครีบริ นอกจากรูปทรงของครีบริแล้ว ลักษณะการจัดวางซุกครีบริก็มีผลต่อประสิทธิภาพในการถ่ายเทความร้อนออกจากซุกครีบริ

## 2.2 การศึกษาผลงานที่ผ่านมา

จากการค้นคว้าผลงานการศึกษาเกี่ยวกับประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนออกจากซุกครีบริที่มีผู้ศึกษาไว้แล้ว สรุปได้ดังต่อไปนี้

1. Elenbaas (1942) ได้ศึกษาการพาความร้อนแบบอิสระจากแผ่นเวียบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 แผ่น ซึ่งวางขนานกัน ซึ่งผลการศึกษายังไม่สามารถนำมาใช้ในการออกแบบครีบริได้ เนื่องจากรูปทรงของครีบริมีแผ่นฐาน (base plate) เชื่อมระหว่างแผ่นเวียบทั้งสองที่วางขนานกัน และอุณหภูมิจของครีบริจะไม่คงที่ตลอดแนวความสูงของครีบริ
2. Starner and McManus (1963) ได้ทำการทดลองเพื่อศึกษาการพาความร้อนแบบอิสระจากซุกครีบริรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้ง โดยทำการแปรเปลี่ยนขนาดและลักษณะการจัดวางของซุกครีบริ และได้เปรียบเทียบซุกครีบริในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง และซุกครีบริแบบเดิวกันบนพื้นผิวเอียงทำมุม 45 องศา กับแนวราบและพื้นผิวในแนวราบ พบว่า ครีบริซึ่งอยู่บนพื้นผิวในแนวตั้งมีอัตราการถ่ายเทความร้อนสูงที่สุด
3. Welling and Wooldridge (1965) ทำการทดลองเพื่อศึกษาการพาความร้อนแบบอิสระจากซุกครีบริรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง พบว่าที่ค่าระยะห่างระหว่างแถวครีบริหนึ่งๆ จะมีความสูงครีบริค่าหนึ่งซึ่งทำให้ซุกครีบริมีสมรรถนะในการถ่ายเทความร้อนสูงที่สุด
4. Chaddock (1970) ทำการทดลองเพื่อศึกษาการพาความร้อนแบบอิสระจากซุกครีบริรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง โดยทำการแปรเปลี่ยนตัวแปรเกี่ยวกับรูปทรงของครีบริและได้เสนอวิธีการประมาณค่าระยะห่างระหว่างแถวครีบริและความหนาครีบริที่ให้อัตราการถ่ายเทความร้อนสูงที่สุด
5. Leung and Probert (1989a) ได้ทำการทดลองเพื่อศึกษาการพาความร้อนแบบอิสระจากซุกครีบริรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวราบ โดยทำการแปรเปลี่ยนค่าระยะห่างระหว่างแถวครีบริ , ความยาวครีบริ , ความสูงครีบริ , ความหนาครีบริ , ค่าผลต่างอุณหภูมิจระหว่างฐานครีบริและ

ของไหล จากผลการทดลองสรุปได้ว่า ตัวแปรซึ่งมีอิทธิพลต่อประสิทธิภาพในการถ่ายเทความร้อนจากซุกคริบมากที่สุด คือ ระยะห่างระหว่างแถวคริบ

6. Leung and Probert (1989b) ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนของซุกคริบ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวราบบนพื้นผิวในแนวตั้งกับซุกคริบในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง และซุกคริบในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวราบ พบว่า ซุกคริบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวราบบนพื้นผิวในแนวตั้ง มีประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนค่าที่สูงสุดในขณะที่ซุกคริบในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง และซุกคริบในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวราบมีประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนใกล้เคียงกัน

### 2.3 การหาค่าตอบเชิงตัวเลขของการพาความร้อนแบบอิสระจากซุกคริบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

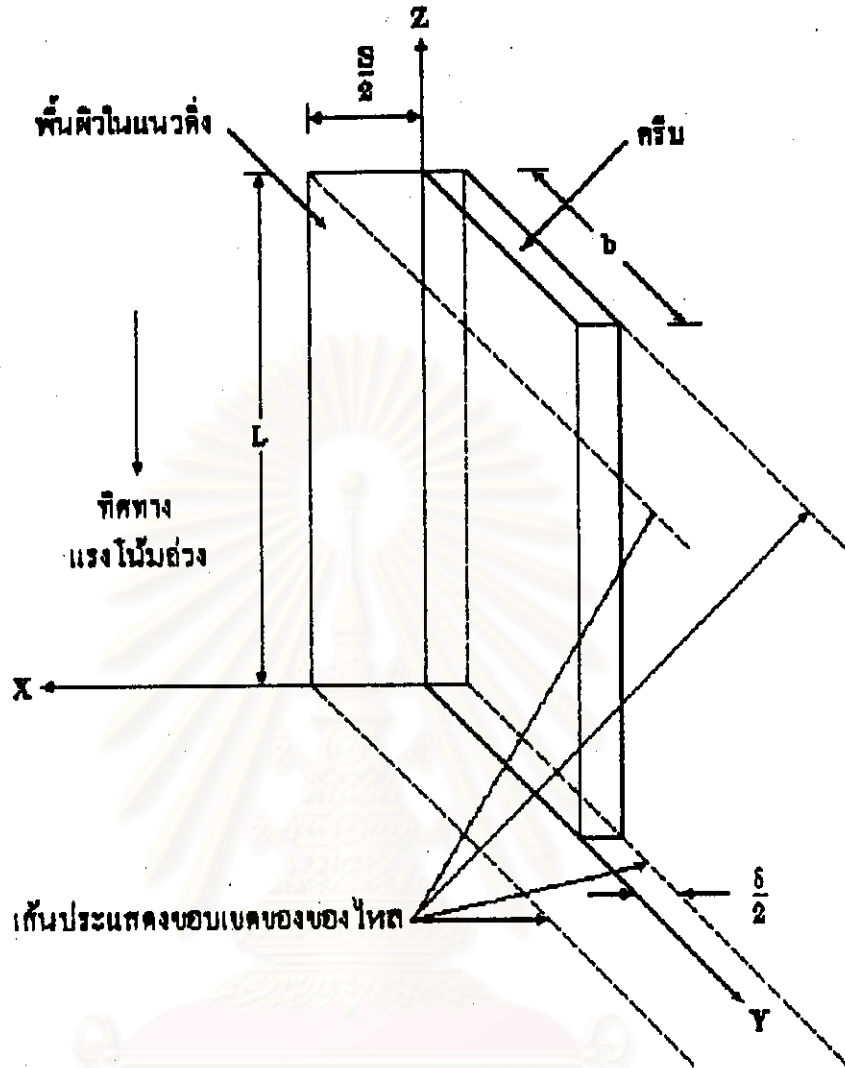
การหาค่าตอบเชิงตัวเลขของการพาความร้อนแบบอิสระจากซุกคริบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. derive สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหา (Governing Equations) รวมทั้งกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)
2. แปลงสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต โดยใช้วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์
3. แก้สมการพีชคณิตเพื่อหาค่าตอบเชิงตัวเลข

