โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ปริศนาสปินเอาท์
Spinout Puzzle

ชื่อนิสิต นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร 5933546023

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปริศนาสปินเอาท์

นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

หัวข้อโครงงาน	ปริศนาสปินเอาท์
โดย	นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

-- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

-- อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร)

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ

-- กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ)

ธีระเดช กิตติภัสสร

-- กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร: ปริศนาสปินเอาท์. (Spinout Puzzle) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร, 45 หน้า.

โครงงานนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์ที่มีจำนวนสปินเนอร์ n ตัวหรือปัญหา $SP(n)$ และเพื่อสร้างเกมใหม่ซึ่งได้นำปริศนาสปินเอาท์เป็นพื้นฐานโดยเรียกว่า $SP(i,n)$ สำหรับแต่ละ $i < n$ โดยจะมุ่งเน้นหาการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยที่ $i < n$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต..

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก..

ปีการศึกษา 2562

5933546023: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : Spinout puzzle

Witchayut Likhitrattanakon : Spinout puzzle .

ADVISOR : ASSOC. PROF. Chariya Uiyyasathian, Ph.D., 45 pp.

This project aims to study a solution of spinout puzzle with n spinners, $SP(n)$. We create a new puzzle, called $SP(i,n)$, originated from $SP(n)$, for each $i<n$. Furthermore, we give an upper bound for the number of steps in an optimal solution of $SP(i,n)$ where $i<n$.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature ....

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature ....

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง ปริศนาสปินเอาท์ จะไม่สำเร็จไปด้วยดีหากไม่ได้รับความอนุเคราะห์และช่วยเหลือจาก รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร ที่คอยช่วยเหลือและให้คำปรึกษาในเรื่องต่าง ๆ รวมทั้งสละเวลาคอยติดตาม และชี้แนะให้เห็นถึงปัญหาและความผิดพลาดในการทำโครงการมาโดยตลอด ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียรเป็นอย่างสูง อีกทั้งคณะกรรมการผู้คุมสอบอีกสองท่าน รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ และ อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร ที่ทำให้โครงงานนี้มีพัฒนาการที่ดีขึ้น สุดท้ายขอขอบพระคุณครอบครัวที่เป็นกำลังใจและคอยสนับสนุนอยู่เสมอมา

ผู้ดำเนินโครงการ
นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร

สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 หลักการและสัญลักษณ์

ปริศนาสปินเอาท์เป็นปริศนาที่ถูกคิดค้นโดยนายวิลเลียม เคสเตอร์ (*William Keister*) ในปี ค.ศ.1970 โดยมีปริศนาวงแหวนจีน (*Chinese ring puzzle*) เป็นแนวคิด ได้มีการนำมาทำของเล่นในปัจจุบัน แสดงได้ดังรูปที่ 1

รูปที่ 1 แสดงปริศนาสปินเอาท์

ที่มาของรูป *http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html*

ปริศนาสปินเอาท์ที่ถูกนำมาเล่นนั้นจะประกอบไปด้วย สปินเนอร์ ($spinner$) ทั้งหมด 7 ตัว บาร์สำหรับเคลื่อนที่ (bar) ที่มีสปินเนอร์ทั้ง 7 ถูกนำมาวางล็อคอยู่ด้านบนและกรอบใส่บาร์ ($frame$) สังเกตว่า กรอบใส่บาร์ในทางด้านขวานั้นจะแคบลง และจุดมุ่งหมายในการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์คือ ต้องการเลื่อนบาร์ออกจากกรอบใส่บาร์ แต่ในงานวิจัยนี้ได้มุ่งเน้นศึกษาปริศนาสปินเอาท์ที่มีจำนวนสปินเนอร์ n ตัว โดยที่ n เป็นจำนวนนับใด ๆ

<u>บทนิยาม 1</u>

กำหนดให้ $SP(n)$ แทน ปริศนาสปินเอาท์ที่มีจำนวนสปินเนอร์ n ตัว ที่มีกฎการเล่นขยายจากปริศนาสปินเอาท์ที่ถูกนำมาเล่นในปัจจุบัน ซึ่งก็คือปัญหา $SP(7)$ องค์ประกอบและกติกาในปัญหา $SP(n)$ จะได้กล่าวต่อไป

<u>ข้อตกลง</u>

ในรายงานฉบับนี้ทางผู้ดำเนินโครงการกำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ และแทนจำนวนสปินเนอร์ในปัญหา $SP(n)$ เสมอ

องค์ประกอบต่าง ๆ ในปริศนาสปินเอาท์มีดังต่อไปนี้

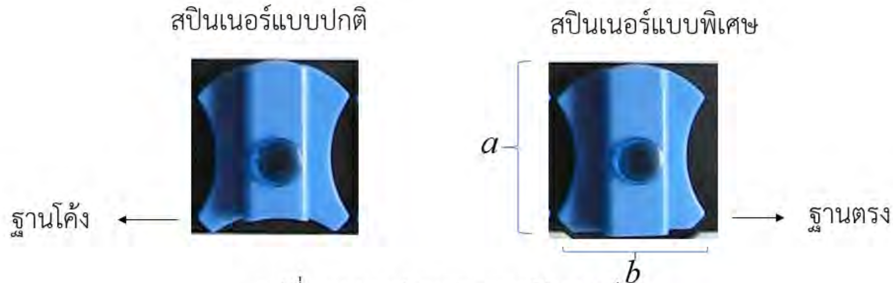
1 สปินเนอร์ ($spinner$)

สปินเนอร์ในปริศนาสปินเอาท์นั้นมี 2 แบบ ดังนี้

สปินเนอร์แบบปกติ จะมีฐานลักษณะโค้งเว้าเข้ามาด้านใน สปินเนอร์ทุกตัวนอกจากตัวขวาสุดเป็นสปินเนอร์แบบปกติ

สปินเนอร์แบบพิเศษ จะมีฐานตรง ซึ่งสปินเนอร์แบบพิเศษนั้นจะมีเพียงตัวเดียวคือ สปินเนอร์ที่วางในด้านขวาสุด โดยสปินเนอร์แต่ละแบบแสดงได้ดังรูปที่ 2

นอกจากนี้หากแทนค่าความสูงของสปินเนอร์ในแนวตั้งด้วย a และแทนค่าของความยาวฐานของสปินเนอร์ด้วย b จะได้ว่า $a > b$



รูปที่ 2 แสดงประเภทของสปินเนอร์
ที่มาของรูป *http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html*

2 บาร์สำหรับเคลื่อนที่ (bar)

บาร์สำหรับเคลื่อนที่นั้นเป็นบาร์ที่สปินเนอร์ถูกนำมาล็อคไว้ด้านบน มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า บาร์ของปริศนาสปินเอาท์ในปัจจุบันนั้น นำสปินเนอร์มาวางล็อคได้ 7 ตัว ส่วนบาร์ของ $SP(n)$ นั้นจะมีสปินเนอร์มาวางล็อคได้ n ตัว

3 กรอบใส่บาร์ ($frame$)

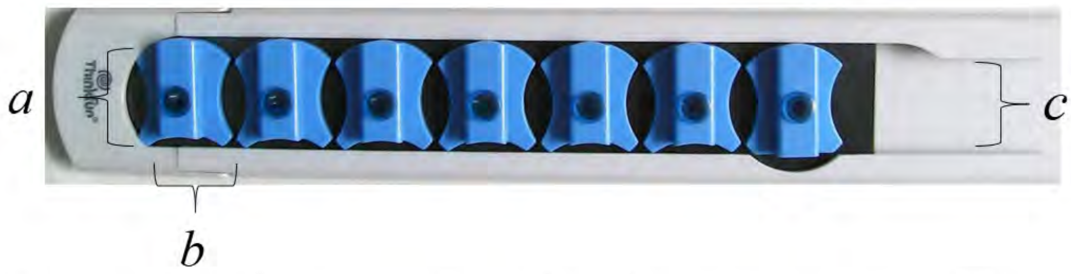
กรอบใส่บาร์ในปริศนาสปินเอาท์นั้นมีลักษณะเป็นกรอบดังรูปที่ 1 โดยจะบรรจุบาร์อยู่ภายใน ซึ่งสามารถเลื่อนบาร์ออกทางขวามือของกรอบใส่บาร์ได้ นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่าภายในกรอบใส่บาร์นั้นมีความยาวที่สามารถบรรจุสปินเนอร์ในแนวตั้งได้มากที่สุด 8 ตัว โดยปลายด้านขวาของกรอบใส่บาร์นั้นจะแคบลง แต่กว้างกว่าขนาดของสปินเนอร์ในแนวนอน ดังนั้นการจะเลื่อนบาร์ออกจากกรอบใส่บาร์ได้นั้น จำเป็นต้องหมุนสปินเนอร์ให้อยู่ในแนวนอนทั้งหมดก่อน โดยสรุปได้ดังนี้

ถ้าความสูงของสปินเนอร์ในแนวตั้ง $= a$

ความสูงของสปินเนอร์ในแนวนอน $= b$

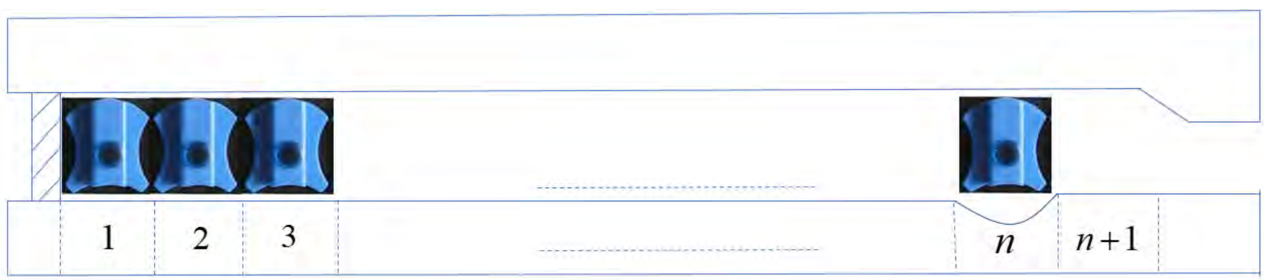
ขนาดช่องออกของกรอบใส่บาร์มีความกว้าง $= c$

