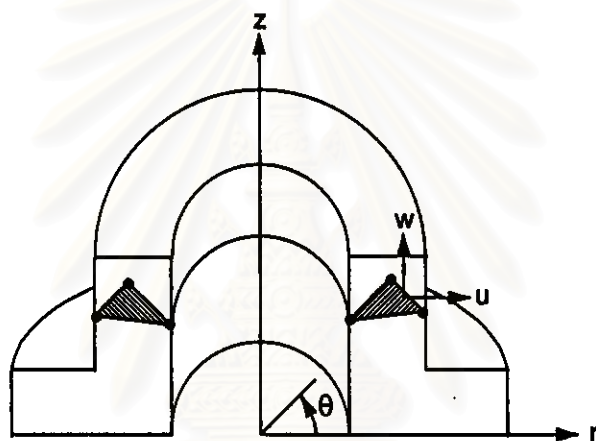


บทที่ 4

การวิเคราะห์การเสีรูปและความเค้น สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

ในการวิเคราะห์ปัญหาบางชนิดในงานวิศวกรรม ถึงแม้ว่าปัญหานั้นจะมีรูปร่าง . ในสามมิติ แต่หากปัญหานั้นมีความสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric problem) ภายใต้แรงกระทำที่มีความสมมาตรเช่นกันก็สามารถแก้ปัญหาให้เป็นสองมิติได้ในระบบพิกัดทรงกระบอก ลักษณะของปัญหาเช่นนี้ แสดงได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ตัวอย่างปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนในระบบพิกัดทรงกระบอก

โดยในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน และขั้นตอนในการประดิษฐ์โปรแกรมซึ่งสอดคล้องกัน ตลอดจนยกตัวอย่างการคำนวณและการนำโปรแกรมไปประยุกต์ใช้

4.1 สมการเชิงอนุพันธ์

จากรูปที่ 4.1 รูปร่างของวัตถุมีความสมมาตรรอบแกน z และแรงภายนอกที่มากกระทำหรืออุณหภูมิที่เกิดขึ้นไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง θ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอกในสมการที่ (2.8) สามารถลดรูปมาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความสมดุลของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนได้ดังนี้

$$\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + r \frac{\partial(\tau_{rz})}{\partial z} - \sigma_\theta + r f_r = 0 \quad (4.1n)$$

$$r \frac{\partial(\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + r f_z = 0 \quad (4.1ข)$$

4.2 เงื่อนไขขอบเขต

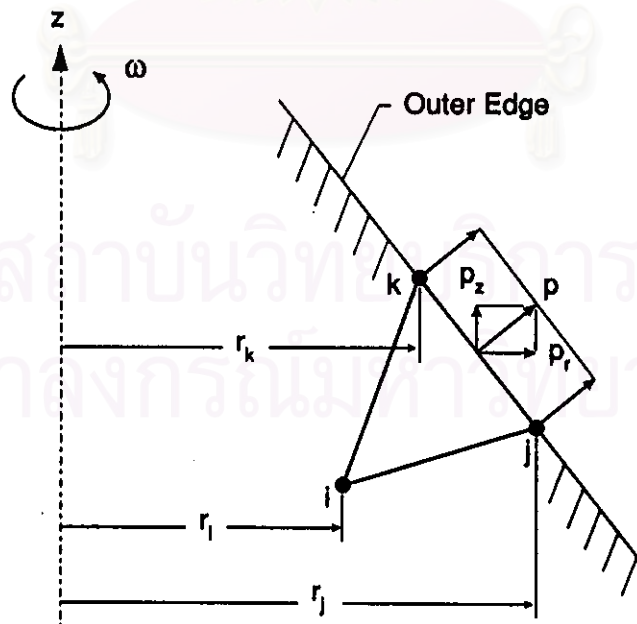
เงื่อนไขขอบเขตของการเคลื่อนตัวและความเค้นที่ผิวของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน สามารถสรุปจากเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็งสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอกในหัวข้อ 2.2.2 ของบทที่ 2 ได้ดังนี้

4.2.1 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตค่าการเคลื่อนตัว เนื่องจากมีความสมมาตรรอบแกนจึงไม่เกิดการเคลื่อนตัวในแนวทิศ θ เป็นผลให้มีการกำหนดเพียงค่าการเคลื่อนตัว $u(r)$ และ $w(z)$ ในทิศทางรัศมี r และแกน z ตามลำดับเท่านั้น

4.2.2 การกำหนดความเค้นที่ผิว สามารถสรุปจากสมการความเค้นที่ผิว (2.19) ในระบบพิกัดทรงกระบอกมาเป็น

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{rz} \\ \tau_{rz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

โดย T_r และ T_z คือความเค้นที่ผิวในทิศแกน r และ z ตามลำดับ สำหรับปัญหาโดยส่วนใหญ่แล้วทั้งสองค่านี้หมายถึง ความดันที่กระทำกับผิววัตถุในทิศแกน r และ z ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ p_r และ p_z ตามลำดับ เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน ได้แสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

4.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

4.3.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นประกอบไปด้วยขั้นตอนต่างๆ ในทำนองเดียวกันกับการวิเคราะห์ปัญหาหนึ่งมิติในบทที่ 3 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้ในปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนนี้ ผู้วิจัยได้เลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (Triangular element) [Huebner, K. H. and Thornton, E. A., 1982] ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2

ขั้นตอนที่ 2 สมมติให้การกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัวภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้อยู่ในลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ (Flat plane) [ปราวโมทย์ เตชะอำไพ, 2537] ซึ่งสามารถเขียนลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูปแบบของค่าที่จุดต่อ ได้ดังนี้

$$u(r, z) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (4.3)$$

$$w(r, z) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \quad (4.4)$$

โดย u, w แทนการเคลื่อนตัวในทิศทาง r และ z ตามลำดับ และสำหรับฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_i(r, z) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

โดย A = พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2} [x_2(z_3 - z_1) + x_1(z_2 - z_3) + x_3(z_1 - z_2)] \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2 & b_1 &= z_2 - z_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3 & b_2 &= z_3 - z_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1 & b_3 &= z_1 - z_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษคก้างของกัลเลอร์คิน เริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ (4.1ก) ด้วยการคูณด้วยตัวถ่วงน้ำหนัก W_1 แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ จากนั้นให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นศูนย์ จะได้

$$\int_{\Omega} W_1 \left[\frac{\partial(r \sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \tau_{rz})}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_1 (-\sigma_{\theta} + r f) d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

โดย Ω แทนขอบเขตของปริมาตร และ Γ แทนขอบเขตของพื้นผิว

สำหรับปัญหาสองมิติขึ้นไป การอินทิเกรตจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) [Hildebrand, F. B., 1976] กล่าวคือ

$$\int_{\Omega} u (\nabla \cdot \nabla) d\Omega = \int_{\Gamma} u (\nabla \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla) d\Omega \quad (4.9)$$

หากเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายของสมการ (4.9) กับพจน์แรกของสมการ (4.8) พบว่า

$$\begin{aligned} u &= W_1 \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \\ \nabla &= (r\sigma_r)\hat{i} + 0\hat{j} + (r\tau_{rz})\hat{k} \end{aligned}$$

และ $\hat{n} = n_r \hat{i} + n_\theta \hat{j} + n_z \hat{k}$

ทำการประยุกต์เข้ากับพจน์แรกของสมการ (4.8) จะได้

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} [W_1 r (\sigma_r n_r + \tau_{rz} n_z)] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_1}{\partial r} (r\sigma_r) + \frac{\partial W_1}{\partial z} (r\tau_{rz}) \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} W_1 \sigma_\theta d\Omega + \int_{\Omega} W_1 r \zeta d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

แทนค่าสมการเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (4.2) คือ $\sigma_r n_r + \tau_{rz} n_z = p_r$ ลงในสมการ (4.10) และแทน $N_1 = W_1$ โดยวิธีการบับโนฟ-กัลเลอร์กิน (Bubnov-Galerkin) [Huebner, K. H. and Thornton, E. A., 1982] ลงในสมการ (4.11) จากนั้นทำการจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} r \frac{\partial N_1}{\partial r} & N_1 & r \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_2}{\partial r} & N_2 & r \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_3}{\partial r} & N_3 & r \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r p_r d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r \zeta d\Omega \quad (4.11)$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นในสมการ (4.1ข) ทำการคูณด้วยตัวถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง W_1 แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์จะได้

$$\int_{\Omega} W_1 \left[\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial (r\sigma_z)}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_1 r \zeta d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

แล้วทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (4.9) เข้ากับพจน์แรกของสมการ (4.12) ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\int_{\Gamma} [W_1 r (\tau_{rz} n_r + \sigma_z n_z)] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_1}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial W_1}{\partial z} (r \sigma_z) \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_1 r \dot{f}_z d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

แทนค่าสมการเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (4.2) คือ $\tau_{rz} n_r + \sigma_z n_z = p_z$ ลงในสมการ (4.13) และแทน $N_1 = W_1$ โดยวิธีการบัพโนฟ-กัลเลอร์ดีน ลงในสมการ (4.13) แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ จะได้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} r \frac{\partial N_1}{\partial r} & r \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_2}{\partial r} & r \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_3}{\partial r} & r \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r p_z d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r \dot{f}_z d\Omega \quad (4.14)$$