### 2.4 สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหา

ขั้นตอนแรกของการ derive สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหา คือ การกำหนดขอบเขตของปัญหาที่พิจารณา จากรูปที่ 2-1 เนื่องจากความสมมาตรของรูปทรงของซุกคริบ ขอบเขตของปัญหาที่พิจารณาจะประกอบด้วยส่วนที่เป็นคริบซึ่งมีความหนาครึ่งหนึ่งและส่วนที่เป็นของไหลซึ่งอยู่ระหว่างแถวคริบครึ่งหนึ่ง ดังรูปที่ 2-2

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

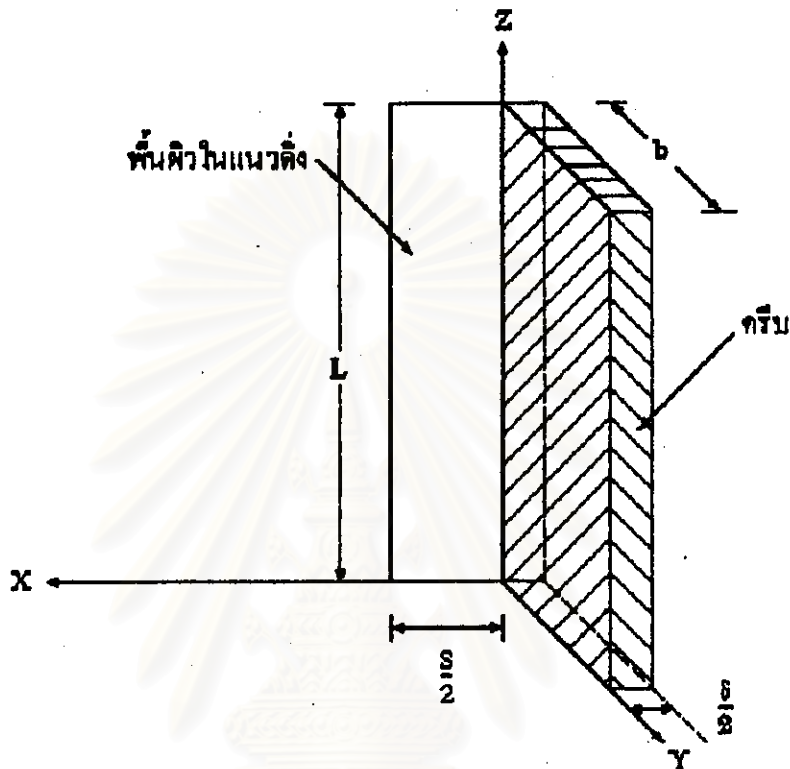


รูปที่ 2-2 ขอบเขตของปัญหาและแกนพิกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา

ขอบเขตของปัญหาที่พิจารณา (ดังแสดงในรูปที่ 2-2) จะแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นครึ่ง และ ส่วนที่เป็นของไหล สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหาที่จะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมส่วนที่เป็นครึ่ง และ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมส่วนที่เป็นของไหล

### 2.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมส่วนที่เป็นครีป

ขอบเขตของส่วนที่เป็นครีปและแกนพิกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 2-3



รูปที่ 2-3 แสดงขอบเขตของส่วนที่เป็นครีป , แกนพิกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมส่วนที่เป็นครีป คือ สมการการนำความร้อน (Heat Diffusion Equation) [Frank and Devid (1990)]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T_s}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho_s c_p \frac{\partial T_s}{\partial t} \quad (2.1)$$

เมื่อ  $T_s$  คือ อุณหภูมิของครีป

$k_x$  คือ ค่าสภาพการนำความร้อนของครีป

$\dot{q}$  คือ ความร้อนที่ผลิตขึ้นภายในครีป

$\rho_s$  คือ ความหนาแน่นของครีป

$c_p$  คือ ค่าความจุความร้อนของครีป

$t$  คือ เวลา

ในการ derive สมการการนำความร้อนภายในครีบบจะกำหนดข้อสมมุติดังต่อไปนี้

1. การถ่ายเทความร้อนอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady State)
2. ค่าสภาพการนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของครีบบมีค่าคงที่
3. การนำความร้อนภายในครีบบในแนวแกน  $z$  มีค่าน้อยมาก (ข้อสมมุตินี้เป็นจริงเมื่อครีบบมีความยาวมากเมื่อเทียบกับความหนาและความสูงครีบบ)
4. ไม่มีการผลิตความร้อนภายในครีบบ
5. ของโหลที่ติดกับผิวครีบบมีความเร็วเป็นศูนย์
6. อุณหภูมิที่ฐานครีบบ ( $T_{s,b}$ ) เท่ากับอุณหภูมิของพื้นผิวและมีค่าคงที่

จากข้อสมมุติดังกล่าว จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมส่วนที่เป็นครีบบ อดรูปจาก (2.1) เป็น

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

โดยมีภาวะขอบเขตคือ

$$\text{ที่ } y=0, 0 \leq x \leq \frac{\delta}{2} : T_s = T_{s,b}$$

$$\text{ที่ } y=b, 0 \leq x \leq \frac{\delta}{2} : k_s \cdot \frac{\partial T_s}{\partial y} = k_f \cdot \frac{\partial T_f}{\partial y} \text{ และ } T_s = T_f$$

$$\text{ที่ } x = -\frac{\delta}{2}, 0 \leq y \leq b : \frac{\partial T_s}{\partial x} = 0$$