จะได้ว่า $a > c > b$ โดยแสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบความสูงของสปินเนอร์ในแนวตั้ง แนวนอน และขนาดช่องออกได้ของกรอบใส่บาร์
ที่มาของรูป http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

พิจารณาปัญหา $SP(n)$ กำหนดตำแหน่งบนกรอบใส่บาร์ดังรูปที่ 4 โดยแทนแต่ละตำแหน่งด้วย $1,2,3,...,n,n+1$ จากซ้ายไปขวาตามลำดับ ดังนั้น ในปัญหา $SP(n)$ กรอบใส่บาร์บรรจุสปินเนอร์ได้มากที่สุด $n+1$ ตัว



รูปที่ 4 แสดงตำแหน่งของช่องบนกรอบใส่บาร์ในปริศนาสปินเอาท์ที่มีจำนวนสปินเนอร์ n ตัว
ที่มาของรูป http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

นอกจากนี้กรอบใส่บาร์มีตำแหน่งที่ถูกเจาะอยู่ด้านล่าง 1 ตำแหน่ง โดยเรียกตำแหน่งนั้นว่า ตำแหน่งหมุน $(pivot)$ และแทนตำแหน่งของช่องนั้นว่า $N-pivot$ ซึ่งตำแหน่ง $N-pivot$ นั้นเป็นตำแหน่งเดียวที่สปินเนอร์สามารถหมุนได้ แต่ด้วยรูปทรงทางกายภาพของสปินเนอร์ทำให้เกิดข้อจำกัดในการหมุนขึ้นซึ่งมีผลต่อการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์ โดยข้อจำกัดเหล่านี้ได้นำมาอธิบายในภายหลัง

<u>บทนิยาม 2</u>

พิจารณาปัญหา $SP(n)$ สำหรับ $i=1,2,3,...,n$ แทนสปินเนอร์ n ตัวด้วย a_i ตามลำดับจากซ้ายไปขวา

<u>สัญลักษณ์แทนสถานะของสปินเนอร์</u>

สปินเนอร์สามารถหมุนเปลี่ยนสถานะได้ 2 สถานะ คือ

สปินเนอร์ในแนวตั้ง แทนด้วยสัญลักษณ์ 1 หรือ $\uparrow$

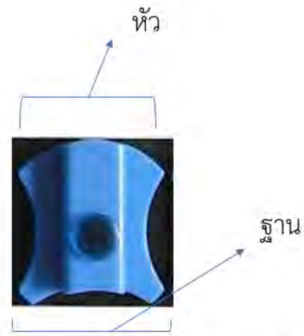
สปินเนอร์ในแนวนอน แทนด้วยสัญลักษณ์ 0 หรือ $\leftarrow$

กำหนดให้ $f(a_i)$ แทนสถานะของสปินเนอร์ a_i

ดังนั้น $f(a_i) \in \{0,1\}$

สปินเนอร์ในแนวตั้ง

เนื่องจากสปินเนอร์ในแนวตั้งนั้นไม่ว่าจะหันหัวไปทางด้านบนหรือหันหัวลงด้านล่างก็ไม่ส่งผลใด ๆ ต่อการหมุนของสปินเนอร์ในปริศนาสปินเอาท์ ดังนั้นโดยไม่เสียนัยทั่วไป **สปินเนอร์ในแนวตั้งหันหัวไปทางด้านบน** โดยแสดงได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 แสดงสถานะของสปินเนอร์ในแนวตั้ง

ที่มาของรูป *<u>http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html</u>*

สปินเนอร์ในแนวนอน

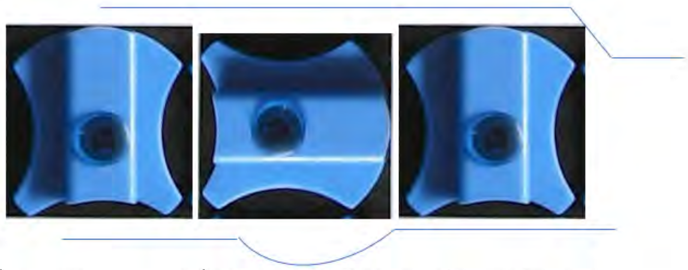
ในการแก้ปัญหา $SP(n)$ **สปินเนอร์ในแนวนอนจะหันหัวไปทางด้านซ้ายเสมอ** เนื่องจากสามเหตุผล

1. เนื่องจากเหตุผลด้านรูปทรงของสปินเนอร์ตัวขวาสุด (สปินเนอร์แบบพิเศษ)

ถ้าสปินเนอร์ตัวขวาสุดหันหัวไปทางด้านขวา แล้วจะไม่มีสปินเนอร์ตัวใดสามารถหมุนต่อได้

2. เนื่องจากรูปทรงทางกายภาพของสปินเนอร์ ทำให้สปินเนอร์ไม่สามารถหันหัวชนกันได้

3. ในปัญหา $SP(n)$ สปินเนอร์ a_m จะหมุนได้เมื่อ สปินเนอร์ a_{m+1} เป็นแนวตั้ง และสปินเนอร์ $a_{m+2}, a_{m+3}, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอนหันหัวไปทางซ้ายเท่านั้น ถ้าสปินเนอร์ a_m หันหัวไปทางด้านขวา แล้วการเปลี่ยนให้สปินเนอร์ $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอนทั้งหมดจะไม่สามารถทำได้ นอกเสียจากเปลี่ยนให้สปินเนอร์ a_m เป็นแนวนอนหันหัวไปทางซ้าย ดังนั้นจึงไม่มีความจำเป็นในการหมุนสปินเนอร์ a_m ให้หันหัวไปทางขวา โดยเหตุการณ์เมื่อสปินเนอร์ a_m หันหัวไปทางด้านขวาแสดงได้ดังรูปที่ 6



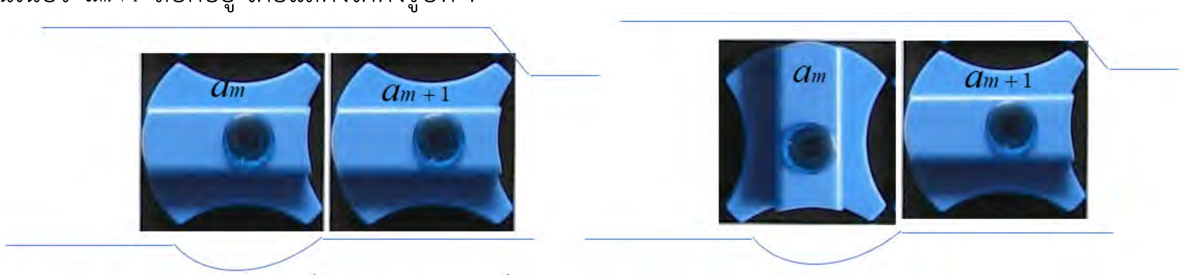
รูปที่ 6 แสดงเหตุการณ์เมื่อสปินเนอร์ตัวใด ๆ หมุนไปทางด้านขวา
ที่มาของรูป http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

จากเหตุผลข้างต้น สรุปได้ดังนี้
เมื่อกล่าวถึงสปินเนอร์ในแนวตั้ง จะหันหัวไปทางด้านบน
เมื่อกล่าวถึงสปินเนอร์ในแนวนอน จะหันหัวไปทางด้านซ้าย

<u>ข้อจำกัดในการหมุนสปินเนอร์</u>

ให้ m เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $m<n$ ในการแก้ปัญหา $SP(n)$ เมื่อสปินเนอร์ a_m เลื่อนมาอยู่บนตำแหน่ง $N-pivot$ จะได้ว่า

สปินเนอร์ a_m จะไม่สามารถหมุนได้ถ้าสปินเนอร์ a_{m+1} อยู่ในแนวนอน เนื่องจากสปินเนอร์ a_m ถูกสปินเนอร์ a_{m+1} ล็อคอยู่ โดยแสดงได้ดังรูปที่ 7

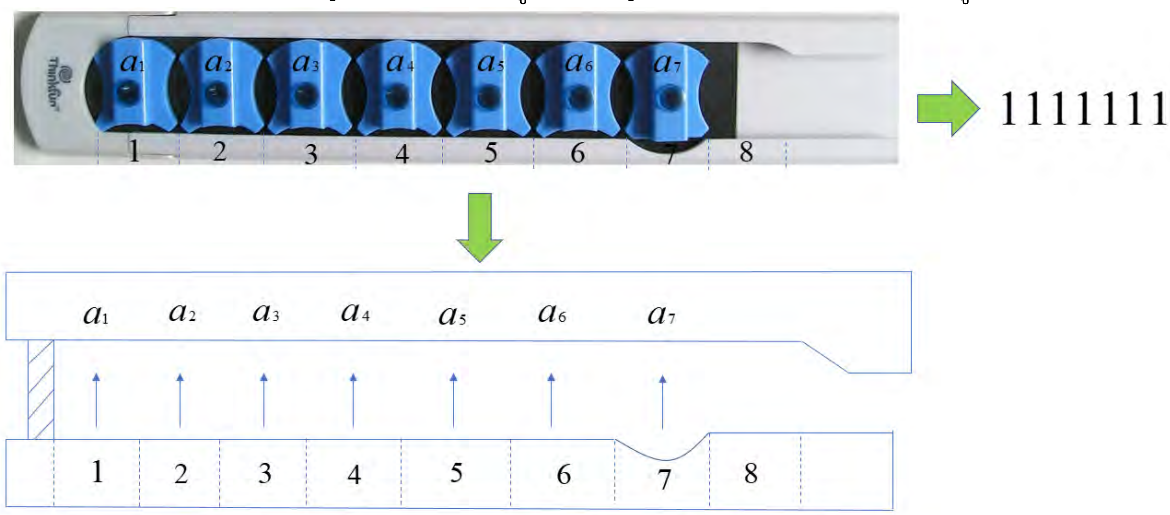


รูปที่ 7 แสดงเหตุการณ์เมื่อสปินเนอร์a_mไม่สามารถหมุนได้บนตำแหน่ง $N-pivot$
ที่มาของรูป http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

<u>บทนิยาม 3</u>

พิจารณาปัญหา $SP(n)$
สถานะของชุดสปินเนอร์ทั้ง n ตัว แทนด้วยด้วยสัญลักษณ์ $f(a_1)f(a_2)f(a_3)...f(a_n)$
โดย $f(a_i)\in\{0,1\}$, $i=1,2,3,...,n$