รวมเมตริกซ์ในสมการ (4.11) และ เมตริกซ์ในสมการ (4.14) จัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์เดียวกัน จะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} \\ \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} \\ \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{f}_r \\ \dot{f}_z \end{Bmatrix} d\Omega \quad (4.15)$$

เมตริกซ์ $\{\sigma\}$ จากด้านซ้ายของสมการ (4.15) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความเครียด โดยลดรูปจากสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของของแข็งใน 3 มิติ ในระบบพิกัดทรงกระบอก สมการที่ (2.9) ถึง (2.13) ได้ดังนี้ [Logan, D. L., 1993]

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon - \epsilon_0\} \quad (4.16ก)$$

$$\text{โดย } \{\sigma\}^T = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}] \quad (4.16ข)$$

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.16ค)$$

$$\{\epsilon_0\}^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0] \quad (4.16ง)$$

โดย $\Delta T = T(r, z) - T_0$ ซึ่ง T_0 คือ อุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น

ส่วนเมตริกซ์ของความเครียด $\{\epsilon\}$ ในสมการที่ (4.16ก) นั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการเคลื่อนตัว โดยลดรูปจากสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัวของของแข็งในสามมิติ ในระบบพิกัดทรงกระบอก (2.14) ได้ดังนี้

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.16จ)$$

$$\text{โดย } \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \\ = [N] \{\delta\} \quad (4.16ฉ)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

$$= [B(r, z)] \{\delta\} \quad (4.16\text{ข})$$

โดย ฟังก์ชันการประมาณภายใน $N_i, i=1, 2, 3$ ได้แสดงไว้ในสมการ (4.5)

4.3.2 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

โดยการแทนค่าสมการ (4.16ก-ข) ลงในสมการ (4.15) จากนั้นแทน $d\Omega = d\theta dr dz$ สำหรับปริมาตร และ $d\Gamma = d\theta dz$ สำหรับพื้นที่ที่รับความดัน จะได้

$$\int_{\Omega} r [B]^T [C] [B] \{\delta\} d\theta dr dz = \int_{\Gamma} r [N]^T \{p\} d\theta dz + \int_{\Omega} r [N]^T \{f\} d\theta dr dz$$

$$+ \int_{\Omega} r [B]^T [C] \{\epsilon_0\} d\theta dr dz \quad (4.17)$$

จัดรูปไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเพื่อการประดิษฐ์โปรแกรมได้

$$[K]_e \{\delta\} = \{P\}_e + \{F_b\}_e + \{F_o\}_e \quad (4.18)$$

แยกพิจารณาแต่ละพจน์ของสมการ (4.18) เพื่อความเข้าใจในเอลิเมนต์เมตริกซ์ของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน เริ่มจากเมตริกซ์ด้านซ้ายของสมการ (4.18)

$$[K]_e = 2\pi \int_{\Gamma} [B]^T [C] [B] r dr dz$$

เพื่อการอินทิเกรตได้โดยง่าย จึงคำนวณเมตริกซ์ $[B]$ จากค่าเฉลี่ย \bar{r}, \bar{z} ซึ่งคิดเป็นค่าคงที่ของแต่ละเอลิเมนต์

$$r = \bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3} \quad \text{และ} \quad z = \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3} \quad (4.19)$$

$$[B(\bar{r}, \bar{z})] = [\bar{B}]$$

ดังนั้นจะได้ค่าประมาณของเมตริกซ์ $[K]_e$ เป็นดังนี้

$$[K]_e = 2\pi \bar{r} A [\bar{B}]^T [C] [\bar{B}] \quad (4.20)$$

พิจารณาเมตริกซ์แรกทางด้านขวาของสมการ (4.18)

$$\{P\}_e = 2\pi \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} r dz$$

การประดิษฐ์เมตริกซ์ $\{P\}_0$ สำหรับเอลิเมนต์ที่รับโหลดความดัน ดังแสดงในรูป 4.2 นั้น เนื่องจากลักษณะเอลิเมนต์จะมีด้านของเอลิเมนต์เป็นด้านประกอบของผิววัตถุ ซึ่งมีความดันมากกระทำกับพื้นผิว ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.2 มีด้านที่รับแรงดันคือ ด้าน jk โหลดเวกเตอร์ที่เกิดขึ้นสามารถเขียนแยกเป็นโหลดที่กระทำกับจุดต่อ j และ k ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของโหลดความดันที่กระทำกับด้าน jk ดังตัวอย่างการหาเมตริกซ์ $\{P\}_0$ สำหรับเอลิเมนต์ตัวอย่างในรูป 4.2 จะได้ดังนี้

$$\{p_j\} = \{p_k\} = \frac{2\pi\bar{r}(z_k - z_j)}{2} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix}$$

โดย $\bar{r} = \frac{r_k + r_j}{2}$ ทำให้เมตริกซ์ $\{P\}_0$ ของเอลิเมนต์ในรูป 4.2 คือ

$$\{P\}_0 = \frac{2\pi\bar{r}(z_k - z_j)}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_r \\ p_z \\ p_r \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ไม่มีด้านใดรับความดันเลย เมตริกซ์ $\{P\}_0$ จะมีค่าเป็นศูนย์

หากพิจารณาเมตริกซ์ที่สองด้านขวามือของสมการ (4.18) ซึ่งคือ

$$\{F_b\}_0 = 2\pi \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} r dr dz$$

เพื่อการอินทิเกรตโดยง่ายเช่นเดียวกับการหาเมตริกซ์ $[K]_0$ จึงแทน r ด้วย \bar{r} และสำหรับการ

การอินทิเกรต $\int_{\Gamma} N_i d\Gamma = \frac{A}{3}$ [Huebner, K. H., and Thornton, E. A., 1982] จากสมการ

(4.19) จะได้

$$\{F_b\}_0 = \frac{2\pi\bar{r}A}{3} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \\ f_r \\ f_z \\ f_r \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

แรงเหวี่ยงรอบตัวเองของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ย $f_r = \rho \omega^2 \bar{r}$ โดย ω แทนแรงเหวี่ยงรอบตัวเองมีหน่วยเป็น rad/s และ f_z แทนแรงวัตถุในแนวแกน z ได้แก่ แรงเนื่องจากน้ำหนักวัตถุ

ส่วนเมตริกซ์สุดท้ายทางด้านขวาของสมการ (4.18) จะได้

$$\{F_0\}_0 = 2\pi \int_r [B]^T [C] \alpha (T(r,z) - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} r dr dz$$

ใช้ค่าเฉลี่ยของ r และ $[B]$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\{F_0\}_0 = 2\pi \bar{r} A [\bar{B}]^T [C] \alpha (T(r,z) - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

4.4 ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 4.3 ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน โดยให้โปรแกรมนี้นี้ชื่อว่า AXISSYM ซึ่งมีเนื้อหาประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM] และอีก 5 โปรแกรมย่อย [SUBROUTINE PROGRAM] ทำงานตามขั้นตอนดังนี้

4.4.1 การทำงานเริ่มจากอ่านข้อมูลของปัญหา ได้แก่ จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ คุณสมบัติต่างๆของวัสดุ และค่าโคออดิเนตของจุดต่อ หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบกันเป็นเอลิเมนต์ อยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

4.4.2 คำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (4.18) โดยเรียกโปรแกรมย่อย AXIS [SUBROUTINE AXIS] จากนั้นส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ได้จากโปรแกรมย่อย AXIS ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวม โดยเรียกโปรแกรมย่อย ASSMBLE [SUBROUTINE ASSMBLE]

4.4.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่นบางจุดต่อจะถูกตรึงให้เคลื่อนที่ไปในแนวรัศมีหรือในแนวแกน z ไม่ได้ บางจุดต่อจะมีแรงภายนอกต่างๆมากระทำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC [SUBROUTINE APPLYBC]