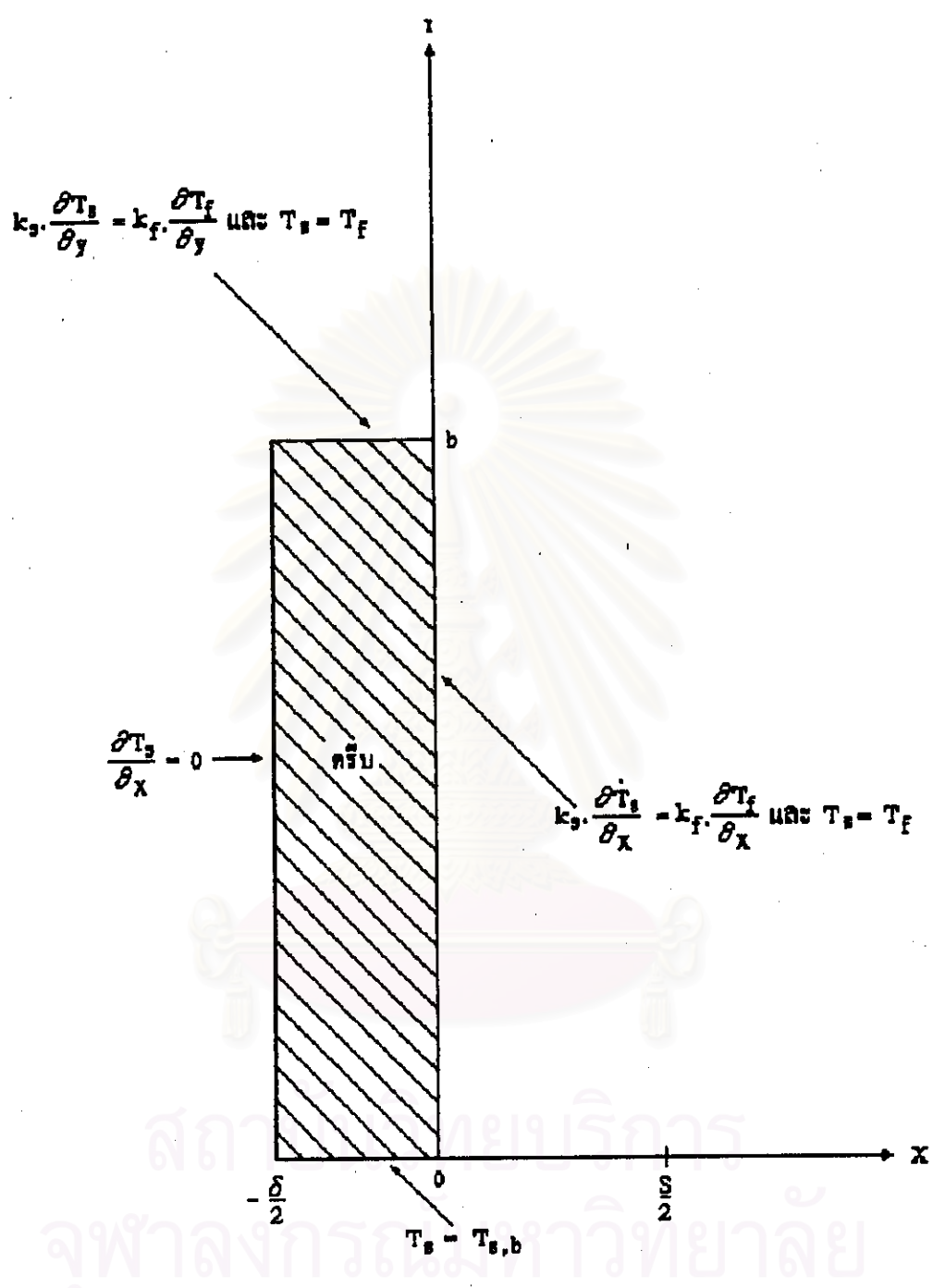
$$\text{ที่ } x=0, 0 \leq y \leq b : k_s \cdot \frac{\partial T_s}{\partial x} = k_f \cdot \frac{\partial T_f}{\partial x} \text{ และ } T_s = T_f$$