ตัวอย่างของการแปลงปัญหา $SP(7)$ เป็นรูปแบบสัญลักษณ์ทั้ง 2 แบบ แสดงได้ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 แสดงตัวอย่างการแปลงปริศนาสปินเอาท์เป็นรูปแบบสัญลักษณ์
ที่มาของรูป http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

ความรู้ที่มีในปัจจุบัน

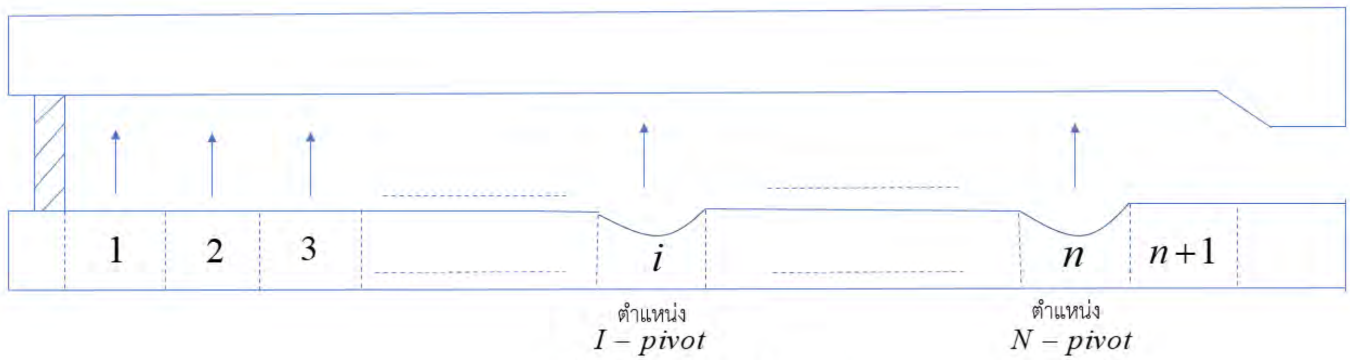
ในการแก้ปัญหา $SP(n)$ เราทราบว่าจำนวนครั้งน้อยที่สุดที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์คือ $\left\lceil \frac{2}{3}(2^n-1) \right\rceil$ ครั้ง ซึ่งอ้างจาก [1]

1.2 ปัญหา $SP(i,n)$

ปริศนาสปินเอาท์ที่กล่าวมาข้างต้น นั้นเป็นปริศนาที่ถูกคิดค้นมาเป็นเวลาเนิ่นนาน และมีวิธีการแก้ปริศนาสปินเอาท์ที่ถูกออกแบบมานั้นมีวิธีการแก้ปัญหาที่สมบูรณ์อยู่ก่อนแล้ว ผู้ดำเนินโครงการจึงมีแนวคิดในการออกแบบเพิ่มเติมเพื่อเพิ่มความท้าทายในการแก้ปริศนาสปินเอาท์ให้มากขึ้น โดยการเพิ่มตำแหน่งช่องหมุนอีกหนึ่งตำแหน่ง อย่างไรก็ตามยังต้องคงตำแหน่งเดิมไว้ เนื่องจาก สปินเนอร์ a_n สามารถเลื่อนได้ 2 ตำแหน่งบนกรอบใส่บาร์ นั่นคือ ตำแหน่ง n และตำแหน่ง $n+1$ ถ้าไม่มีตำแหน่ง $N-pivot$ แล้ว ต้องมีตำแหน่ง $n+1$ เป็นตำแหน่ง $pivot$ และจะได้ตามมาว่าต้องมีตำแหน่ง $n-1$ เป็นตำแหน่ง $pivot$ ด้วยเพียงกรณีเดียวเท่านั้น จึงจะสามารถแก้ปัญหา $SP(n)$ ได้ ดังนั้นในโครงงานนี้จึงศึกษาในกรณีที่ยังคงตำแหน่ง $N-pivot$ ไว้และเพิ่มตำแหน่งช่องหมุนอีก 1 ตำแหน่งซึ่งไม่ใช่ตำแหน่ง $n+1$

บทนิยาม 4

ให้ i เป็นจำนวนนับใด ๆ และ $i<n$
กำหนดให้ $SP(i,n)$ แทนปริศนาสปินเอาท์ที่ออกแบบใหม่ที่มีจำนวนสปินเนอร์ n ตัวและมีตำแหน่งของช่องหมุน 2 ตำแหน่ง ดังนี้ ตำแหน่ง n และตำแหน่ง i แทนตำแหน่งเหล่านี้ว่า $N-pivot$ และ $I-pivot$ ตามลำดับ โดยปริศนาสปินเอาท์ที่ถูกออกแบบใหม่แสดงได้ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9 แสดงปัญหา $SP(i,n)$

โดยในงานวิจัยนี้ ผู้ดำเนินโครงการมีเป้าหมายในการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์ที่ออกแบบใหม่ โดยพยายามหาวิธีการที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ นอกจากนี้ จะเห็นว่าผลเฉลยของ $SP(n)$ จะเป็นผลเฉลยของ $SP(i,n)$ เสมอ

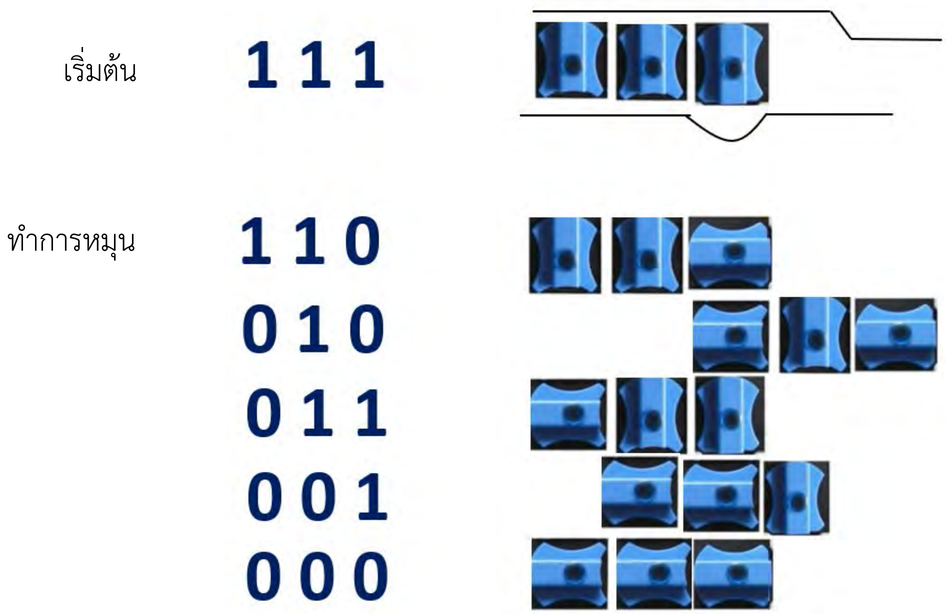
บทที่ 2

ปัญหา $SP(n)$

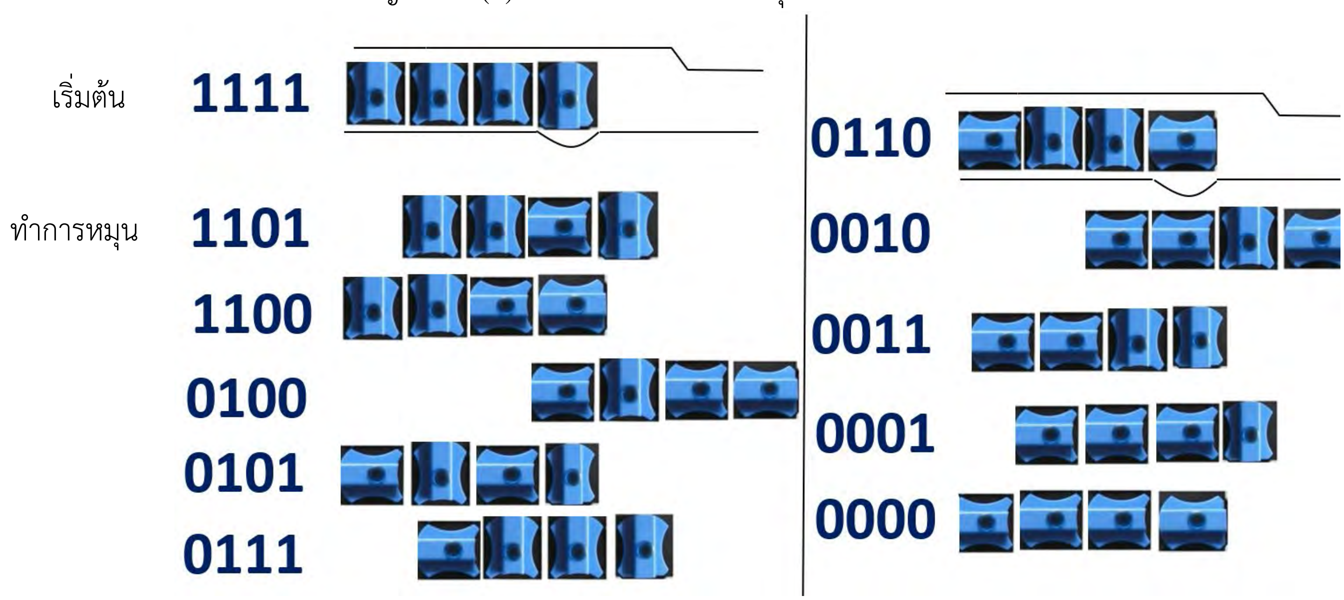
ในบทนี้ ผู้ดำเนินโครงการจะแสดงถึงรายละเอียดการแก้ปัญหา $SP(n)$ เพื่อนำความรู้ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ในบทที่ 3

โดยเริ่มต้น ยกตัวอย่างการแก้ปัญหา $SP(3)$ และ $SP(4)$

ตัวอย่างที่ 1 การแก้ปัญหา $SP(3)$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนสปินเนอร์ 5 ครั้ง ดังต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 2 การแก้ปัญหา $SP(4)$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนสปินเนอร์ 10 ครั้ง ดังต่อไปนี้



<u>**ข้อสังเกต 1**</u>

ปริศนาสปินเอาท์ สามารถรีเวิร์สขั้นตอนการหมุนสปินเนอร์กลับได้เสมอ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาปัญหา $SP(3)$