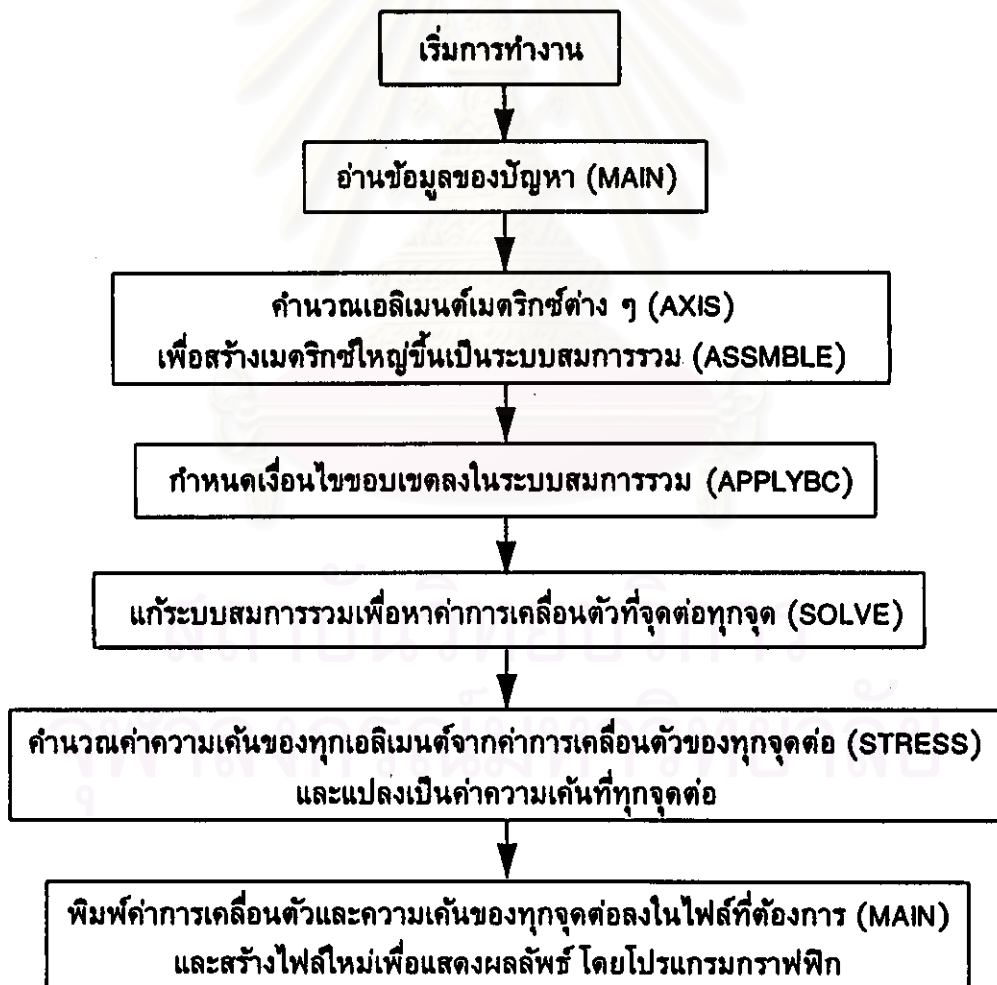
4.4.4 เรียกโปรแกรมย่อย SOLVE [SUBROUTINE SOLVE] เพื่อแก้ระบบสมการรวม เพื่อหาค่าการเคลื่อนตัว $u(r)$ ในทิศทางรัศมี r และการเคลื่อนตัว $w(z)$ ในทิศทางตามแกน z ที่ทุกจุดต่อ

4.4.5 คำนวณค่าความเค้น $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ ของทุกเอลิเมนต์ และแปลงเป็นค่าความเค้นของทุกจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย STRESS [SUBROUTINE STRESS]

4.4.6 พิมพ์คำตอบของค่าเคลื่อนตัว u และ w ของทุกจุดต่อ ความเค้นของทุกเอลิเมนต์ และความเค้นของทุกจุดต่อ ลงในไฟล์ที่ต้องการ

4.4.7 หากต้องการแสดงผลลัพธ์ที่ได้เป็นภาพกราฟฟิกบนจอคอมพิวเตอร์ ก็สามารถประดิษฐ์โปรแกรมขึ้นมาเพื่ออ่านผลลัพธ์ในไฟล์ผลลัพธ์ในหัวข้อ 4.4.6 แล้วแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบ (Format) ที่โปรแกรมกราฟฟิกต้องการเพื่อนำไปแสดงผลกราฟฟิกบนจอคอมพิวเตอร์ สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ผู้วิจัยได้เลือกใช้โปรแกรม NASTRAN เพื่อช่วยสร้าง Model และแสดงผลกราฟฟิก และได้ประดิษฐ์โปรแกรมซึ่งได้ตั้งชื่อว่า TRANAXIS เพื่อนำผลลัพธ์จากไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม AXISSYM มาคำนวณหาค่าความเค้นแบบ Von Mises และทำการแปลงผลให้อยู่ในรูปแบบที่โปรแกรม NASTRAN ต้องการนำไปแสดงผลกราฟฟิกบนจอคอมพิวเตอร์

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม AXISSYM สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบภูมิการทำงานดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ AXISSYM

4.5 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรม AXISSYM และโปรแกรมแปลงข้อมูลผลลัพธ์ TRANAXIS ให้อยู่ในรูปแบบที่โปรแกรม NASTRAN ต้องการนำไปแสดงผลกราฟฟิก ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

4.6 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ

4.6.1 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 9 ส่วนย่อยดังนี้

- ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์
- บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษรอธิบายลักษณะของไฟล์
- บรรทัดต่อไป ประโยคอธิบายลักษณะของไฟล์ ซึ่งมีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก
- ตัวอย่างเช่น 3
Input data for axisymmetric problem
Loads include centrifugal force and pressure on two sides
- ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา
- บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ เอลิเมนต์ แรงภายนอก และจำนวนกลุ่มของด้านที่รับความดัน
- บรรทัดที่ 2 ตัวเลขจำนวนจุดต่อ เอลิเมนต์ แรงภายนอก และจำนวนกลุ่มของด้านที่รับความดัน
- ตัวอย่างเช่น NPOIN NELEM NFORCE NSPRESSURE
781 1400 0 2
- หมายเหตุ: จำนวนกลุ่มของด้านที่รับความดันสำหรับโปรแกรม AXISSYM ระบุค่าได้ถึงหมายเลข 2 ซึ่งเพียงพอสำหรับทุกปัญหา เนื่องจากหากแบ่งขอบเขตปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ตั้งแต่ 2 เอลิเมนต์ขึ้นไปแล้ว เอลิเมนต์หนึ่งๆจะมีด้านซึ่งสามารถรับความดันได้อย่างมากที่สุดเพียง 2 ด้านเท่านั้น

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่างๆของปัญหา

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่างๆ

บรรทัดที่ 2 ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น อัตราส่วน
ปัวส์ซอง, ความหนาแน่นของวัสดุ สัมประสิทธิ์การขยาย
ตัวเนื่องจากอุณหภูมิ ระดับอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้น
อัตราเร็วเชิงมุมรอบแกน z ความเร่งของแรงดึงดูดโลก

ตัวอย่างเช่น

| ELAS | POISSON | DENSITY | ALPHA | TREF | ANGVEL | GRAV(gravity acc.) |
|--------|---------|---------|---------|------|--------|--------------------|
| 200.E9 | 0.343 | 7800. | 11.7E-6 | 0. | 0. | 0. |

ส่วนที่ 4 ตำแหน่งของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อตำแหน่งของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ระยะทางแกน r ของ
จุดต่อ ระยะทางแกน z ของจุดต่อ

ตัวอย่างเช่น NODAL COORDINATES:

| | | |
|-----|-----|-----|
| 1 | 0.2 | 0 |
| 2 | 0.5 | 4.1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 781 | 1.5 | 2.0 |

ส่วนที่ 5 อุณหภูมิของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้ออุณหภูมิของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ตัวเลขแสดงอุณหภูมิ
ของจุดต่อนั้นๆ

ตัวอย่างเช่น NODAL TEMPERATURE LOAD

| | |
|-----|-----|
| 1 | 200 |
| 2 | 210 |
| ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ |
| 781 | 300 |

ส่วนที่ 6 เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป รหัสอักษร 8 ตัว ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ
รหัสตัวเลขแสดงเงื่อนไขขอบเขตการเคลื่อนตัวของจุด
ต่อนั้นๆ

ตัวอย่างเช่น NODAL CONSTRAINTS:

| | | |
|----------|-----|----|
| SPCCONST | 1 | 1 |
| SPCCONST | 5 | 3 |
| SPCCONST | 600 | 13 |
| ENDCONST | 0 | 0 |

หมายเหตุ: รหัสอักษร 8 ตัว SPCCONST เป็นรหัสอักษรหน้าจุด
ต่อที่มีการจับยึด

หลังจากระบุจุดต่อที่มีการจับยึดจนครบแล้ว จะมีการปิด
ท้ายอีกบรรทัดด้วยรหัสอักษร 8 ตัว ENDCONST ตาม
ด้วย ตัวเลข 0 อีกสองตัวที่ตรงกับช่องหมายเลขของจุด
ต่อ และช่องรหัสตัวเลขแสดงเงื่อนไข ตามลำดับ

ส่วนรหัสตัวเลข

1 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่เฉพาะในทิศทางแกน r

3 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่เฉพาะในทิศทางแกน z

13 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกตรึงอยู่กับที่

ส่วนที่ 7 ลักษณะการรวมจุดต่อของเอลิเมนต์:

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อการรวมจุดต่อของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขของจุด
ต่อทั้งสามในทิศทางเข็มนาฬิกา ที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิ
เมนต์นั้น

ตัวอย่างเช่น ELEMENT NODAL CONNECTIONS:

| | | | |
|------|-----|-----|-----|
| 1 | 10 | 13 | 15 |
| 2 | 15 | 18 | 23 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1400 | 780 | 769 | 748 |

ส่วนที่ 8 ความดันภายนอกที่มากกระทำกับด้านต่างๆของวัตถุ

บรรทัดแรก คำระบุกลุ่มของความดัน

บรรทัดที่สอง คำระบุเอลิเมนต์ คำระบุความดันในทิศแกน r และแกน z คำระบุหมายเลขของจุดต่อของเอลิเมนต์ที่เชื่อมกันเป็นด้านที่รับความดัน

บรรทัดต่อไป รหัสอักษร 8 ตัว ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์ซึ่งรับความดัน ค่าความดันที่กระทำกับเอลิเมนต์ในทิศแกน r ค่าความดันที่กระทำกับเอลิเมนต์ในทิศแกน z หมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์ที่เชื่อมกันเป็นด้านที่รับความดัน