เมื่อ  $T_{s,b}$  คือ อุณหภูมิที่ฐานครีบบ

$T_f$  คือ อุณหภูมิของของโหล

$k_f$  คือ ค่าสภาพการนำความร้อนของของโหล

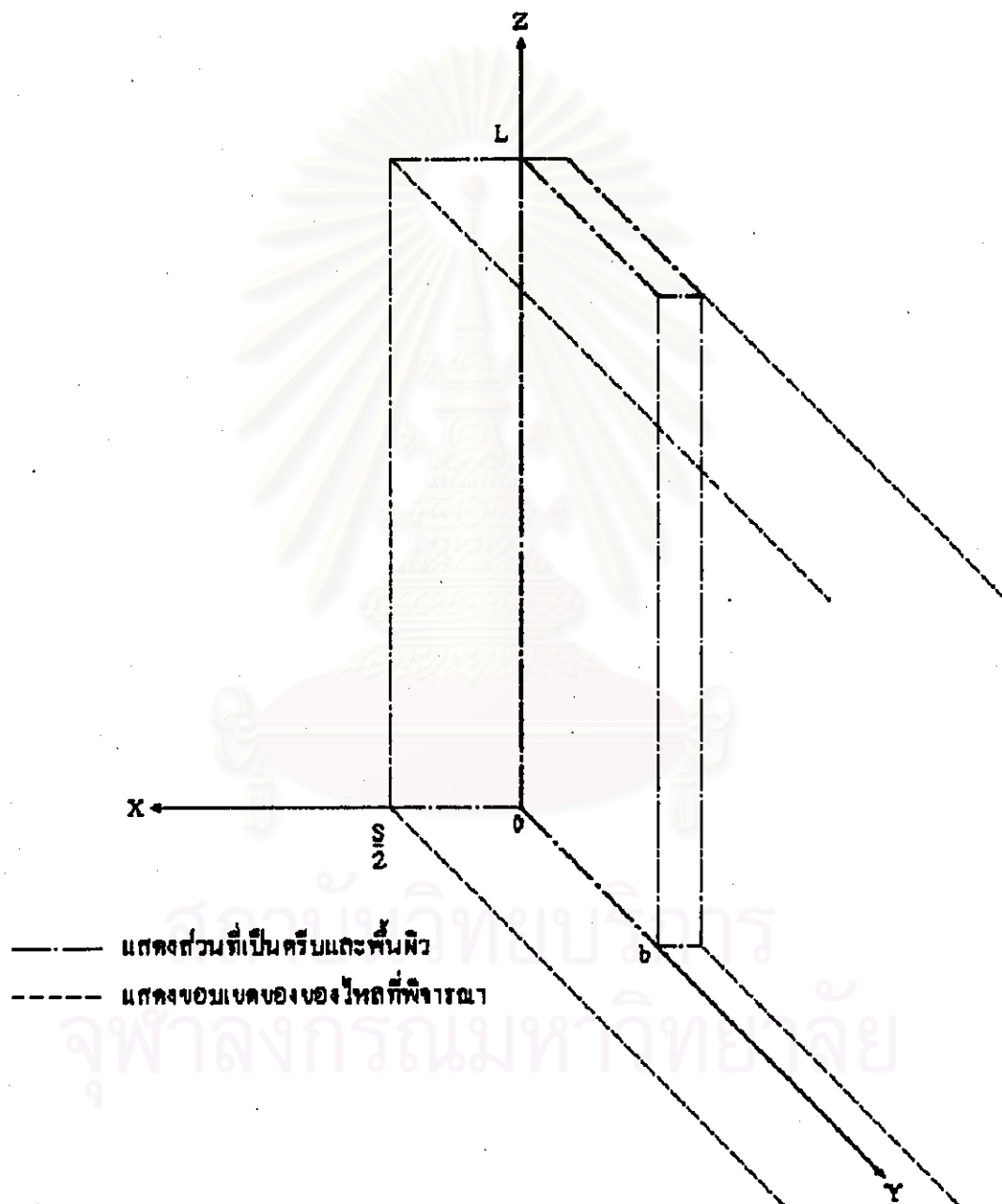
ดังแสดงในรูปที่ 2-4



รูปที่ 2-4 ภาพระบอบเขตของส่วนที่เป็นครีป

## 2.4.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงควบคุมส่วนที่เป็นของไหล

ขอบเขตของส่วนที่เป็นของไหลและแกนพิกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาแสดงในรูปที่ 2-5



รูปที่ 2-5 แสดงขอบเขตของส่วนที่เป็นของไหล และแกนพิกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา



สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งความคลุมเครือที่เป็นของไหลจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ 3 สมการ คือ Continuity Equation , Momentum Equations , Energy Equation [Schlichting (1968)] ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

#### Continuity Equation

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f w)}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Momentum Equations (ในแนวแกน x,y และ z ตามลำดับ)

$$\rho_f \frac{Du}{Dt} = X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \boldsymbol{\omega} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\rho_f \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \boldsymbol{\omega} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.5)$$

$$\rho_f \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div } \boldsymbol{\omega} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (2.6)$$

#### Energy Equation

$$\rho_f \frac{De}{Dt} + P \text{div } \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) + \mu \phi \quad (2.7)$$

เมื่อ  $\rho_f$  คือ ความหนาแน่นของของไหล

$u, v, w$  คือ ความเร็วของของไหลในแนวแกน x,y และ z ตามลำดับ

$\frac{D}{Dt}$  คือ Substantial Derivative เท่ากับ  $\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$

$X, Y, Z$  คือ Body Force ในแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ

$P$  คือ ความดันของของไหล

$w$  คือ Velocity Vector,  $w = u + jv + kw$

$\mu$  คือ ความหนืดของของไหล

$e$  คือ Internal Energy ของของไหล

$\phi$  คือ Dissipation Function โดย

$$\phi = 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

ในการ derive สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหาส่วนที่เป็นของไหล จะกำหนดข้อสมมุติต่อไปนี้

1. ระบบอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady State)
2. ความหนาแน่นของของไหล,  $\rho_f$  มีค่าคงที่ ยกเว้นในเทอมของแรงลอยตัวใน Momentum Equation (Boussinesq Approximation)
3. ความหนืดของของไหล,  $\mu$  และค่าสภาพการนำความร้อน,  $k_f$  ของของไหลมีค่าคงที่ เนื่องจากอุณหภูมิของของไหลมีค่าเปลี่ยนแปลงไม่มาก
4. Body Force ในแนวแกน  $x, y$  เท่ากับศูนย์ และในแนวแกน  $z$  เท่ากับน้ำหนักของของไหล,  $\rho_f g$
5. ของไหลมีคุณสมบัติเป็น Incompressible Fluid ดังนั้น  $de = c_p dT_f$  และ  $\text{div } w = 0$
6. ความเร็วของของไหลมีค่าน้อยดังนั้น เทอม Viscous Dissipation สามารถตัดทิ้งได้
7. กำหนดให้ Relative Pressure,  $P_r = P - P_\infty$  แทนลงในเทอมของ Pressure ใน Momentum Equations ( $P = P_r + P_\infty$ ) ได้

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial P_r}{\partial x} - \frac{\partial P_\infty}{\partial x} = -\frac{\partial P_r}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial P_r}{\partial y} - \frac{\partial P_\infty}{\partial y} = -\frac{\partial P_r}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial z} - \frac{\partial P_\infty}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial z} + \rho_{f,\infty} g$$

8. ทำการแปลงเทอมผลต่างของความหนาแน่น ( $\rho_{f,\infty} - \rho_f$ ) ใน Momentum Equation แนวแกน  $z$  ให้อยู่ในรูปผลต่างของอุณหภูมิ โดยให้ค่าประมาณของ Volumetric Thermal Expansion

$$\text{Coefficient, } \beta = -\frac{1}{\rho_f} \left( \frac{\partial \rho_f}{\partial T_f} \right)_p \approx \frac{1}{\rho_f} \frac{(\rho_{f,\infty} - \rho_f)}{(T_{f,\infty} - T_f)}$$

(เมื่อ  $T_{f,\infty}$  คือ อุณหภูมิของของไหลที่อยู่ห่างจากผิวครีบอกไปมาก)

ดังนั้น ได้ว่า  $(\rho_{f,\infty} - \rho_f) \approx \rho_f \beta (T_f - T_{f,\infty})$

9. ที่ระนาบ  $z=L$  สมมุติให้การไหลในแนวแกน  $z$  มีค่า Peclet Number สูงจนสามารถประมาณได้

$$\text{ว่า } \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial T_f}{\partial z} = 0 \text{ [Patankar (1980)]}$$

จากข้อสมมุติดังกล่าวจะได้สมการ Continuity Equation, Momentum Equations และ Energy Equation สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระจากจุดครีบริบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งบนพื้นผิวในแนวตั้ง คือ

**Continuity Equation**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

**Momentum Equations:**

$$\rho_f u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\rho_f u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

$$\rho_f u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho_f \bar{w} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho_f \cdot g \cdot \beta \cdot (T_f - T_{f\infty}) \quad (2.11)$$

### Energy Equation

$$\rho_f u \frac{\partial T_f}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial T_f}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{k_f}{c_p} \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

โดยภาวะที่ขอบเขตสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ของของไหล คือ

$$\text{ที่ } x = \frac{s}{2}, 0 \leq y \leq \infty \text{ และ } x = -\frac{\delta}{2}, L \leq y \leq \infty : \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, u = 0 \text{ และ}$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial x} = 0$$

$$\text{ที่ } x = 0, 0 \leq y \leq b : u = v = w = 0 \text{ และ } k_s \cdot \frac{\partial T_s}{\partial x} = k_f \cdot \frac{\partial T_f}{\partial x}, T_s = T_f$$

$$\text{ที่ } y = 0, 0 \leq x \leq \frac{s}{2} : u = v = w = 0 \text{ และ } T_f = T_{s,b}$$