เริ่มต้น 111

ทำการหมุน 110

010

011

001

000

ต่อมาทำการรีเวิร์สวิธีการหมุนสปินเนอร์

เริ่มต้น 000

ทำการหมุน 001

011

010

110

111

จากข้อจำกัดของการหมุนในบทที่ 1 จะได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้

<u>**ข้อสังเกต 2**</u> **เงื่อนไขจำเป็นในการหมุนสปินเนอร์ บนตำแหน่ง** $N-pivot$

กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $k<n$ ในปัญหา $SP(n)$

สปินเนอร์ a_k จะหมุนได้บนตำแหน่ง $N-pivot$ ถ้าสปินเนอร์ $a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_n$ มีสถานะแนวนอน และสปินเนอร์ a_{k+1} มีสถานะแนวตั้ง โดยแสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้

$$f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_{k-1})\underline{f(a_k)}1\underbrace{00\ldots00}_{n-k-1}$$

$N-pivot$

<u>**ข้อสังเกต 3**</u>

กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $y<x\le n$ ในปัญหา $SP(n)$

โดยข้อสังเกตที่ 2 เห็นได้ว่า สถานะของสปินเนอร์ a_y ไม่ส่งผลต่อการหมุนสปินเนอร์ a_x

ดังนั้นในปัญหา $SP(n)$ จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์จาก $\underbrace{**\ast\ldots*}_{n-k}\underbrace{111\ldots1}_{k}$ เป็น $\underbrace{**\ast\ldots*}_{n-k}\underbrace{000\ldots0}_{k}$ เท่ากับ จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์จาก $\underbrace{111\ldots1}_{k}$ เป็น $\underbrace{000\ldots0}_{k}$ ในปัญหา $SP(k)$

<u>บทนิยาม 5</u>

พิจารณาปัญหา $SP(n)$

ให้ $F(n)$ แทนจำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดในการแก้ปัญหา $SP(n)$ สังเกตว่า ในการแก้ปัญหา $SP(n)$ นั้น สามารถมีได้หลายผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยที่ดีที่สุด ($optimal\ solution$) คือ ผลเฉลยที่ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด

ให้ $\Re(n)$ แทนเซตของ ผลเฉลยที่ดีที่สุด ในปัญหา $SP(n)$

ให้ $A(n) \in \Re(n)$ จะเขียนแทนขั้นตอนใน $A(n)$ ด้วยเซตที่มีลำดับ $A(n) = \{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{F(n)}\}$

และ $A_i = f(a_1)f(a_2)f(a_3)\ldots f(a_n)\ , i = 0,1,2,\ldots,F(n)$

สังเกตได้ว่า $A_0 = \underbrace{111\ldots11}_{n}$ และ $A_{F(n)} = \underbrace{000\ldots00}_{n}$

จากบทความ *"A Recurrence Relation in the Spinout Puzzle"* [1] โดย *Robert L. Lamphere* เขียนในปี ค.ศ.1996 ได้หาค่า $F(n)$ ดังทฤษฎีบทที่ 1

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u>

พิจารณาปัญหา $SP(n)$ จะได้ว่า $F(n) = F(n-1) + 2F(n-2) + 1$ และ $F(n) = \left\lceil \frac{2}{3}(2^n - 1) \right\rceil$

ในที่นี้ จะกล่าวถึงแนวทางในการพิสูจน์ สำหรับบทพิสูจน์สามารถอ่านได้ใน [1]

เริ่มจากจะแสดงว่า $F(n) = F(n-1) + 2F(n-2) + 1$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ สามารถหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์เป็น 4 ขั้นตอนใหญ่ ๆ ดังแผนภาพ

$$\underbrace{1111\ldots111}_{n}$$

$$\downarrow \quad \text{ขั้นตอนที่ } 1$$

$$\underbrace{11}_{2}\underbrace{000\ldots00}_{n-2}$$

$$\downarrow \quad \text{ขั้นตอนที่ } 2$$

$$\underbrace{01\underbrace{000\ldots00}_{n-2}}_{n}$$

$$\downarrow \quad \text{ขั้นตอนที่ } 3$$

$$0\underbrace{111\ldots.11}_{n-1}$$

$$\downarrow \quad \text{ขั้นตอนที่ } 4$$

$$\underbrace{000\ldots00}_{n}$$

แต่ละขั้นตอนใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ดังนี้
ขั้นตอนที่ 1. หมุนสปินเนอร์ $a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอน ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n-2)$ ครั้ง
ขั้นตอนที่ 2. หมุนสปินเนอร์ a_1 เป็นแนวนอน ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ 1 ครั้ง
ขั้นตอนที่ 3. หมุนสปินเนอร์ $a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นแนวตั้ง ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n-2)$ ครั้ง
ขั้นตอนที่ 4. หมุนสปินเนอร์ $a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอน โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n-1)$ ครั้ง

ดังนั้นจำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดในการแก้ปัญหาปริศนา $SP(n)$ คือ $F(n-1)+2F(n-2)+1=F(n)$

นอกจากนั้น จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า $F(0)=0$ และ $F(1)=1$
และเมื่อพิจารณาปริศนาสปินเอาท์ที่มีจำนวนสปินเนอร์ 2 ตัว
ในการแก้ปริศนาสปินเอาท์นั้น ทำการหมุนสปินเนอร์ a_1 เป็นแนวนอนก่อน ต่อมาทำการหมุน a_2 เป็นแนวนอนตาม จะได้ว่า $F(2)=2$

ต่อมาพิจารณา

$$F(n)=F(n-1)+2F(n-2)+1$$
$$F(n)+F(n-1)+1=2(F(n-1)+F(n-2)+1)$$

ทำการวนซ้ำจะได้

$$F(n)+F(n-1)+1=2^n$$
$$F(n)+F(n-1)=2^n-1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

แทนค่า $2k$ ลงในสมการ $F(n)=F(n-1)+2F(n-2)+1$ ได้เป็น

$$F(2k)=F(2k-1)+2F(2k-2)+1$$
$$F(2k)-F(2k-2)=F(2k-1)+F(2k-2)+1$$

จากสมการ (1)

$$F(2k)-F(2k-2)=2^{2k-1}-1+1=2^{2k-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

พิจารณา

$$F(2k)-F(0)=(F(2k)-F(2k-2))+(F(2k-2)-F(2\mathrm{k}-4))+\ldots+(F(2)-F(0))$$

จากสมการ (2)

$$F(2k)-F(0)=2^{2k-1}+2^{2k-3}+\ldots+2^3+2^1$$
$$F(2k)-F(0)=2(4^{k-1}+4^{k-2}+\ldots+4^1+4^0)$$

ดังนั้น

$$F(2k)-F(0)=\frac{2}{3}(4^k-1)$$

เนื่องจาก $F(0)=0$ ดังนั้น

$$F(2k)=\frac{2}{3}(4^k-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

แทนค่า n ด้วย $2k$ ในสมการ (1) จะได้ว่า $F(2k)+F(2k-1)=2^{2k}-1$ หรือ
$F(2k-1)=2^{2k}-F(2k)-1$

แทนค่า $F(2k)=\frac{2}{3}(4^k-1)$ ดังนั้น

$$F(2k-1)=4^k-\frac{2}{3}(4^k-1)-1$$

$$F(2k-1)=\frac{1}{3}(4^k-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

เนื่องจาก $4^k=2^n$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (3) และสมการ (4) ใหม่เป็น

$F(n)=\frac{2}{3}(2^n-1)$ สำหรับ n เป็นจำนวนคู่

$F(n)=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$ สำหรับ n เป็นจำนวนคี่

พิจารณา $\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)=\frac{2}{3}2^n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(2^n-1)+\frac{1}{3}$

ดังนั้น $F(n)=\left\lceil\frac{2}{3}(2^n-1)\right\rceil$

$\square$

บทแทรกที่ 1

พิจารณาปัญหา $SP(n)$

(i) ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้วมี $A(n)\in\Re(n)$ ที่ $\underbrace{111...1}_{n-k}\underbrace{00...00}_{k}\in A(n)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

(ii) ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้วมี $A(n)\in\Re(n)$ ที่ $\underbrace{111...1}_{n-k}\underbrace{00...00}_{k}\in A(n)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ S_i แทนสถานะของชุดสปินเนอร์ $\underbrace{111...1}_{n-i}\underbrace{00...00}_{i}$ ในปัญหา $SP(n)$

(i) สมมติ n เป็นจำนวนคี่

ให้ $A(n)$ แทนขั้นตอนการแก้ปัญหา $SP(n)$ ดังต่อไปนี้

$$\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}\rightarrow\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}\rightarrow\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}00000}_{n}\rightarrow\ldots\rightarrow\underbrace{00...00}_{n}$$

ขั้นตอนที่ 1 $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}\rightarrow\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}$

พิจารณา การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}010}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ 1 ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}010}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}011}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(1)$ ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}011}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(2)$ ครั้ง

ดังนั้นการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(2)+F(1)+1$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n} \rightarrow \underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}00000}_{n}$

พิจารณา การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}01000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}01000}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}01111}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(3)$ ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}01111}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}00000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(4)$ ครั้ง

ดังนั้นการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-5}00000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(3)+F(4)+1$ ครั้ง

ดังนั้นสามารถสรุปได้ดังนี้

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...1}_{n-i}\underbrace{000..0}_{i}$ เป็น $\underbrace{111...1}_{n-i-2}\underbrace{000..0}_{i+2}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(i)+F(i+1)+1$ ครั้ง สำหรับ $i=1,3,5,...,n-2$

พิจารณาจำนวนขั้นตอนในการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ มีทั้งสิ้น $\frac{n-1}{2}$ ขั้นตอน

ดังนั้น การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด

$F(1)+F(2)+...+F(n-2)+F(n-1)+(\frac{n-1}{2})$ ครั้ง

เนื่องจาก การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

ดังนั้น การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด

$F(1)+F(2)+...+F(n-2)+F(n-1)+(\frac{n+1}{2})$ ครั้ง

จะแสดงข้อความดังต่อไปนี้ $F(n)=F(n-1)+F(n-2)+...+F(3)+F(2)+F(1)+(\frac{n+1}{2})$

จาก ทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ว่า $F(n)=F(n-1)+2F(n-2)+1$

$$F(n)=[F(n-1)+F(n-2)+1]+F(n-3)+2F(n-4)+1$$
$$F(n)=[F(n-1)+F(n-2)+...+F(n-4)+2]+F(n-5)+2F(n-6)+1$$
$$F(n)=[F(n-1)+F(n-2)+...+F(n-6)+3]+F(n-7)+2F(n-8)+1$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $n-3$ เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $F(n)=[F(n-1)+F(n-2)+...+F(n-(n-3))+(\frac{n-3}{2})]+F(2)+2F(1)+1$