ตัวอย่างเช่น SURFACE PRESSURE GROUP 1:

| | No.Elem | PR | PZ | NODE1 | NODE2 |
|----------|---------|------|----|-------|-------|
| PRESSURE | 20 | -2E6 | 0. | 80 | 79 |
| PRESSURE | 41 | -2E6 | 0. | 79 | 78 |
| PRESSURE | 45 | -2E6 | 0. | 78 | 77 |
| ENDGROUP | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

SURFACE PRESSURE GROUP 2:

| | No.Elem | PR | PZ | NODE1 | NODE2 |
|----------|---------|-----|----|-------|-------|
| PRESSURE | 1385 | 1E6 | 0. | 159 | 160 |
| PRESSURE | 1400 | 1E6 | 0. | 160 | 1 |
| ENDGROUP | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

หมายเหตุ: รหัสอักษร 8 ตัว PRESSURE เป็นรหัสอักษรหน้าบรรทัดของเอลิเมนต์ที่รับความดัน

รหัสอักษร 8 ตัว ENDDGROUP ตามด้วยเลขศูนย์อีก 5 ตัว จะวางไว้บรรทัดสุดท้ายของแต่ละกลุ่มของความดัน เพื่อเป็นการแสดงว่าสิ้นสุดของกลุ่มความดัน ณ ด้านนั้นของชิ้นงานแล้ว

ส่วนที่ 9 แรงภายนอกที่มากกระทำกับจุดต่อต่างๆ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อแรงภายนอกที่มากกระทำกับจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ตัวเลขแสดงค่าของแรงที่กระทำกับจุดต่อนั้นในแนวแกน r ตัวเลขแสดงค่าของแรงที่กระทำกับจุดต่อนั้นในแนวแกน z

| ตัวอย่างเช่น | NODAL | FORCES | |
|--------------|-------|--------|------|
| | 1 | 100 | -500 |
| | 4 | 90 | -350 |

4.6.2 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม TRANAXIS ต้องการ คือไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม AXISSYM ทั้งไฟล์ .

ดังแสดงตัวอย่างลักษณะไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ แสดงได้ดังรูปที่ 4.4

```

2
Finite element to solve axisymmetric problem
Operating with thermal, pressure load and nodal, body force
NPOIN  NELEM  NFORCE  NPPRESSURE
4      2      1      2
ELAS  POISSON  DENSITY  ALPHA  TREF.  ANGVEL  GRAV(gravity acc.)
200e9  0.3      7800      11E-6  0.      52.36  9.81
NODAL COORDINATE:
1      .04      .01
2      .04      0.
3      .06      0.
4      .06      .01
NODAL TEMPERATURE LOAD:
1      0.
2      0.
3      0.
4      0.
NODAL CONSTRAINTS:
SPCCONST  1      3
SPCCONST  2      3
SPCCONST  3      13
SPCCONST  4      13
ENDCONST  0      0
ELEMENT NODAL CONNECTIONS:
1      1      2      4
2      2      3      4
SURFACE PRESSURE GROUP1
NO.ELEM.  PR      PZ      NODE1  NODE2
PRESSURE  1      2E6    0.      1      2
ENDGROUP  0      0      0      0      0
SURFACE PRESSURE GROUP2
NO.ELEM.  PR      PZ      NODE1  NODE2
PRESSURE  1      1E6    0.      1      2
ENDGROUP  0      0      0      0      0
NODAL FORCE:
4      2514      0.

```

รูปที่ 4.4 รูปแบบของไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ

และตัวอย่างไฟล์ผลลัพธ์ ซึ่งได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม AXISSYM และเป็นไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม TRANAXIS ต้องการด้วย แสดงได้ดังรูปที่ 4.5


```

THE FINITE ELEMENT MODEL
CONSISTS OF 4 NODES AND 2 ELEMENTS
AND HALF BAND WIDTH OF 8
NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [ 4 ]:
NODE          U          W
  1          0.1402184E-06  0.0000000E+00
  2          0.1337522E-06  0.0000000E+00
  3          0.0000000E+00  0.0000000E+00
  4          0.0000000E+00  0.0000000E+00
ELEMENTAL STRESS SOLUTIONS [ 2 ]:
ELEM   SRR          SZZ          SOO          SRZ
  1 -0.166176E+07 -0.583153E+06 -0.282086E+06  0.497404E+05
  2 -0.170405E+07 -0.675191E+06 -0.546583E+06  0.000000E+00
NODAL STRESS SOLUTIONS [ 4 ]:
NODE          SRR          SZZ          SOO          SRZ
  1 -0.166176E+07 -0.583153E+06 -0.282086E+06  0.497404E+05
  2 -0.168291E+07 -0.629172E+06 -0.414335E+06  0.248702E+05
  3 -0.170405E+07 -0.675191E+06 -0.546583E+06  0.000000E+00
  4 -0.168291E+07 -0.629172E+06 -0.414335E+06  0.248702E+05
ELEMENT NODAL CONNECTION
ELE     I     J     K
  1     1     2     4
  2     2     3     4

```

รูปที่ 4.5 รูปแบบของไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม AXISSYM

และรูปที่ 4.6 แสดงไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างซึ่งได้จากโปรแกรมแปลงข้อมูล TRANAXIS ซึ่งอยู่ในรูปแบบที่พร้อมให้โปรแกรม NASTRAN นำไปแสดงผลกราฟฟิก

```

1 MSC/NASTRAN PAGE
0
DISPLACEMENT
POINT ID. TYPE T1          T2          T3          R1          R2          R3
  1     G     0.140218E-06  0.0          0.000000E+00  0.0          0.0          0.0
  2     G     0.133752E-06  0.0          0.000000E+00  0.0          0.0          0.0
  3     G     0.000000E+00  0.0          0.000000E+00  0.0          0.0          0.0
  4     G     0.000000E+00  0.0          0.000000E+00  0.0          0.0          0.0
1
0
STRESSES IN TRIAX6 ELEMENTS
ID          RADIAL          AZIMUTHAL          AXIAL          SHEAR          VON MISES
  1          0 -0.166176E+07 -0.282086E+06 -0.583153E+06  0.497404E+05  0  0.816580E+06
  2          0 -0.170405E+07 -0.546583E+06 -0.675191E+06  0.000000E+00  0  0.828808E+06
1

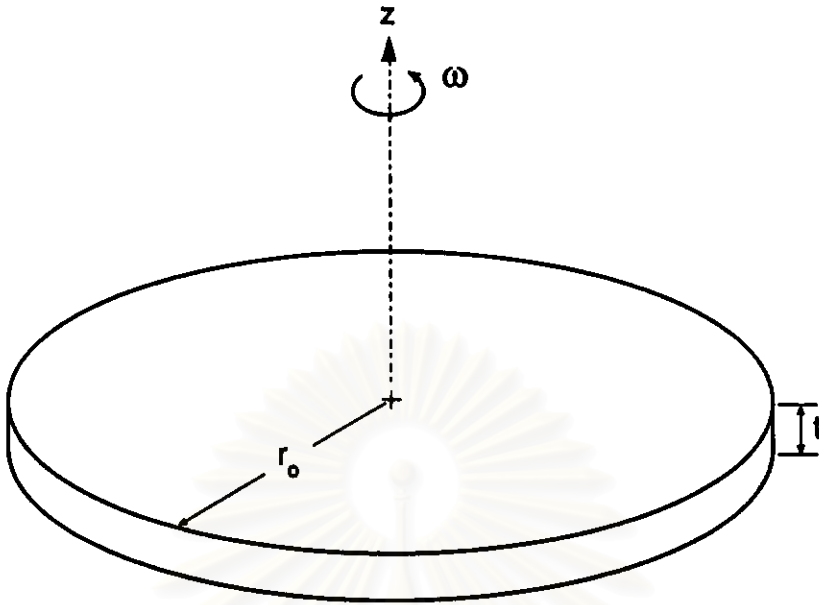
```

รูปที่ 4.6 รูปแบบของไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากโปรแกรมแปลงข้อมูล TRANAXIS และอยู่ในรูปแบบที่โปรแกรม NASTRAN ต้องการ

4.7 ตัวอย่างและการนำไปประยุกต์ใช้

4.7.1 การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s ลักษณะของปัญหาได้แสดงดังรูปที่

4.7



รูปที่ 4.7 แผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง
ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s

ปัญหาเช่นนี้สามารถหาผลเฉลยแน่นอนตรงได้ [Ugural, A. C. and Fenster, S. K., 1977] โดยตั้งสมมติฐานว่าเป็นแผ่นกลมบางที่มีความหนาคงที่ ซึ่งผลในแนวแกน z นั้นละทิ้งได้ และเป็นปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน ทำให้สมการแสดงความสมดุลของของแข็งในสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอก (2.8) ลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (4.24)$$

โดยการแทนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (2.10) และความเครียดกับการเคลื่อนตัว (2.13) ที่ลดรูปจากของแข็งสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอก ลงในสมการ (4.24) จะได้

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -(1-\nu^2) \rho\omega^2 r/E \quad (4.25)$$

แก้สมการหาคำตอบในรูปฟังก์ชันของ $u(r) = \frac{-\rho\omega^2 r^3(1-\nu^2)}{8E} + c_1 r + \frac{c_2}{r}$ (4.26)
จากนั้น แทน $u(r)$ ลงในความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว และความเค้นกับความเครียด จะได้