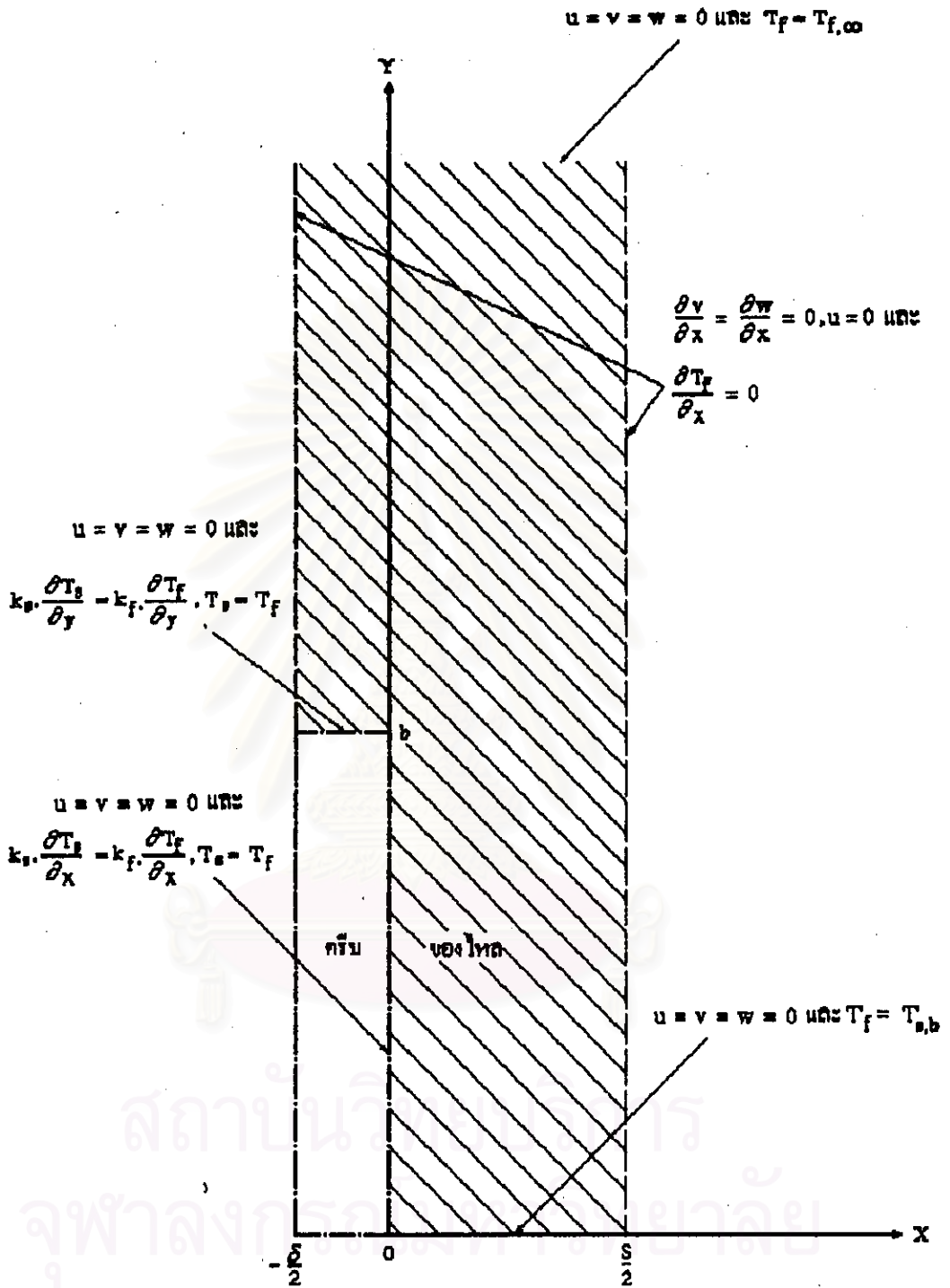
$$\text{ที่ } y = \infty : u = v = w = 0 \text{ และ } T_f = T_{f\infty}$$

$$\text{ที่ } y = b, 0 \leq x \leq -\frac{\delta}{2} : u = v = w = 0 \text{ และ } k_s \cdot \frac{\partial T_s}{\partial y} = k_f \cdot \frac{\partial T_f}{\partial y}, T_s = T_f$$

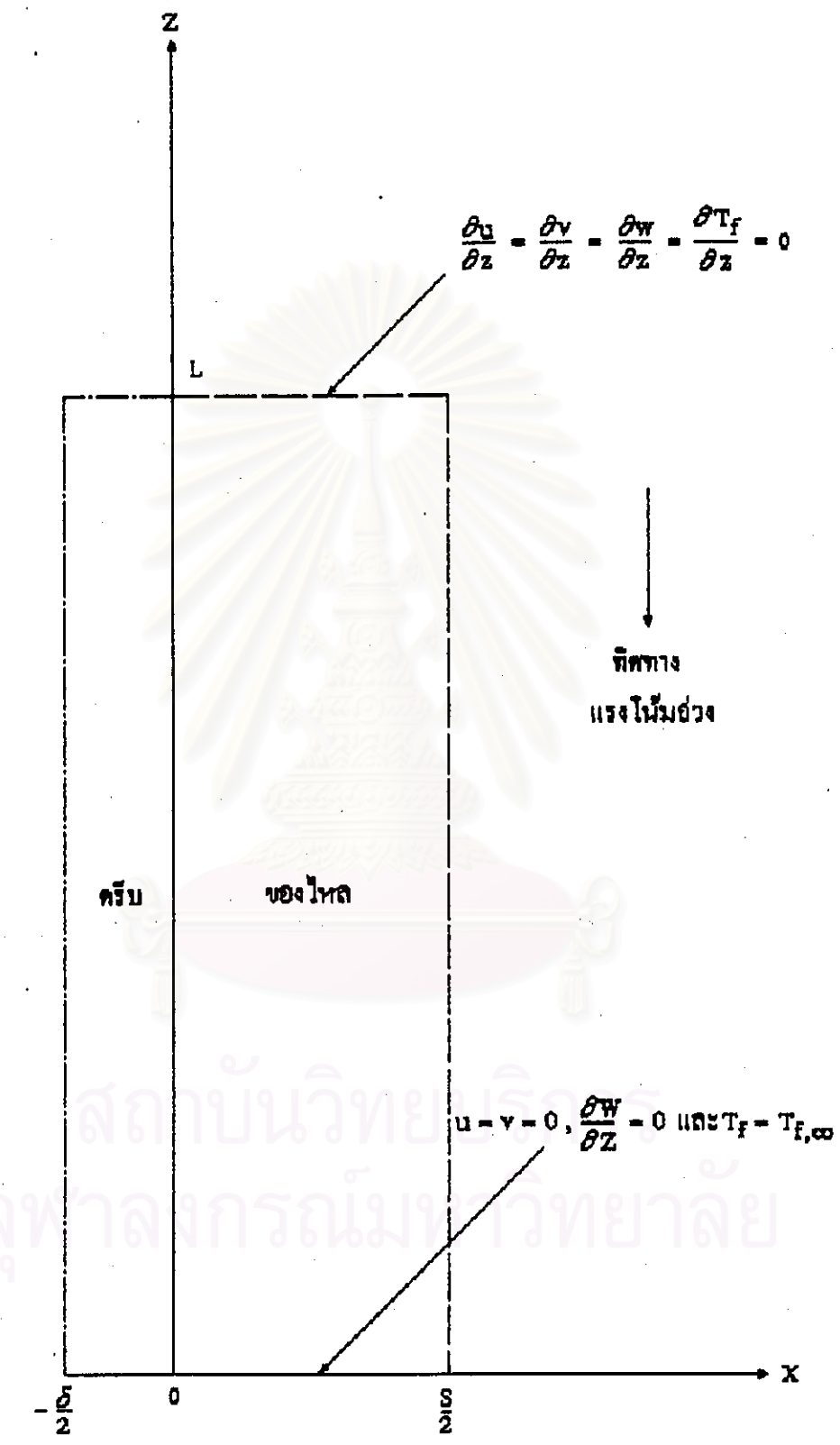
$$\text{ที่ } z = 0 : u = v = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ และ } T_f = T_{f\infty}$$