เนื่องจาก $F(1)=1$ ดังนั้น $F(n)=F(n-1)+F(n-2)+...+F(3)+F(2)+F(1)+(\frac{n+1}{2})$

ดังนั้นถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว มี $A(n)\in\Re(n)$ ที่ $\underbrace{111...1}_{n-k}\underbrace{00...00}_{k}\in A(n)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

$\square$

(ii) สมมติ n เป็นจำนวนคู่

ให้ $A(n)$ แทนขั้นตอนการแก้ปัญหา $SP(n)$ ดังต่อไปนี้

$$\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}01}_{n}\rightarrow\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0000}_{n}\rightarrow\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}00000}_{n}\rightarrow\dots\rightarrow\underbrace{00...00}_{n}$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}01}_{n}\rightarrow\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0000}_{n}$

พิจารณาการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}01}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}00}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}00}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0100}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0100}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0111}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(2)$ ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0111}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(3)$ ครั้ง

ดังนั้นการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-1}0}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-3}000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(3)+F(2)+2$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0000}_{n} \rightarrow \underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}000000}_{n}$

พิจารณา การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0000}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}010000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}010000}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}01111}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(4)$ ครั้ง

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}011111}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}000000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(5)$ ครั้ง

ดังนั้นการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-4}0000}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-6}000000}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(5)+F(4)+1$ ครั้ง

ดังนั้นสามารถสรุปได้ดังนี้

การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...1}_{n-i}\underbrace{000..0}_{i}$ เป็น $\underbrace{111...1}_{n-i-2}\underbrace{000..0}_{i+2}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(i)+F(i+1)+1$ ครั้ง สำหรับ $i=2,4,6,...,n-2$

พิจารณาจำนวนขั้นตอนในการเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}01}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ มีทั้งสิ้น $\frac{n-2}{2}$ ขั้นตอน

ดังนั้น การเปลี่ยนจาก $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}01}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด

$F(2)+F(3)+...+F(n-2)+F(n-1)+\frac{n}{2}$ ครั้ง

เนื่องจาก การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{\underbrace{111...1}_{n-2}01}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

ดังนั้น การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด

$F(2)+F(3)+...+F(n-2)+F(n-1)+\frac{n+3}{2}$ ครั้ง

เนื่องจาก $F(1)=1$ ดังนั้น การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{00...00}_{n}$ ใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์

ทั้งหมด $F(1)+F(2)+F(3)+...+F(n-2)+F(n-1)+\frac{n}{2}$ ครั้ง

จะแสดงข้อความดังต่อไปนี้ $F(n)=F(n-1)+F(n-2)+...+F(3)+F(2)+F(1)+\frac{n}{2}$

จาก ทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ว่า $F(n)=F(n-1)+2F(n-2)+1$

$$F(n)=[F(n-1)+F(n-2)+F(n-3)+1]+2F(n-4)+1$$

$$F(n)=[F(n-1)+F(n-2)+...+F(n-5)+2]+2F(n-6)+1$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $n-3$ เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $F(n)=(F(n-1)+F(n-2)+...+F(n-(n-3))+(\frac{n-4}{2}))+2F(2)+1$

เนื่องจาก $F(1)=1$ และ $F(2)=2$ ดังนั้น $F(n)=F(n-1)+F(n-2)+...+F(3)+F(2)+F(1)+\frac{n}{2}$

ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้วมี $A(n)\in\Re(n)$ ที่ $\underbrace{111...1}_{n-k}\underbrace{00...00}_{k}\in A(n)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่ $\square$

บทที่ 3

ปัญหา $SP(i,n)$

ในบทนี้ ผู้ดำเนินโครงการให้ความสนใจในการหาผลเฉลยที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ และผู้ดำเนินโครงการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยแบ่งเป็น 4 กรณี ได้แก่

กรณี 1 $i \le \frac{n+1}{2}$

กรณี 2 n เป็นจำนวนคู่และ $i = \frac{n+2}{2}$

กรณี 3 n เป็นจำนวนคี่และ $i = \frac{n+3}{2}$

กรณี 4 $i \ge \frac{n+4}{2}$

<u>ข้อตกลง</u>

ในบทที่ 3 จะกำหนดให้ n และ i เป็นจำนวนนับที่ $i < n$ เสมอ

3.1 การเปลี่ยนสถานะของชุดสปินเนอร์ในปัญหา $SP(n)$

ในหัวข้อย่อย 3.1 จะศึกษาจำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ในปัญหา $SP(n)$ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u>

กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $k \le n$ โดย $S = \underbrace{111...1}_{n-k}\underbrace{000...0}_{k}$

พิจารณาปัญหา $SP(n)$

(i) สามารถหมุนเปลี่ยนสถานะของชุดสปินเนอร์จาก S เป็น $\underbrace{000...0}_{n}$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ $F(n)+F(k)$ ครั้ง

(ii) ยิ่งกว่านั้น ถ้ามี $A(n) \in \Re(n)$ ที่ $S \in A(n)$ แล้ว จะใช้จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ $F(n)-F(k)$ ครั้งในการเปลี่ยน S เป็น $\underbrace{000...0}_{n}$

<u>พิสูจน์</u> พิจารณาปัญหา $SP(n)$

(i) จากข้อสังเกต 1 และข้อสังเกต 3 การเปลี่ยนจาก S เป็น $\underbrace{111...11}_{n}$ จะใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(k)$ ครั้ง นอกจากนี้ การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{000...00}_{n}$ จะใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n)$ ครั้ง

ดังนั้นสามารถ หมุนเปลี่ยนสถานะของชุดสปินเนอร์จาก S เป็น $\underbrace{000...0}_{n}$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ $F(n)+F(k)$ ครั้ง

(ii) สมมติ มี $A(n)\in\Re(n)$ ที่ $S\in A(n)$ ดังนั้นจะมีวิธีการเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...11}_{n}$ เป็น $\underbrace{000...00}_{n}$ โดยผ่าน S

ซึ่งจะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...1}_{n}$ เป็น $\underbrace{000...00}_{n}$ จะใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n)$ ครั้ง

และจากข้อสังเกต 3 การเปลี่ยนจาก $\underbrace{111...1}_{n}$ เป็น S ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(k)$ ครั้ง

ดังนั้น การเปลี่ยนจาก S เป็น $\underbrace{000...00}_{n}$ จึงใช้จำนวนครั้งน้อยที่สุดในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ $F(n)-F(k)$ ครั้ง

□

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u>

พิจารณาปัญหา $SP(n)$ ที่มี $A(n)=\{A_0, A_1, A_2, ..., A_{F(n)}\}\in\Re(n)$ $\underbrace{1100...00}_{n}$ และ $\underbrace{010...00}_{n}$ จะอยู่ในทุกผลเฉลยของการแก้ปัญหา $SP(n)$

ดังนั้น $\underbrace{1100...00}_{n}\in A(n)$ และ $\underbrace{010...00}_{n}\in A(n)$

<u>พิสูจน์</u> ขณะที่ a_1 เปลี่ยนจากแนวตั้งเป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $N-pivot$

จากข้อสังเกต 2 จึงสรุปได้ว่า $\underbrace{1100...00}_{n}$ และ $\underbrace{010...00}_{n}\in A(n)$ อยู่ในทุกผลเฉลยของการแก้ปัญหา $SP(n)$

ดังนั้น $\underbrace{1100...00}_{n}\in A(n)$ และ $\underbrace{010...00}_{n}\in A(n)$

□

<u>บทแทรกที่ 2</u>

พิจารณาปัญหา $SP(n)$ ที่สถานะของชุดสปินเนอร์เป็น $\underbrace{000...00}_{n}$
จะได้ว่าใช้จำนวนในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n)-F(n-2)$ ครั้ง เพื่อเปลี่ยนให้สปินเนอร์ a_1 เป็นแนวตั้ง

<u>พิสูจน์</u> พิจารณาปัญหา $SP(n)$ ที่สถานะของชุดสปินเนอร์เป็น $\underbrace{000...00}_{n}$
จากข้อสังเกต 2 รูปแบบของชุดสปินเนอร์ก่อนจะหมุนสปินเนอร์ a_1 คือ $01\underbrace{000...00}_{n-2}$
เนื่องจาก ทฤษฎีบทที่ 3 ทราบว่า $01\underbrace{000...00}_{n-2}$ และ $11\underbrace{000...000}_{n-2} \in A(n)$
ดังนั้นโดย ข้อสังเกต 1 และ ทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า การเปลี่ยนจาก $\underbrace{000...00}_{n}$ เป็น $11\underbrace{000...00}_{n-2}$ ใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n)-F(n-2)$ ครั้ง $\square$

พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$ จะเห็นได้ว่ามีสปินเนอร์บางตัวสามารถหมุนได้ทั้งบนตำแหน่ง $I-pivot$ และ ตำแหน่ง $N-pivot$ ดังนั้นเราจึงทำการพิจารณาสปินเนอร์เหล่านั้นว่าหมุนบนตำแหน่งใด จะใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยกว่า

<u>ทฤษฎีบทที่ 4</u>

กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $k \le i < n$
พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$ โดยในตอนเริ่มต้น สปินเนอร์ทุกตัวอยู่ในแนวตั้ง
การหมุนสปินเนอร์ a_k บนตำแหน่ง $I-pivot$ จะใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยกว่าการหมุนสปินเนอร์ a_k บนตำแหน่ง $N-pivot$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $k \le i < n$
พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$
เนื่องจาก $k \le i$ สามารถเลือกหมุนสปินเนอร์ a_k ได้ 2 ตำแหน่ง นั่นคือ ตำแหน่ง $I-pivot$ หรือตำแหน่ง $N-pivot$