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{-(3+\nu)(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^2}{8E} + (1+\nu)c_1 - (1-\nu)\frac{c_2}{r^2} \right] \quad (4.27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{-(1+3\nu)(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^2}{8E} + (1+\nu)c_1 + (1-\nu)\frac{c_2}{r^2} \right] \quad (4.28)$$

โดย c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ หาได้โดยการใส่เงื่อนไขขอบเขต

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = 0 \quad , \quad (u)_{r=0} = 0$$

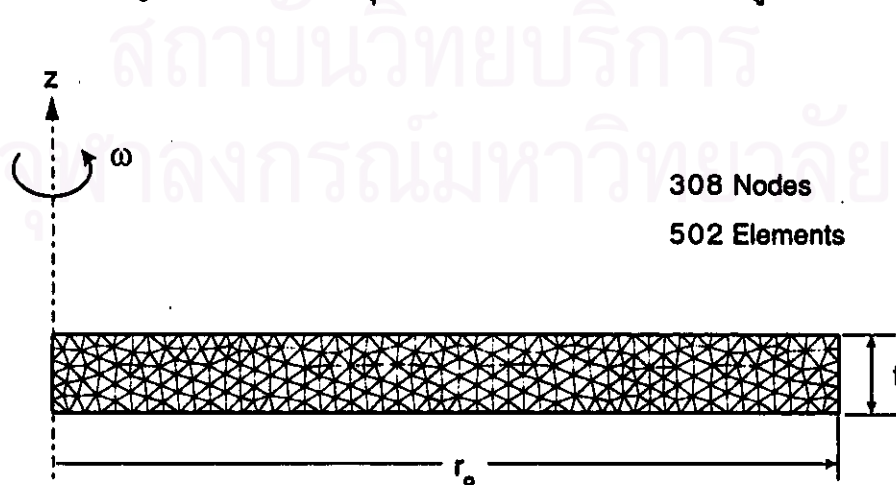
ลงใน สมการ (4.27) และ (4.26) ตามลำดับ แล้วแก้สมการหาค่า c_1, c_2 ทำให้ได้ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s ดังนี้

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} (r_0^2 - r^2) \rho \omega^2 \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \left(r_0^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \rho \omega^2 \\ u &= \frac{1-\nu}{8E} [(3+\nu)r_0^2 - (1+\nu)r^2] \rho \omega^2 r \end{aligned} \quad (4.29)$$

ต่อไปเป็นการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ดังแสดงในรูป 4.7 โดยใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น คือโปรแกรม AXISSYM เพื่อทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในสมการ (4.29) โดยแผ่นกลมตันบางที่ใช้ในการวิเคราะห์มีคุณสมบัติดังนี้

| | | | |
|---|---|-----------------------|-------------------|
| ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (α) | = | 11.7×10^{-6} | /°C |
| ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซอง (ν) | = | 0.29 | |
| ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (ρ) | = | 7800 | Kg/m ³ |
| ค่ายังโมดูลัสของความยืดหยุ่น (E) | = | 200×10^9 | N/m ² |
| ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น (T_0) | = | 0 | °C |
| ความเร็วเชิงมุม (ω) | = | 52.36 | rad/s |

รายละเอียดต่อไปนี้จะแสดงการใช้โปรแกรม AXISSYM เพื่อคำนวณปัญหาข้างต้น โดยจัดแบ่งปัญหาออกเป็น 308 จุดต่อ 502 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นกลมตันบางในรูปที่ 4.4

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม AXISSYM โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูล โดยเมื่อผู้ใช้ป้อนชื่อเข้าไปแล้วโปรแกรมจะเริ่มคำนวณอย่างเป็นขั้นเป็นตอนดังอธิบายในหัวข้อ 4.4 เมื่อโปรแกรมคำนวณสิ้นสุดลงโปรแกรมจะให้ผู้ใช้ป้อนชื่อไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

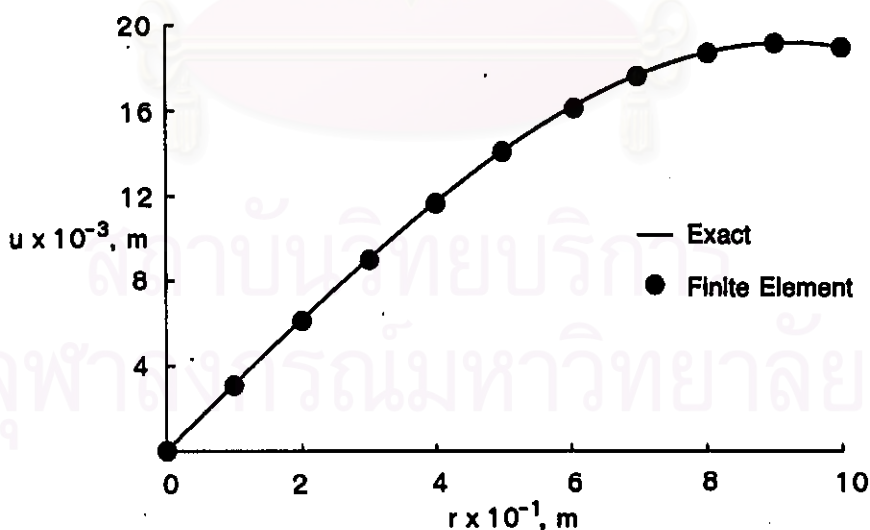
```
*FINITE ELEMNT FOR SOLVING AXISSYMMETRIC PROBLEM**
WITH PRESSURE TEMPERATURE AND CONSTANT ANGULAR VELOCITY
PLEASE INPUT THE FILE NAME
SOLIDCEN.DAT <ENTER>

***THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF 308 NODES 502 ELEMENTS***
***ESTABLISHING ELEMENT MATRICS AND ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS***
***APPLYING BOUNDARY CONDITIONS***
***SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR D)ISPLACEMENT SOLUTIONS**
(TOTAL OF 308 EQUATIONS WITH HALF BANDWIDTH OF 408)

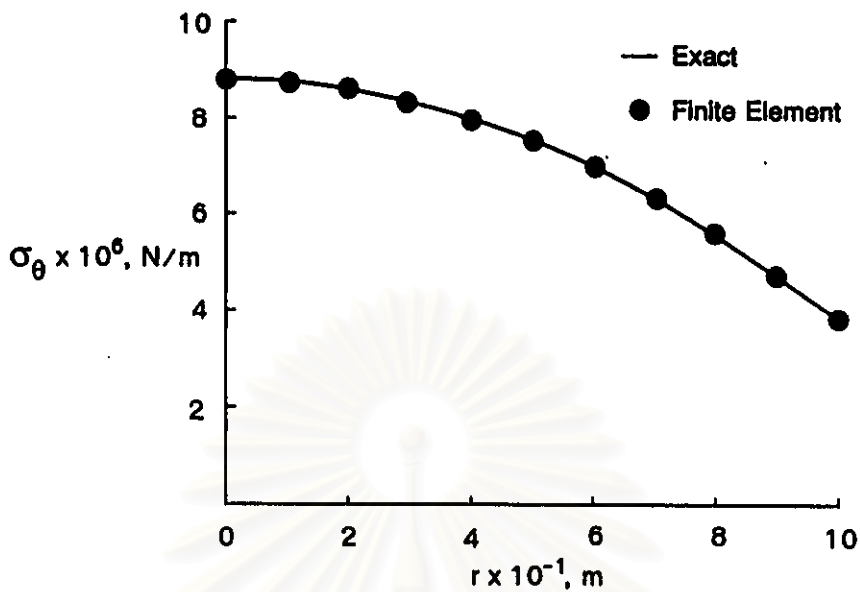
PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT AND STRESS SOLUTIONS:
SOLIDCEN.OUT <ENTER>

Stop - Program terminated
```

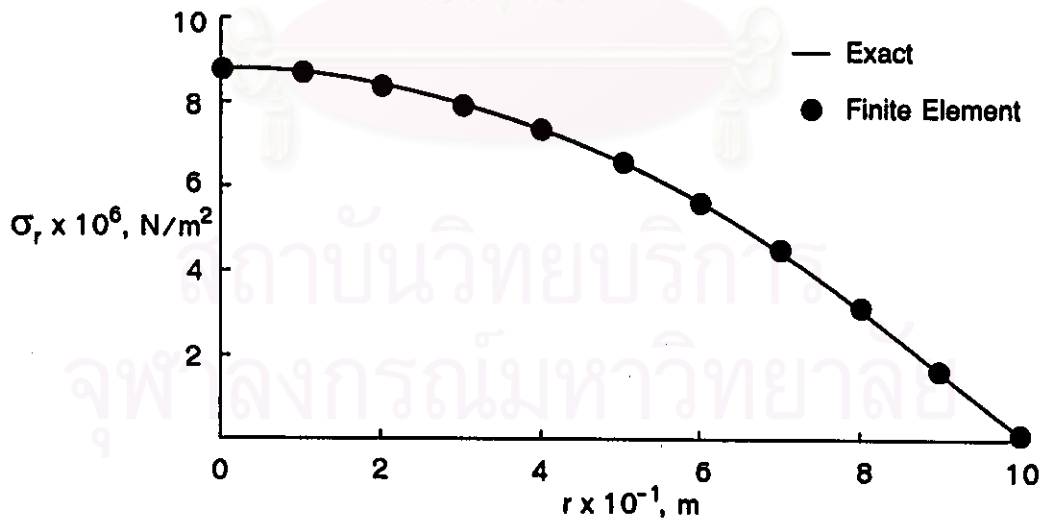
โดยไฟล์ของผลลัพธ์ที่ได้ของแผ่นกลมตันบางในรูปที่ 4.8 เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากการคำนวณในสมการที่ (4.29) การเคลื่อนตัวในแนวรัศมีได้เปรียบเทียบดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.9 ความเค้นในแนวสัมผัสได้เปรียบเทียบดังแสดงในรูปที่ 4.10 และความเค้นในแนวรัศมีได้เปรียบเทียบดังแสดงในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.9 การเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่