$$\text{ที่ } z = L : \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial T_f}{\partial z} = 0$$

ภาวะที่ขอบเขตของของไหล แสดงในรูปที่ 2-6 และ 2-7



รูปที่ 2-6 แสดงภาวะที่ขอบเขตของส่วนที่เป็นของไหลในแนวแกน x และ แกน y



รูปที่ 2-7 แสดงภาวะที่ขอบเขตของส่วนที่เป็นของไหลในแนวแกน z

## 2.5 สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหาในรูปตัวแปรไร้หน่วย

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งควบคุมปัญหาที่ได้แสดงไว้ในหัวข้อที่แล้ว มีตัวแปรหลายตัวปรากฏ อยู่ในสมการทำให้การแก้สมการ และการแสดงคำตอบของสมการตลอดจนการนำคำตอบของสมการ ไปใช้งานทำได้ลำบาก ดังนั้นควรจะจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของกลุ่มตัวแปร ไร้หน่วย ดังต่อไปนี้

### 2.5.1 ส่วนที่เป็นครีบ

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุมส่วนที่เป็นครีบ คือ

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

กำหนดให้ ค่าพิกัด ไร้หน่วย คือ

$$X = \frac{x}{s/2}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{L} \quad (2.13)$$

อุณหภูมิไร้หน่วยของครีบ,  $\phi_s$  และ อุณหภูมิไร้หน่วยของงองไหล,  $\phi_f$  คือ

$$\phi_s = \frac{T_s - T_{f\infty}}{T_{sb} - T_{f\infty}}, \quad \phi_f = \frac{T_f - T_{f\infty}}{T_{sb} - T_{f\infty}} \quad (2.14)$$

แทนตัวแปรในสมการ (2.2) ด้วยตัวแปร ไร้หน่วยได้สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปตัวแปร ไร้หน่วย คือ

$$4 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial X^2} + \left(\frac{s}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial Y^2} = 0 \quad (2.15)$$

โดยมีภาวะที่ขอบเขตในรูปตัวแปร ไร้หน่วย คือ

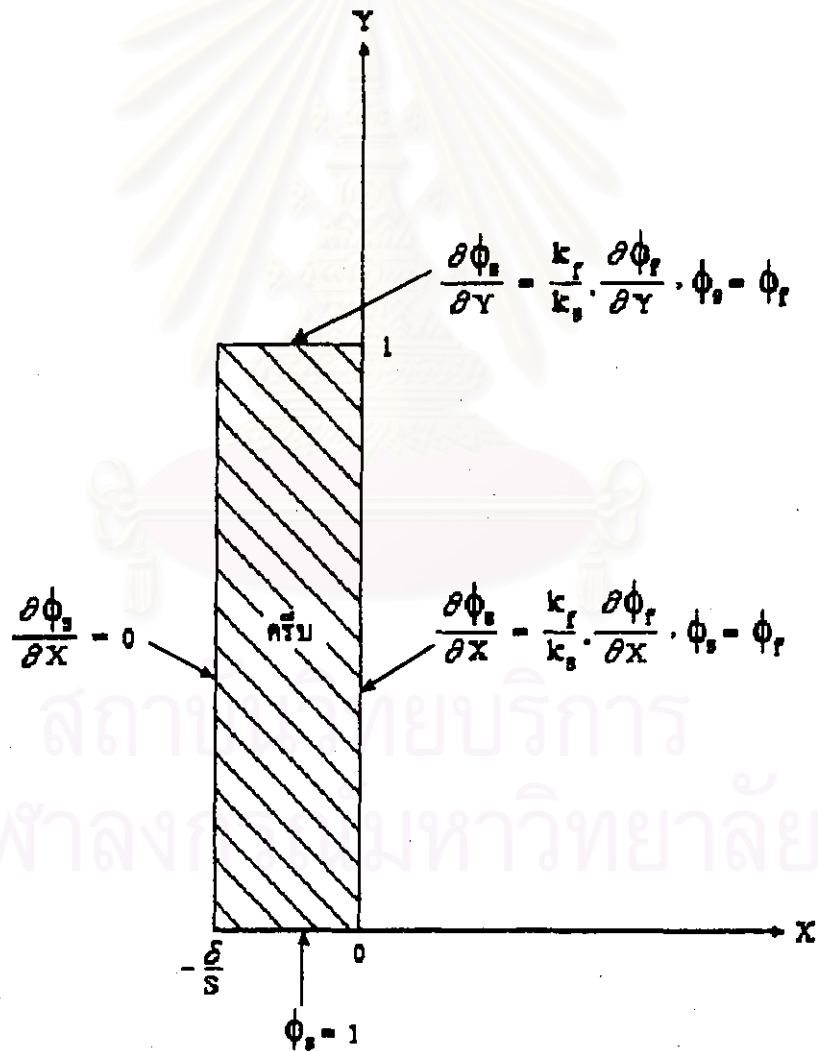
$$\text{ที่ } X=0, 0 \leq Y \leq 1 \quad : \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial X} = \frac{k_f}{k_s} \frac{\partial \phi_f}{\partial X}, \quad \phi_s = \phi_f$$

$$\text{ที่ } X = -\frac{\delta}{s}, 0 \leq Y \leq 1 : \frac{\partial \phi_s}{\partial X} = 0$$

$$\text{ที่ } Y = 0, 0 \leq X \leq -\frac{\delta}{s} : \phi_s = 1$$

$$\text{ที่ } Y = 1, 0 \leq X \leq -\frac{\delta}{s} : \frac{\partial \phi_s}{\partial Y} = \frac{k_f}{k_s} \cdot \frac{\partial \phi_f}{\partial Y}, \phi_s = \phi_f$$