<u>กรณีหมุนสปินเนอร์ a_k บนตำแหน่ง $N-pivot$</u>
โดยข้อสังเกต 2 สปินเนอร์ a_k หมุนได้บนตำแหน่ง $N-pivot$ ถ้า สปินเนอร์ $a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_n$ มีสถานะแนวนอน
ดังนั้น ในกรณีหมุนสปินเนอร์ a_k ในตำแหน่ง $N-pivot$ ต้องเปลี่ยนสปินเนอร์เป็นแนวนอนทั้งหมด $n-k-1$ ตัว

กรณีหมุนสปินเนอร์ a_k บนตำแหน่ง $I-pivot$

จะเห็นได้ว่าถ้าสปินเนอร์ a_k อยู่บนตำแหน่งตำแหน่ง $I-pivot$ แล้วสปินเนอร์ $a_{n-i+k+1}$ จะอยู่บนตำแหน่ง $n+1$ ดังนั้นสปินเนอร์ $a_{n-i+k+1}, a_{n-i+k+1}, \ldots, a_n$ ต้องอยู่ด้านนอกของกรอบใส่บาร์

ดังนั้นในกรณีหมุนสปินเนอร์ a_k ในตำแหน่ง $I-pivot$ ต้องเปลี่ยนสปินเนอร์เป็นแนวนอนทั้งหมด $i-k-1$ ตัว

เนื่องจาก $n>i$ ดังนั้น $i-k-1<n-k-1$

ดังนั้น การหมุนสปินเนอร์ a_k บนตำแหน่ง $I-pivot$ จะใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยกว่าหมุนสปินเนอร์ a_k บนตำแหน่ง $N-pivot$

□

3.2 การแก้ปัญหา $SP(i,n)$

จะเห็นว่าสามารถแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้ผลเฉลยของปัญหา $SP(n)$ ซึ่งใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ $F(n)$ ครั้ง ดังนั้น ผู้ดำเนินโครงการทำการศึกษาการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์น้อยกว่า $F(n)$ ครั้ง

พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$

จากทฤษฎีบทที่ 4 เห็นได้ว่าสปินเนอร์ a_1 จะหมุนโดยใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดเมื่อนำมาหมุนบนตำแหน่ง $I-pivot$

เนื่องจาก จุดมุ่งหมายของปัญหา $SP(i,n)$ เหมือนกับ $SP(n)$ คือ การเปลี่ยนให้สปินเนอร์ทุกตัวเป็นแนวนอน ดังนั้น ขั้นตอนในการหมุนสปินเนอร์ a_1 อยู่ในทุกผลเฉลยของปัญหา $SP(i,n)$

เนื่องจาก $1\le i$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4 จึงเห็นได้ว่าการหมุนสปินเนอร์ a_1 บนตำแหน่ง $I-pivot$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยกว่านำ a_1 มาหมุนบนตำแหน่ง $N-pivot$

พิจารณาการนำสปินเนอร์ a_1 หมุนบนตำแหน่ง $I-pivot$

เราต้องทำให้สปินเนอร์ $i-2$ ตัวท้าย ซึ่งคือ สปินเนอร์ $a_{n-i+3}, a_{n-i+4}, \ldots, a_n$ อยู่ในแนวนอน

ผู้ดำเนินโครงการทำการศึกษาแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ตามตำแหน่งของสปินเนอร์ a_{n-i+3} บนกรอบใส่บาร์โดยแบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 1</u> $i \le \frac{n+1}{2}$

<u>กรณี 2</u> n เป็นจำนวนคู่และ $i = \frac{n+2}{2}$

<u>กรณี 3</u> n เป็นจำนวนคี่และ $i = \frac{n+3}{2}$

<u>กรณี 4</u> $i \ge \frac{n+4}{2}$

<u>กรณี 1</u> $i \le \frac{n+1}{2}$

จะแบ่งการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ออกเป็น 3 ขั้นตอนดังนี้

$$\underbrace{111...11}_{n} \to \underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \to \underbrace{00...00}_{i}\underbrace{111...11}_{n-2i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \to \underbrace{000...00}_{n}$$

ขั้นตอนที่ 1 **ขั้นตอนที่ 2** **ขั้นตอนที่ 3**

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> $\underbrace{111...11}_{n} \to \underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2}$

- จาก $i \le \frac{n+1}{2}$ ดังนั้น $i+2 \le n+3-i$

หมุนสปินเนอร์ $a_{n-i+3}, a_{n-i+4}, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $N-pivot$

- จากข้อสังเกต 3 จำนวนครั้งที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดจึงเท่ากับ $F(i-2)$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> $\underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \to \underbrace{00...00}_{i}\underbrace{111...11}_{n-2i+2}\underbrace{00...00}_{i-2}$

- หมุนสปินเนอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_i$ บนตำแหน่ง $I-pivot$ ตามลำดับ โดยเริ่มหมุนจากสปินเนอร์ a_1
- ใช้จำนวนครั้งที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์เท่ากับ i ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> $\underbrace{00...00}_{i}\underbrace{111...11}_{n-2i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n}$

- หมุนสปินเนอร์ $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{n-i+2}$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $N-pivot$
- จากข้อสังเกต 3 จะได้ว่า สปินเนอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_i$ ไม่มีผลต่อการหมุนสปินเนอร์ $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{n-i+2}$ ดังนั้น จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่ทำให้ $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{n-i+2}$ เป็นแนวนอนทั้งหมด เท่ากับ การหมุนเปลี่ยนสถานะจาก $\underbrace{111...1}_{n-2i+2}\underbrace{000...0}_{i-2}$ เป็น $\underbrace{000...0}_{n-i}$
- ในกรณีที่ n เป็นจำนวนคู่จะให้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่ต่างจาก n เป็นจำนวนคี่ โดยแสดงรายละเอียดดังต่อไปนี้

กรณี n เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น มีจำนวนนับ v ที่ทำให้ $n = 2(v+1)$ จะได้ว่า $(n-i)+(i-2) = 2v$

ดังนั้น จำนวนสปินเนอร์ตั้งแต่ a_{i+1} ถึง a_n มีภาวะคู่คี่เดียวกันกับจำนวนสปินเนอร์ตั้งแต่ a_{n-i+3} ถึง a_n

โดยบทแทรกที่ 1 พิจารณาปัญหา $SP(n-i)$ จะได้ว่ามี $A(n-i) \in \Re(n-i)$ ที่ $S = \underbrace{111...1}_{n-2i+2}\underbrace{000...0}_{i-2} \in A(n-i)$

ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า การเปลี่ยนจาก S เป็น $\underbrace{000...0}_{n-i}$ ใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n-i)-F(i-2)$ ครั้ง

กรณี n เป็นจำนวนคี่

จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า สามารถเปลี่ยนจาก S เป็น $\underbrace{000...0}_{n-i}$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ $F(n-i)+F(i-2)$ ครั้ง

ในกรณีที่ 1 สามารถสรุปได้ดังนี้

พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$ ที่ $i \le \dfrac{n+1}{2}$

มีวิธีการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(n-i)+i$ ครั้ง ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ มีวิธีการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ทั้งหมด $F(n-i)+2F(i-2)+i$ ครั้งถ้า n เป็นจำนวนคี่

<u>**กรณี 2**</u> n เป็นจำนวนคู่และ $i=\frac{n+2}{2}$

จะแบ่งการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ออกเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

$$\underbrace{111...11}_{n} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 1}} \underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 2}} \underbrace{000...00}_{i-1}1\underbrace{00...00}_{n-i} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 3}} \underbrace{000...00}_{i-1}111\underbrace{00...00}_{n-i-2} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 4}} \underbrace{000...00}_{n}$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> $\underbrace{111...11}_{n} \rightarrow \underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2}$

- จาก $i=\frac{n+2}{2}$ ดังนั้น $i+1=n+3-i$

หมุนสปินเนอร์ $a_{n-i+3}, a_{n-i+4}, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $N-pivot$

- จากข้อสังเกต 3 จำนวนครั้งที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดจึงเท่ากับ $F(i-2)$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> $\underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \rightarrow \underbrace{000...00}_{i-1}1\underbrace{00...00}_{n-i}$

- หมุนสปินเนอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $I-pivot$ ตามลำดับ
- ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $i-1$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> $\underbrace{000...00}_{i-1}1\underbrace{00...00}_{n-i} \rightarrow \underbrace{000...00}_{i-1}111\underbrace{00...00}_{n-i-2}$

- ต้องการหมุนสปินเนอร์ a_i เป็นแนวนอน ดังนั้นจึงหาวิธีในการหมุนให้สปินเนอร์ a_{i+1} มาอยู่ในแนวตั้ง
- โดยบทแทรกที่ 2 หมุนสปินเนอร์ a_{i+1} และ a_{i+2} มาอยู่ในแนวตั้งบนตำแหน่ง $N-pivot$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดเท่ากับ $F(n-i)-F(n-i-2)$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> $\underbrace{000...00}_{i-1}111\underbrace{00...00}_{n-i-2} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n}$

- หมุนสปินเนอร์ a_i บนตำแหน่ง $I-pivot$ ต่อมาหมุนสปินเนอร์ a_{i+1} และ a_{i+2} บนตำแหน่ง $N-pivot$
- การหมุนสปินเนอร์ a_i บนตำแหน่ง $I-pivot$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ 1 ครั้ง

โดยข้อสังเกต 1 การหมุนสปินเนอร์ a_{i+1} และ a_{i+2} บนตำแหน่ง $N-pivot$ ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n-i)-F(n-i-2)$ ครั้ง

ดังนั้น ในกรณีที่ 2 สามารถสรุปได้ดังนี้

พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$ ที่ n เป็นจำนวนคู่และ $i=\frac{n+2}{2}$

มีวิธีการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ทั้งหมด $2(F(n-i)-F(n-i-2))+F(i-2)+i$ ครั้ง

<u>กรณีที่ 3</u> n เป็นจำนวนคี่และ $i=\dfrac{n+3}{2}$

จะแบ่งการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ออกเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

$$\underbrace{111...11}_{n} \to \underbrace{111...11}_{i-1}\underbrace{00...00}_{n-i+1} \to \underbrace{000...00}_{i-2}1\underbrace{00...00}_{n-i+1} \to \underbrace{000...00}_{i-2}1111\underbrace{00...00}_{n-i-2} \to \underbrace{000...00}_{i}11\underbrace{00...00}_{n-i-2} \to \underbrace{000...00}_{n}$$