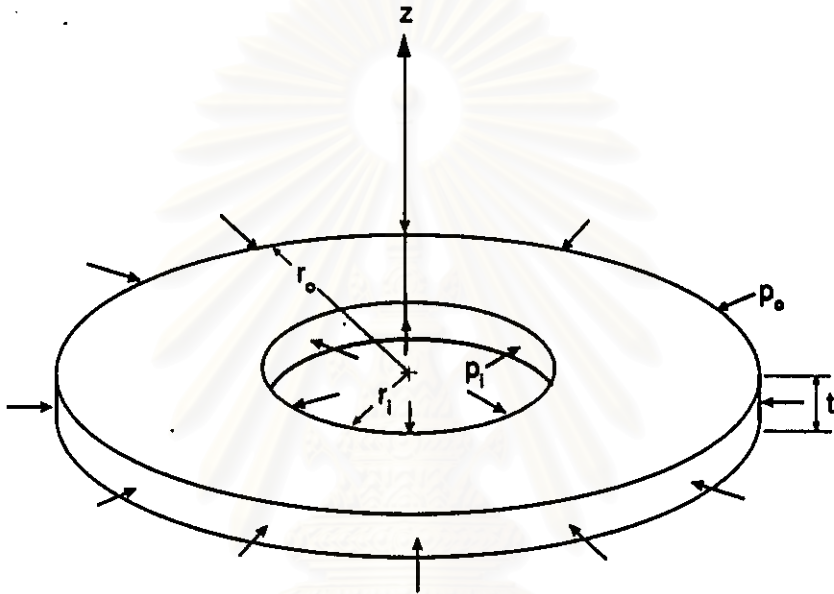
รูปที่ 4.10 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวสัมผัส ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นกลมตันบาง ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่



รูปที่ 4.11 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวรัศมี ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นกลมตันบาง ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่

ความผิดพลาด (Error) ของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากโปรแกรม AXISSYM เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงสมการ (4.29) ประกอบด้วยความผิดพลาดของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี 0.055% ความเค้นในแนวสัมผัส 0.02% และความเค้นในแนวรัศมี 0.003% ตามลำดับ

4.7.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันกระทำที่ผิวภายในและภายนอกของวงแหวน ลักษณะของปัญหาได้แสดงในรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 แผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o

ปัญหานี้ สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ [Ugural, A. C. and Fenster, S. K., 1977] เช่นกัน โดยมีสมมติฐานเช่นเดียวกับตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 ทำให้ได้สมการความสมดุลเช่นเดียวกับสมการ (4.25) และแก้สมการหาคำตอบในรูปฟังก์ชันของ $u(r)$ ได้ดังสมการ (4.26) และหลังจากแปลง $u(r)$ ให้อยู่ในรูปของ σ_r และ σ_θ ก็จะได้สมการเช่นเดียวกับสมการ (4.27) และ (4.28) ตามลำดับ แต่สำหรับตัวอย่างนี้ไม่มีแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ดังนั้นพจน์ต่างๆในสมการดังกล่าวที่เกี่ยวข้องกับ ω จึงเป็นศูนย์

เงื่อนไขขอบเขตเพื่อหาค่าคงที่ สำหรับตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.2 นี้ คือ

$$\left(\sigma_r\right)_{r=r_i} = -p_i \quad \text{และ} \quad \left(\sigma_r\right)_{r=r_o} = -p_o$$

ทำการแก้สมการค่าคงที่ c_1, c_2 ในทำนองเดียวกับตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 ก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o ดังนี้

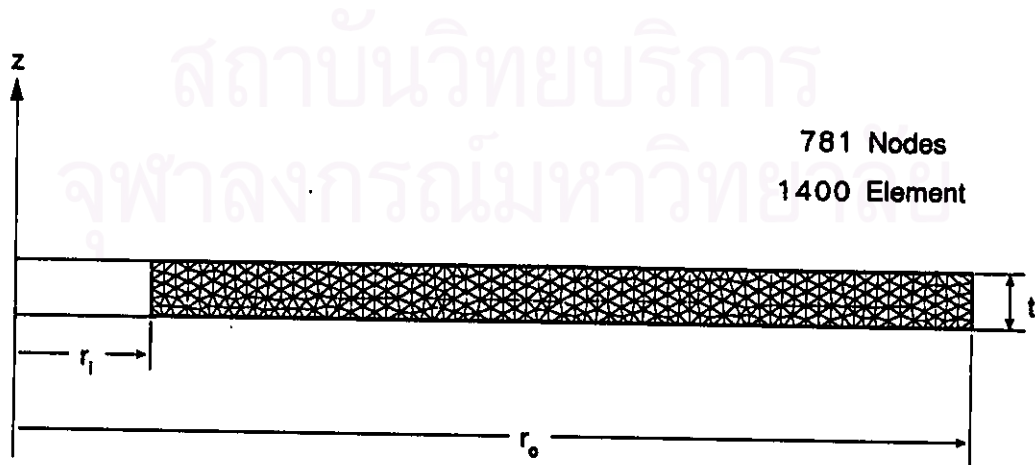
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r^2} \\ u &= \frac{1-\nu}{E} \frac{(r_i^2 p_i - r_o^2 p_o) r}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{1+\nu}{E} \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r}\end{aligned}\quad (4.30)$$

เปรียบเทียบการวิเคราะห์ปัญหาดังรูปที่ 4.12 ดังกล่าว ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ AXISSYM โดยแผ่นวงแหวนบางที่จะวิเคราะห์มีคุณสมบัติดังนี้

| | | |
|---|---|---|
| ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (α) | = | $11.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ |
| ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง (ν) | = | 0.343 |
| ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (ρ) | = | 7800 Kg/m^3 |
| ค่ายังโมดูลัสของความยืดหยุ่น (E) | = | $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ |
| ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น (T_0) | = | $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ |
| ความดันที่กระทำกับผิวภายในวงแหวน (p_i) | = | $1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ |
| ความดันที่กระทำกับผิวภายนอกวงแหวน (p_o) | = | $-2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ |

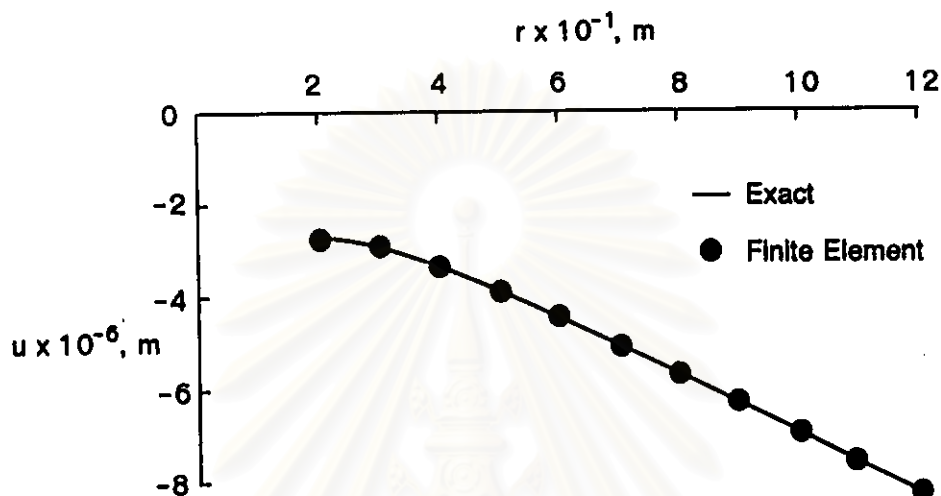
หมายเหตุ: เครื่องหมายของความดันที่แทนลงในโปรแกรม มีทิศเป็นบวกหรือลบตามทิศเวกเตอร์ของความดันนั้น

จากนั้นใช้โปรแกรม AXISSYM คำนวณปัญหาดังกล่าว โดยจัดแบ่งปัญหาออกเป็น 781 จุดต่อ 1400 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.13