คังแสดงในรูปที่ 2-8



รูปที่ 2-8 แสดงภาวะขอบเขตของตัวที่เป็นครีปในรูปตัวแปรไร้มิติ



### 2.5.2 ส่วนที่เป็นของไหล

Continuity Equation , Momentum Equation และ Energy Equation ของของไหลคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho_f u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\rho_f u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

$$\rho_f u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P_f}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho_f \cdot g \cdot \beta \cdot (T_f - T_{f,\infty}) \quad (2.11)$$

$$\rho_f u \frac{\partial T_f}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial T_f}{\partial y} + \rho_f w \frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{k_f}{c_p} \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

กำหนดให้ความเร็วไร้หน่วยคือ

$$U = \frac{u}{u'} , \quad V = \frac{v}{v'} , \quad W = \frac{w}{w'}$$

เนื่องจาก  $w$  แปรผันตรงกับแรงลอยตัว ,  $\rho_f g \beta (T_f - T_{f,\infty})$  และพื้นที่หน้าตัดขวางของการไหล ,  $sb$  และแปรผกผันกับความหนืด ,  $\mu$  ดังนั้นกำหนดให้ [Leung and Probert (1989b)]

$$w' = \frac{\rho_f g \beta (T_{s,b} - T_{f,\infty}) sb}{\mu} = \frac{g \beta (T_{s,b} - T_{f,\infty}) sb}{\nu}$$

และ  $v' = w' \frac{b}{L} , \quad u' = w' \frac{s}{2L}$

แทนค่าความเร็วไร้หน่วยและค่าพิกัดไร้หน่วยของใน สมการ (2.8) , (2.9) , (2.10) , (2.11) และ (2.12) แล้วจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปกลุ่มตัวแปรไร้หน่วย ได้

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (2.16)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = - \left( \frac{L}{s/2} \right)^2 \cdot \frac{\partial_d}{\partial X} + \frac{1}{Gr_s} \cdot \frac{L}{b} \left[ 4 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \left( \frac{s}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \left( \frac{s}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (2.17)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = - \left( \frac{L}{b} \right)^2 \cdot \frac{\partial_d}{\partial X} + \frac{1}{Gr_s} \cdot \frac{L}{b} \left[ 4 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \left( \frac{s}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \left( \frac{s}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (2.18)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = - \frac{\partial_d}{\partial Z} + \frac{1}{Gr_s} \cdot \frac{L}{b} \left[ 4 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \left( \frac{s}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \left( \frac{s}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + \left( \frac{s}{b} \right) \phi \right] \quad (2.19)$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} + W \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{L}{b} \cdot \frac{1}{Gr_s \cdot Pr} \left[ 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \left( \frac{s}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + \left( \frac{s}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right] \quad (2.20)$$

เมื่อ  $P_d$  คือ Dimensionless Pressure ,  $P_d = \frac{P_r}{\rho W^2}$

$Gr_s$  คือ Grashof Number ,  $(Gr_s = \frac{s \beta (T_{s,b} - T_{f,\infty}) s^3}{\nu^2})$

$Pr$  คือ Prandtl Number ,  $(Pr = \frac{\mu C_p}{k_f})$

สำหรับภาวะที่ขอบเขตของชุดสมการดังกล่าวในรูปตัวแปรไร้หน่วยคือ

$$\text{ที่ } X=1, 0 \leq Y \leq \infty : \frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 \text{ และ } U=0, \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = 0$$

$$\text{ที่ } X=0, 0 \leq Y \leq 1 : \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{k_s}{k_f} \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial X}, \phi_f = \phi_s \text{ และ } U=V=W=0$$

$$\text{ที่ } X = -\frac{\delta}{s}, 1 \leq Y \leq \infty : \frac{\partial \phi_1}{\partial X} = 0 \text{ และ } U = 0, \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = 0$$

$$\text{ที่ } Y = 0, 0 \leq X \leq 1 : \phi_1 = 1 \text{ และ } U = V = W = 0$$

$$\text{ที่ } Y = 1, 0 \leq X \leq -\frac{\delta}{s} : \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} = \frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \phi_2}{\partial Y}, \phi_1 = \phi_2 \text{ และ } U = V = W = 0$$