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนที่ 4 ขั้นตอนที่ 5

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> $\underbrace{111...11}_{n} \to \underbrace{111...11}_{i-1}\underbrace{00...00}_{n-i+1}$

- เนื่องจาก $i=\dfrac{n+3}{2}$ ดังนั้น $i=n+3-i$ หมุนสปินเนอร์ $a_{n-i+4}, a_{n-i+5}, \ldots, a_n$ บนตำแหน่ง $N-pivot$ และ หมุนสปินเนอร์ a_{n-i+3} บนตำแหน่ง $I-pivot$
- จากข้อสังเกต 3 ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(i-3)+1$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> $\underbrace{111...11}_{i-1}\underbrace{00...00}_{n-i+1} \to \underbrace{000...00}_{i-2}1\underbrace{00...00}_{n-i+1}$

- หมุนสปินเนอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-2}$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $I-pivot$ ตามลำดับ
- ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ทั้งหมด $i-2$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> $\underbrace{000...00}_{i-2}1\underbrace{00...00}_{n-i+1} \to \underbrace{000...00}_{i-2}\underbrace{1111}_{4}\underbrace{00...00}_{n-i-2}$

- ต้องการหมุนสปินเนอร์ a_{i-1} เป็นแนวนอน ดังนั้นหาวิธีในการเปลี่ยน a_i เป็นแนวตั้ง
- หมุนสปินเนอร์ a_{i+1} และ a_{i+2} เป็นแนวตั้งบนตำแหน่ง $N-pivot$ และหมุนสปินเนอร์ a_i เป็นแนวตั้งบนตำแหน่ง $I-pivot$
- โดยบทแทรกที่ 2 ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด $F(n-i)-F(n-i-2)+1$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> $\underbrace{000...00}_{i-2}\underbrace{1111}_{4}\underbrace{00...00}_{n-i-2} \to \underbrace{000...00}_{i}11\underbrace{00...00}_{n-i-2}$

- หมุน a_{i-1} และ a_i เป็นแนวนอนตามลำดับบนตำแหน่ง $I-pivot$
- ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ 2 ครั้ง

ขั้นตอนที่ 5 $\underbrace{000...00}_{i}11\underbrace{00...00}_{n-i-2} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n}$

- หมุนสปินเนอร์ a_{i+1} และ a_{i+2} เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $N-pivot$
- โดยข้อสังเกต 1 ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด

$F(n-i)-F(n-i-2)$ ครั้ง

ดังนั้น ในกรณีที่ 3 สามารถสรุปได้ดังนี้

พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$ ที่ n เป็นจำนวนคี่และ $i=\dfrac{n+3}{2}$

มีวิธีการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้จำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ทั้งหมด

$2(F(n-i)-F(n-i-2))+F(i-3)+i-1$ ครั้ง

กรณีที่ 4 $i \geq \dfrac{n+4}{2}$

จะแบ่งการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ออกเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

$$\underbrace{111...11}_{n} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 1}} \underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 2}} \underbrace{000...00}_{n-i+1}1\underbrace{00...00}_{i-2} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 3}} \underbrace{000...00}_{n-i+1}\underbrace{111...1}_{5}\underbrace{000...00}_{i-6} \xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 4}} \underbrace{000...00}_{n-i+4}11\underbrace{000...00}_{i-6}$$

$$\xrightarrow{\text{ขั้นตอนที่ 5}} \underbrace{000...00}_{n}$$

ขั้นตอนที่ 1 $\underbrace{111...11}_{n} \rightarrow \underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2}$

- จาก $i \geq \dfrac{n+4}{2}$ ดังนั้น $i-1 \geq n-i+3$

หมุนสปินเนอร์ $a_{n-i+3}, a_{n-i+4}, \ldots, a_n$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $N-pivot$

- จากข้อสังเกต 3 จำนวนครั้งที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดจึงเท่ากับ $F(i-2)$ ครั้ง

ขั้นตอนที่ 2 $\underbrace{111...11}_{n-i+2}\underbrace{00...00}_{i-2} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n-i+1}1\underbrace{00...00}_{i-2}$

- จาก $i > n-i+3$ หมุนสปินเนอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-i+1}$ เป็นแนวนอนบนตำแหน่ง $I-pivot$
- จำนวนครั้งที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์เท่ากับ $n-i+1$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> $\underbrace{000...00}_{n-i+1}1\underbrace{00...00}_{i-2} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n-i+1}\underbrace{111...1}_{5}\underbrace{000...00}_{i-6}$

- ต้องการหมุนสปินเนอร์ a_{n-i+2} เป็นแนวนอน ดังนั้นหาวิธีการเปลี่ยนให้สปินเนอร์ a_{n-i+3} เป็นแนวตั้ง
- จาก $i \geq n-i+4$ ดังนั้น สปินเนอร์ a_{n-i+4} สามารถหมุนได้บนตำแหน่ง $I-pivot$

หมุนสปินเนอร์ a_{n-i+5}, a_{n-i+6} เป็นแนวตั้งบนตำแหน่ง $N-pivot$

และหมุนสปินเนอร์ a_{n-i+4}, a_{n-i+3} เป็นแนวตั้งบนตำแหน่ง $I-pivot$ ตามลำดับ

- โดยบทแทรกที่ 2 ใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดเท่ากับ

$F(i-4)-F(i-6)+2$ ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> $\underbrace{000...00}_{n-i+1}\underbrace{111...1}_{5}\underbrace{000...00}_{i-6} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n-i+4}11\underbrace{000...00}_{i-6}$

- หมุนสปินเนอร์ $a_{n-i+2}, a_{n-i+3}, a_{n-i+4}$ เป็นแนวนอนตามลำดับบนตำแหน่ง $I-pivot$
- จำนวนครั้งที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์จึงเท่ากับ 3 ครั้ง

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> $\underbrace{000...00}_{n-i+4}11\underbrace{000...00}_{i-6} \rightarrow \underbrace{000...00}_{n}$

- หมุนสปินเนอร์ a_{n-i+5}, a_{n-i+6} เป็นแนวตั้งนอนตำแหน่ง $N-pivot$
- จากข้อสังเกต 1 จำนวนครั้งที่ใช้ในการหมุนเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดจึงเท่ากับ

$F(i-4)-F(i-6)$ ครั้ง

ดังนั้น ในกรณีที่ 4 สามารถสรุปได้ดังนี้

พิจารณาปัญหา $SP(i,n)$ ที่ $i \geq \frac{n+4}{2}$

มีวิธีการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ โดยใช้จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ทั้งหมด

$F(i-2)+2F(i-4)-2F(i-6)+n-i+6$ ครั้ง

บทที่ 4

ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงข้อสรุปทั้งหมดของการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ที่ได้โดยแทนด้วย $G(i,n)$

4.1 ข้อสรุปการดำเนินโครงการ

ในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ผู้ดำเนินโครงการได้หาค่าขอบเขตบนของจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเปลี่ยนสถานะสปินเนอร์ในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ ดังนี้

กำหนดให้ $F(k)=0$ เมื่อ $k \le 0$

(i) $G(i,n)=F(n-i)+i$ เมื่อ $i \le \frac{n+1}{2}$ และ n เป็นจำนวนคู่

(ii) $G(i,n)=F(n-i)+2F(i-2)+i$ เมื่อ $i \le \frac{n+1}{2}$ และ n เป็นจำนวนคี่

(iii) $G(i,n)=2(F(n-i)-F(n-i-2))+F(i-2)+i$ เมื่อ $i = \frac{n+2}{2}$ และ n เป็นจำนวนคู่

(iv) $G(i,n)=2(F(n-i)-F(n-i-2))+F(i-3)+i-1$ เมื่อ $i = \frac{n+3}{2}$ และ n เป็นจำนวนคี่

(v) $G(i,n)=F(i-2)+2F(i-4)-2F(i-6)+n-i+6$ เมื่อ $i \ge \frac{n+4}{2}$

ตารางต่อไปนี้แสดงการเปรียบเทียบค่า $G(i,n)$ และค่า $F(n)$

กรณี $i \le \frac{n+1}{2}$ และ n เป็นจำนวนคู่ แทนด้วยสีเหลือง

กรณี $i \le \frac{n+1}{2}$ และ n เป็นจำนวนคี่ แทนด้วยสีเขียว

กรณี $i = \frac{n+2}{2}$ และ n เป็นจำนวนคู่ แทนด้วยสีฟ้า

กรณี $i = \frac{n+3}{2}$ และ n เป็นจำนวนคี่ แทนด้วยสีเทา

กรณี $i \ge \frac{n+4}{2}$ แทนด้วยสีส้ม

n	F(n)	G(1,n)	G(2,n)	G(3,n)	G(4,n)	G(5,n)	G(6,n)	G(7,n)	G(8,n)	G(9,n)	G(10,n)	G(11,n)	G(12,n)	G(13,n)	G(14,n)	G(15,n)
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	5	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	10	6	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	21	11	7	7	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	42	22	12	8	10	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	85	43	23	15	13	10	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	170	86	44	24	14	18	22	36	-	-	-	-	-	-	-	-
9	341	171	87	47	29	25	18	37	65	-	-	-	-	-	-	-
10	682	342	172	88	46	26	32	38	66	124	-	-	-	-	-	-
11	1365	683	343	175	93	57	47	32	67	125	241	-	-	-	-	-
12	2730	1366	684	344	174	90	48	60	68	126	242	476	-	-	-	-
13	5461	2731	1367	687	349	185	111	91	60	127	243	477	945	-	-	-
14	10922	5462	2732	1368	686	346	176	92	114	128	244	478	946	1884	-	-
15	21845	10923	5463	2735	1373	697	367	219	177	114	245	479	947	1885	3761	-
16	43690	21846	10924	5464	2734	1370	688	348	178	222	246	480	948	1886	3762	8028
17	87381	43691	21847	10927	5469	2745	1391	731	433	349	222	481	949	1887	3763	8029
18	174762	87382	43692	21848	10926	5466	2736	1372	690	350	436	482	950	1888	3764	8030
19	349525	174763	87383	43695	21853	10937	5487	2779	1457	861	691	436	951	1889	3765	8031
20	699050	349526	174764	87384	43694	21850	10928	5468	2738	1374	692	864	952	1890	3766	8032
21	1398101	699051	349527	174767	87389	43705	21871	10971	5553	2909	1715	1375	864	1891	3767	8033
22	2796202	1398102	699052	349528	174766	87386	43696	21852	10930	5470	2740	1376	1718	1892	3768	8034
23	5592405	2796203	1398103	699055	349533	174777	87407	43739	21937	11098	5811	3423	2741	1718	3769	8035
24	11184810	5592406	2796204	1398104	699054	349530	174768	87388	43698	21854	10932	5472	2742	3426	3770	8036