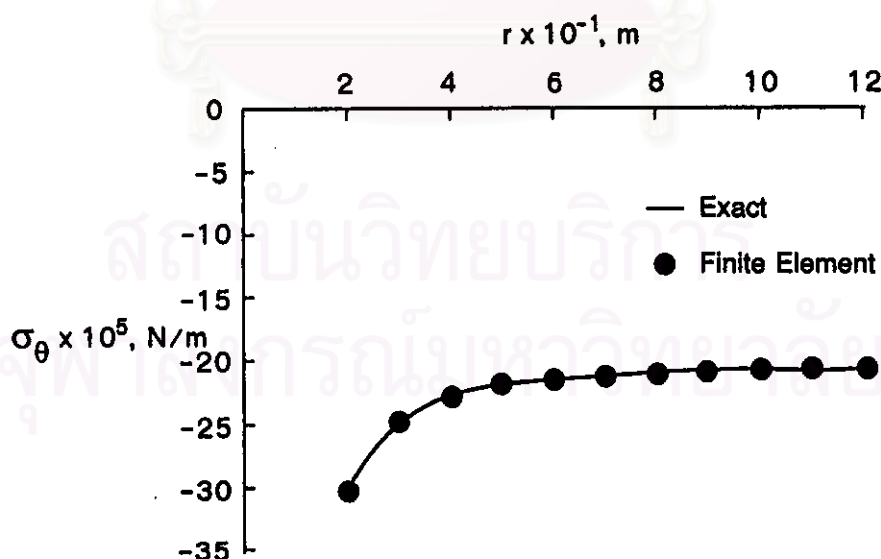


รูปที่ 4.13 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นวงแหวนบางในรูปที่ 4.12

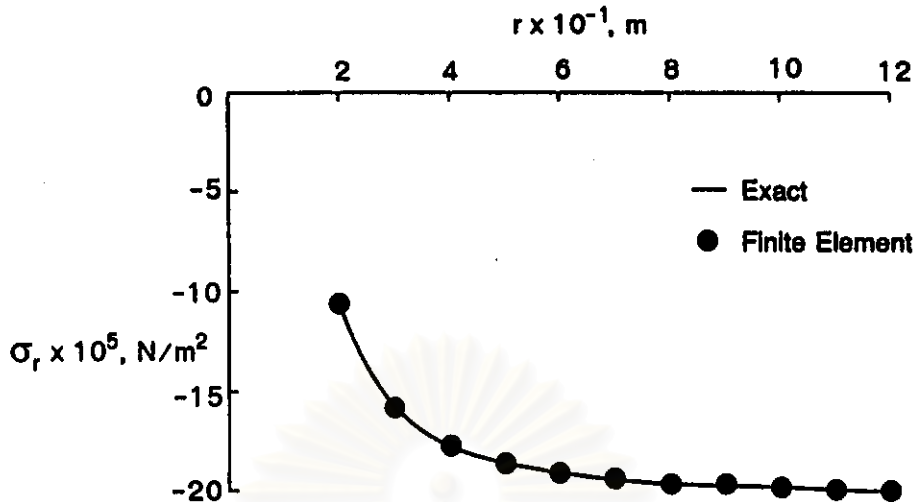
หลังจากที่คำนวณปัญหาในรูป 4.13 ด้วยโปรแกรม AXISSYM แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำในสมการ (4.30) แล้วทำการพล็อตกราฟเปรียบเทียบ สำหรับการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่ได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นยำดังรูปที่ 4.14 เปรียบเทียบผลของความเค้นในแนวสัมผัสดังรูปที่ 4.15 และเปรียบเทียบผลของความเค้นในแนวรัศมีดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.14 การเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o



รูปที่ 4.15 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวสัมผัสระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o

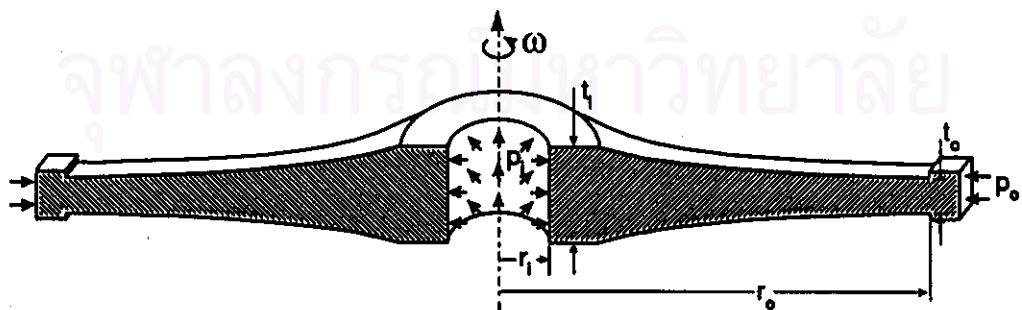


รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o

จากตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 และ 4.7.2 พบว่าการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม AXISSYM กับผลเฉลยแม่นยำ มีความผิดพลาดน้อยมาก กล่าวคือ สำหรับความผิดพลาด (Error) ของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีมีค่า 0.06% ความเค้นในแนวสัมผัสมีค่า 0.07% และความเค้นในแนวรัศมีมีค่า 0.006% ก่อให้เกิดความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรม AXISSYM เพื่อให้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

4.7.3 การประยุกต์ใช้โปรแกรม AXISSYM กับปัญหา Turbine casing

โดยทั่วไป Turbine Casing นับเป็นอีกปัญหาหนึ่งซึ่งมีความสมมาตรรอบแกน ผู้วิจัยได้จำลองลักษณะของ Turbine Casing ขึ้นมา ดังแสดงในรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 แบบจำลองของ Turbine Casing ซึ่งรับแรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o และอุณหภูมิ

ขนาดต่างๆของปัญหานี้ดังแสดงในรูปที่ 4.17 ประกอบด้วย

| | |
|---------------|--------------------------|
| รัศมีภายใน | $(r_i) = 0.15 \text{ m}$ |
| รัศมีภายนอก | $(r_o) = 0.94 \text{ m}$ |
| ความหนาภายใน | $(t_i) = 0.2 \text{ m}$ |
| ความหนาภายนอก | $(t_o) = 0.07 \text{ m}$ |

ภาวะที่มากกระทำ

| | |
|------------------|---------------------------------------|
| ความดันภายใน | $(p_i) = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ |
| ความดันภายนอก | $(p_o) = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ |
| อัตราเร็วเชิงมุม | $(\omega) = 209.44 \text{ rad/s}$ |

ส่วนอุณหภูมิที่กระทำนั้นเป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลซึ่งมีการกระจายจากผิวด้านในไปยังผิวด้านนอกโดยอุณหภูมิที่ผิวรัศมีภายในมีค่าเป็น 87°C และอุณหภูมิที่ผิวรัศมีภายนอกมีค่า 200°C

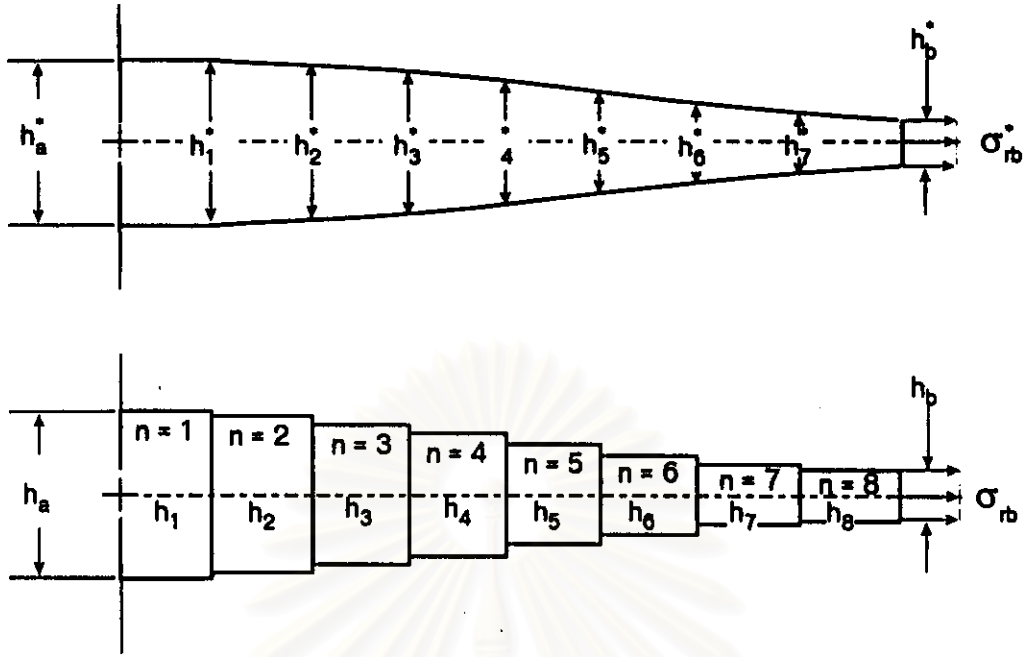
คุณสมบัติต่างๆของวัสดุ

เลือกใช้วัสดุ AISI 403 มีคุณสมบัติต่างๆดังนี้

| | |
|--------------------------------------|---|
| ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน | $(\alpha) = 11.7 \times 10^{-6} \text{ } /^\circ\text{C}$ |
| ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซอง | $(\nu) = 0.343$ |
| ค่าความหนาแน่นของวัสดุ | $(\rho) = 7800 \text{ Kg/m}^3$ |
| ค่ายังโมดูลัสของความยืดหยุ่น | $(E) = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ |
| ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น | $(T_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ |

Turbine Casing ดังแสดงในรูป 4.17 มีลักษณะซับซ้อน และไม่สามารถหาผลเฉลยแน่นอนตรงได้ ต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนซึ่งมีรูปร่างซับซ้อนนั้นสามารถใช้วิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) หรือ ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้

วิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) [Ugural, A. C. and Fenster, S. K., 1977] วิธีหนึ่งสำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนที่รูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก ได้มีแนวคิดในการคำนวณด้วยการแบ่งขอบเขตปัญหาออกเป็นวงแหวนที่มีหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่มีความหนาคงที่หลายๆชั้น ดังเช่นแสดงในรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.18 วิธีการคำนวณ [Ugural, A. C. and Fenster, S. K., 1977] ของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

หลักการคำนวณเริ่มจากการพิจารณาหน้าสัมผัสของวงแหวนแต่ละชั้นซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวรัศมีจาก σ_{rn} ไปเป็นค่า $\sigma_{r(n+1)}$ และความเค้นในแนวสัมผัสจาก $\sigma_{\theta n}$ ไปเป็น $\sigma_{\theta(n+1)}$ โดยที่ความหนาของวงแหวนเปลี่ยนแปลงจากความหนา h_n ไปเป็น h_{n+1} เนื่องจากหน้าสัมผัสของวงแหวนแต่ละชั้นนั้นจะต้องมีการสมดุลของแรง โดยแรงในแนวรัศมีเนื่องจาก σ_{rn} เขียนแทนด้วย p_n มีค่าเป็น $2\pi r h_n \sigma_{rn}$ ส่วนแรงในแนวรัศมีที่หน้าสัมผัสเดียวกันแต่เป็นแรงเนื่องจากความเค้นในแนวรัศมี $\sigma_{r(n+1)}$ แทนด้วยแรง p_{n+1} มีค่าเป็น $2\pi r h_{n+1} \sigma_{r(n+1)}$ เมื่อทำการสมดุลแรงทั้งสองคือ $p_n = p_{n+1}$ แล้วจัดพจน์ใหม่จะได้รับการเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวรัศมีที่แต่ละหน้าตัด

$$\sigma_{r(n+1)} = \sigma_{rn} \frac{h_n}{h_{n+1}} \tag{4.31}$$

นอกจากนั้น การเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่แต่ละหน้าสัมผัสของวงแหวนแต่ละชั้นจะต้องเท่ากัน นั่นคือ

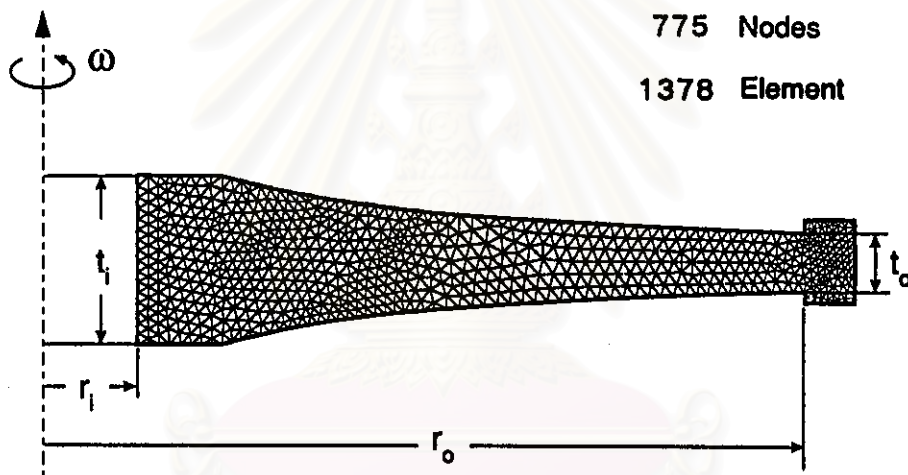
$$u(r) = \frac{r}{E} (\sigma_{\theta n} - \nu \sigma_{rn}) = \frac{r}{E} (\sigma_{\theta(n+1)} - \nu \sigma_{r(n+1)})$$

จัดพจน์ใหม่จะได้รับการเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวสัมผัสที่แต่ละหน้าตัดดังนี้

$$\sigma_{\theta(n+1)} = \sigma_{\theta n} + \nu \sigma_{rn} \left(\frac{h_n}{h_{n+1}} - 1 \right) \tag{4.32}$$

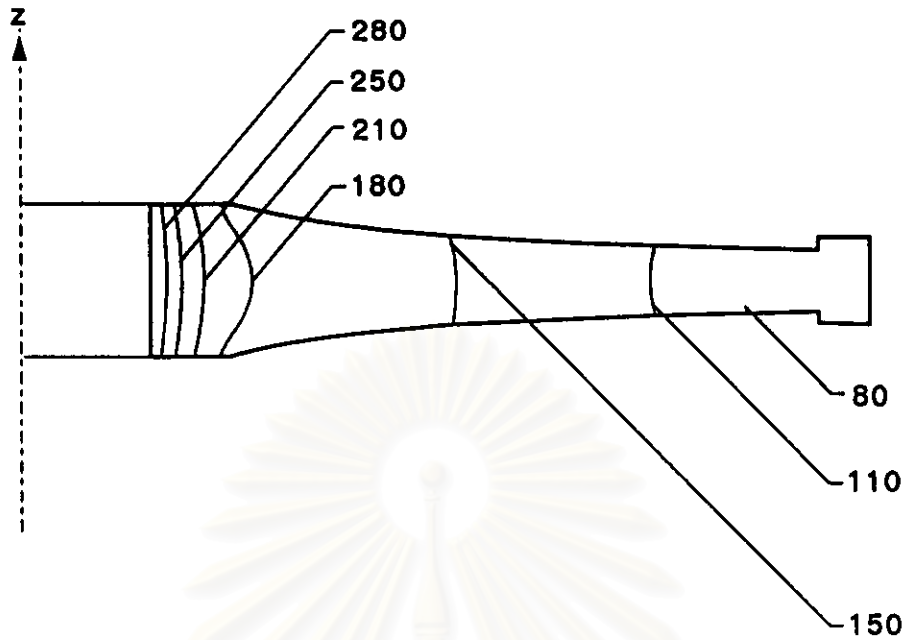
ความเค้นภายในวงแหวนแต่ละชั้น สามารถคำนวณในลักษณะเดียวกับแผ่นวงแหวนบางดังตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 และ 4.7.2 โดย r_i , r_o ที่แสดงในหัวข้อดังกล่าวนั้น เมื่อนำมาคำนวณสำหรับแต่ละวงแหวนในหัวข้อนี้ ก็จะแทนด้วย r_n , r_{on} ตามลำดับ ดังนั้นเมื่อเราทราบความเค้นที่ขอบเขตของทั้งปัญหา คือ σ_r , σ_θ ก็สามารถนำหลักการต่างๆ ที่กล่าวไว้ในหัวข้อนี้หาการกระจายความเค้นที่ตำแหน่งต่างๆ ได้

ส่วนการหาผลเฉลยโดยประมาณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถทำได้ด้วยการใช้โปรแกรม AXISSYM โดยรูปที่ 4.19 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งประกอบด้วย 775 จุดต่อ และ 1378 เอลิเมนต์



รูปที่ 4.19 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของ Turbine Casing ในรูปที่ 4.17

หลังจากที่ได้คำนวณปัญหา Turbine Casing ในรูปที่ 4.19 ด้วยโปรแกรม AXISSYM เสร็จแล้วนำไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้ไปแปลงให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นของ Von Mises โดยใช้โปรแกรม TRANAXIS ลักษณะของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณแสดงได้ดังรูปที่ 4.20



รูปที่ 4.20 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m² และการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นบน Turbine Casing ในรูปที่ 4.17

ในบทนี้ ได้อธิบายรายละเอียดและขั้นตอนการประดิษฐ์ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน และได้แสดงถึงแนวคิดในการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จากค่าเฉลี่ย \bar{r} , \bar{z} ซึ่งพิจารณาได้เป็นค่าคงที่สำหรับเอลิเมนต์นั้นๆ ก่อให้เกิดความสะดวกในการอินทิเกรตเพื่อประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ ส่งผลให้สามารถตั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้สะดวกขึ้น ซึ่งจากการพิสูจน์ความถูกต้องด้วยการเปรียบเทียบกับปัญหาที่มีรูปร่างง่าย ๆ ที่มีผลเฉลยแน่นอนตรง ในหัวข้อ 4.7.1 และ 4.7.2 พบว่าด้วยวิธีการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จากค่าเฉลี่ยดังกล่าวก็สามารถให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแน่นอนตรงได้โดยมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1% หากแบ่งเอลิเมนต์ให้มากเพียงพอ

ส่วนการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาสมมาตรรอบแกนที่มีรูปร่างซับซ้อนนั้นสามารถกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สะดวกและเหมาะสมกว่าวิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) มาก ซึ่งการคำนวณด้วยวิธีการแบบเดิมจะยุ่งยาก และอาจก่อให้เกิดความผิดพลาดสูง หากแบ่งจำนวนชั้นไม่เพียงพอ การแก้ปัญหาแบบเดิมนี้อาจใช้ได้ดีกับรูปร่างที่ไม่มีความซับซ้อนมากนัก เพราะจำเป็นต้องแบ่งหน้าตัดของวงแหวนนี้ออกเป็นท่อนสั้น ๆ ที่มีความหนาคงที่โดยนำมาซ้อนต่อเนื่องกัน