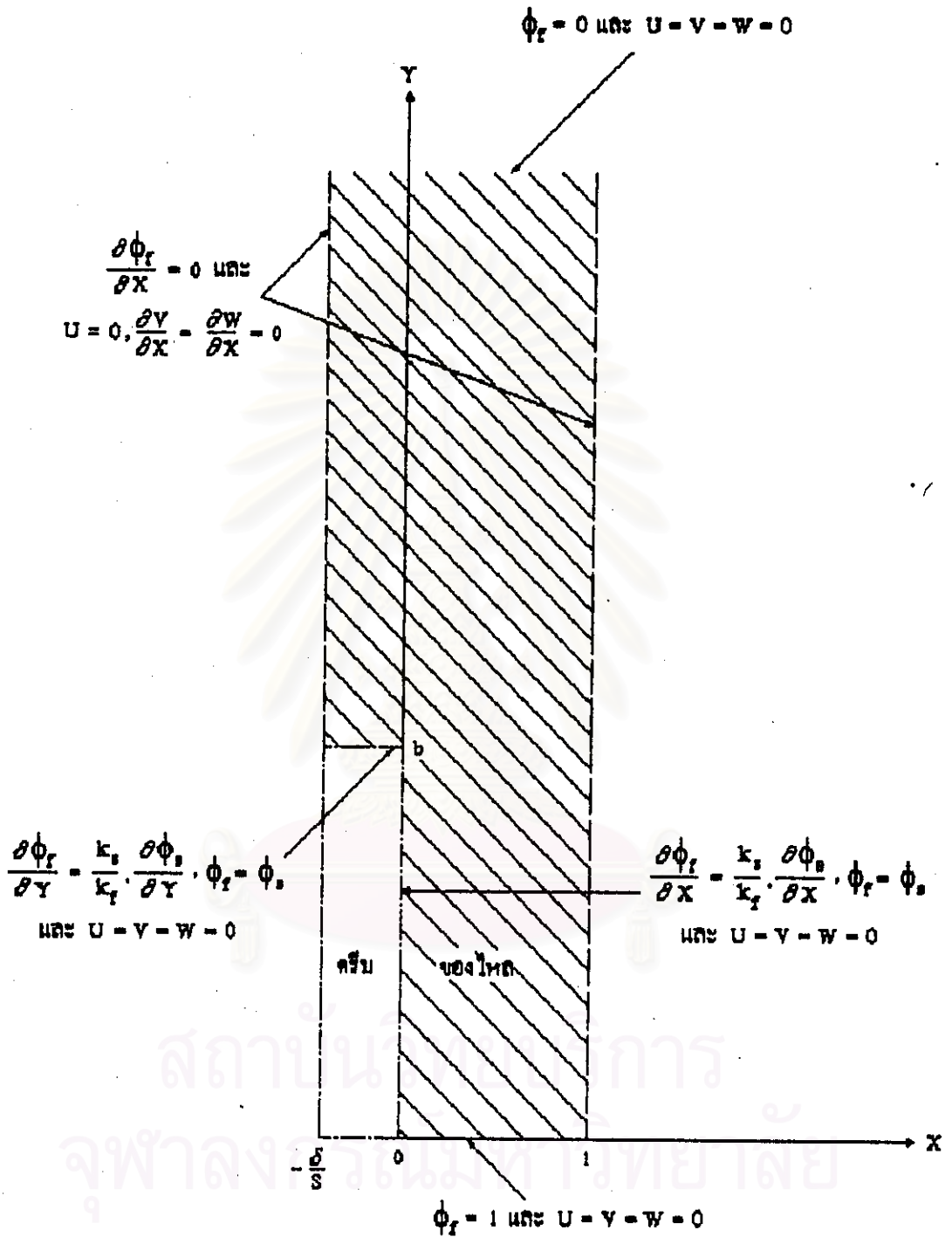
$$\text{ที่ } Y = \infty : \phi_1 = 0 \text{ และ } U = V = W = 0$$

$$\text{ที่ } Z = 0 : \phi_1 = 0 \text{ และ } U = V = 0, \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$$

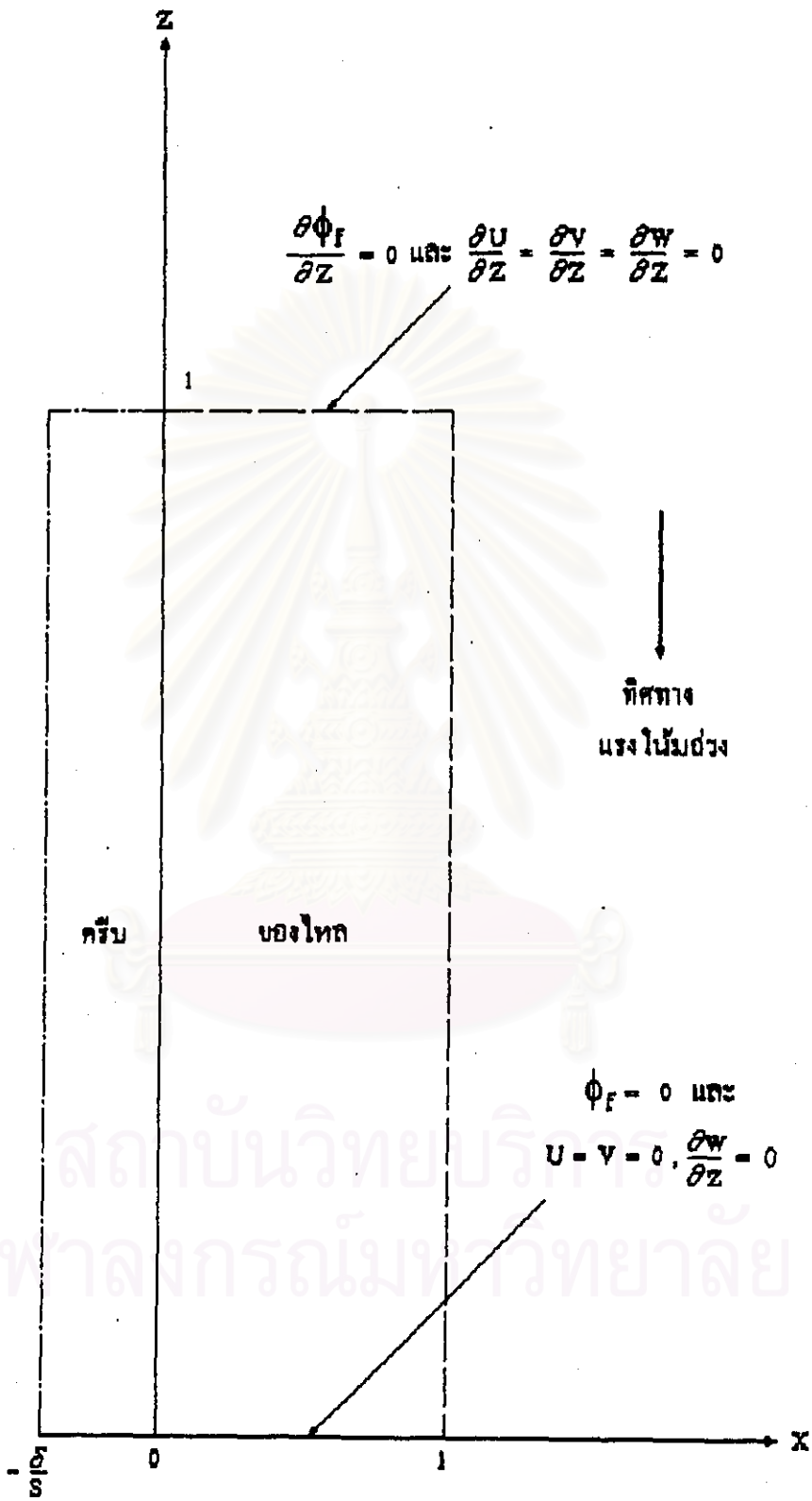
$$\text{ที่ } Z = 1 : \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} = 0 \text{ และ } \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$$

ดังแสดงในรูปที่ 2-9 และ 2-10

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2-9 แสดงภาวะที่ขอบเขตของส่วนที่เป็นของไหลในรูปตัวแปรไร้หน่วยในแนวแกน x และ แกน y



รูปที่ 2-10 แสดงภาวะที่ขอบเขตของส่วนที่เป็นของไหลในรูปตัวแปรไร้หน่วยในแนวแกน z