ข้อสังเกตจากตารางมีดังต่อไปนี้

1. $G(i,n) < F(n)$ เมื่อ $n > 2$
2. $G(i,n) > G(j,n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่และ $i < j \le \frac{n}{2}$ หรือ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่และ $\frac{n}{2} \le j < i$
3. $G(i,n) > G(j,n)$ เมื่อ $n > 3$ เป็นจำนวนคี่และ $j < i \le \frac{n+3}{2}$ หรือ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่และ $\frac{n+3}{2} \le j < i$

4.2 ข้อเสนอแนะ

กำหนดให้ $F(i,n)$ แทนจำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดในการแก้ปัญหา $SP(i,n)$ สังเกตว่า $F(i,n) \le F(n)$ โครงงานนี้ศึกษาหาค่าของ $G(i,n)$ ซึ่ง $F(i,n) \le G(i,n) \le F(n)$ ดังนั้นสำหรับผู้ที่สนใจในโครงการนี้ สามารถนำปัญหาเปิดเหล่านี้ไปศึกษาต่อได้ดังนี้

1.) หาค่า $F(i,n)$ หรือพิสูจน์ว่า $F(i,n) = G(i,n)$

2.) พิสูจน์ข้อสังเกตที่ได้จากตารางในหัวข้อ 4.1

เอกสารอ้างอิง

[1] Robert L. Lamphere(1996). A Recurrence Relation in the Spinout Puzzle, The college Mathematics Journal, Vol.27, No. 4, pp.286-289
[2] Gabriel, SPIN-OUT, from http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)　　ปริศนาสปินเอาท์

ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)　　Spinout Puzzle

อาจารย์ที่ปรึกษา　　รองศาสตราจารย์ ดร. จริยา อุ่ยยะเสถียร

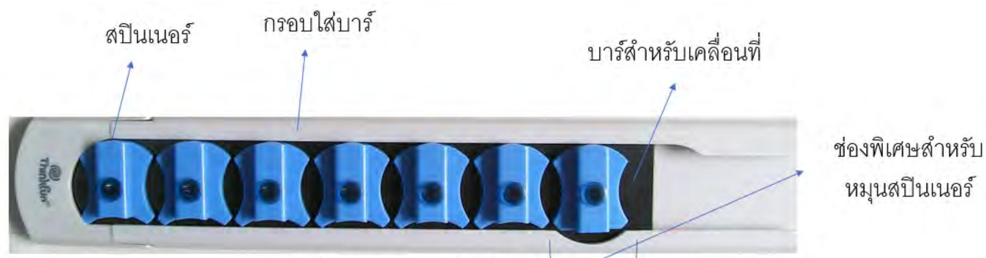
ผู้ดำเนินการ　　นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร เลขประจำตัวนิสิต 5933546023

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ปริศนาสปินเอาท์เป็นปริศนาที่ถูกคิดค้นโดยวิลเลียม เคสเตอร์ (William Keister) ในปี ค.ศ.1970 ได้มีการนำมาทำของเล่นในปัจจุบันแสดงได้ดังรูปที่ 1

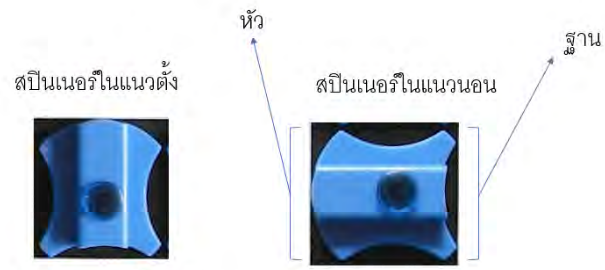


รูปที่ 1 แสดงปริศนาสปินเอาท์

ที่มา http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

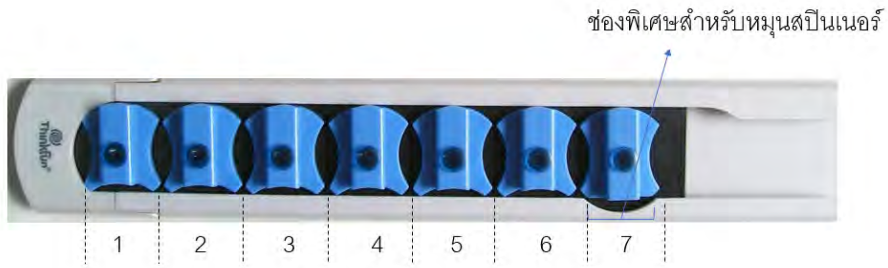
ปริศนานั้นจะประกอบไปด้วย สปินเนอร์ทั้งหมด 7 ตัว บาร์สำหรับเคลื่อนที่ที่มีสปินเนอร์ทั้ง 7 ถูกนำมาวางล็อคอยู่ด้านบน และกรอบใส่บาร์ที่สามารถบรรจุสปินเนอร์ในแนวตั้งได้มากที่สุด 8 ตัวโดยที่โดยที่การหมุนเปลี่ยนสถานะ

ของสปินเนอร์ในปริศนาสปินเอาท์จะมีทั้งหมด 2 สถานะ นั่นคือ แนวตั้ง (หันหัวไปทางด้านบน) และแนวนอน (หันหัวไปทางด้านซ้าย) สถานะของสปินเนอร์แสดงได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงสถานะของสปินเนอร์
ที่มา http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

กรอบใส่บาร์ในทางด้านซ้ายนั้นจะตันทำให้ไม่สามารถเลื่อนบาร์ออกได้ทางด้านซ้าย ในการเลื่อนบาร์ออกทางด้านขวานั้นสามารถทำได้เมื่อสปินเนอร์ทุกตัวต้องอยู่ในสถานะแนวนอน นอกจากนี้เมื่อเลื่อนบาร์ให้มาชิดขอบด้านซ้ายของกรอบใส่บาร์แทนตำแหน่งของกรอบใส่บาร์ที่ตรงกับสปินเนอร์ตัวซ้ายสุดด้วยตำแหน่งที่ 1 แทนตำแหน่งเพิ่มขึ้นทีละหนึ่งไปทางด้านขวา ตำแหน่งที่ 7 จะเป็นตำแหน่งของช่องพิเศษสำหรับหมุนสปินเนอร์ โดยการกำหนดตำแหน่งของกรอบใส่บาร์แสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงการแทนตำแหน่งในกรอบใส่บาร์
ที่มา http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

<u>ข้อสังเกต</u> สปินเนอร์ถูกแบ่งออกเป็นสองแบบ

1. สปินเนอร์แบบปกติ ฐานจะมีลักษณะโค้งเว้าเข้ามาด้านใน สปินเนอร์ทุกตัวนอกจากตัวขวาสุดเป็นสปินเนอร์แบบปกติ
2. สปินเนอร์แบบพิเศษ ฐานตรง ซึ่งสปินเนอร์แบบพิเศษนั้นจะมีเพียงตัวเดียวคือ สปินเนอร์ที่วางในด้านขวาสุด

โดยสปินเนอร์แต่ละแบบแสดงได้ดังรูปที่ 4

สปินเนอร์แบบปกติ สปินเนอร์แบบพิเศษ

รูปที่ 4 แสดงสปินเนอร์แต่ละแบบ

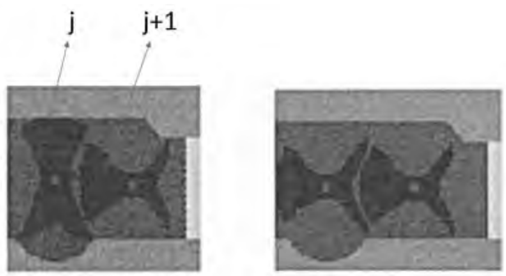
ที่มา http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

เมื่อเริ่มเกม สปินเนอร์ทุกตัวจะอยู่ในแนวตั้งทั้งหมด โดยมีเป้าหมายในการเล่นคือ หมุนสปินเนอร์ทุกตัวให้อยู่ในแนวนอนเพื่อนำบาร์ออกจากกรอบใส่บาร์ได้ จากการศึกษาหลักการเคลื่อนที่ของสปินเนอร์ในปริศนาสปินเอาท์ทำให้สามารถสรุปได้สามข้อ

ข้อหนึ่ง สปินเนอร์จะสามารถหมุนเปลี่ยนทิศทางเมื่ออยู่บนช่องพิเศษสำหรับหมุนสปินเนอร์

ข้อสอง สปินเนอร์ในแนวนอนหันหัวไปทางซ้าย สปินเนอร์ในแนวตั้งหันหัวขึ้นข้างบน

ข้อสาม เมื่อกำหนดสปินเนอร์ตัวแรกในทางด้านซ้ายสุดแทนสปินเนอร์ตำแหน่งที่ 1 แทนลำดับสปินเนอร์เพิ่มขึ้นทีละหนึ่งในทางด้านขวา สปินเนอร์ในตำแหน่งที่ j จะไม่สามารถหมุนได้หากสปินเนอร์ หากสปินเนอร์ในตำแหน่งที่ j+1 อยู่ในแนวนอน โดยหลักการเคลื่อนที่ของสปินเนอร์ในปริศนาสปินเอาท์ในข้อสาม แสดงได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 แสดงหลักการเคลื่อนที่ของสปินเนอร์ในปริศนาสปินเอาท์ในข้อสาม

ที่มา A Recurrence Relation in the Spinout Puzzle

จากการศึกษาของนักคณิตศาสตร์พบว่า เมื่อจำนวนสปินเนอร์เท่ากับ 7 จำนวนครั้งในการหมุนเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดที่สามารถนำบาร์ออกจากกรอบใส่บาร์ได้เท่ากับ 85 วิธี [1] นอกจากนั้นนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาจำนวนการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุดเมื่อมีจำนวนสปินเนอร์ n ตัว

พบว่าจำนวนวิธีที่น้อยที่สุดเท่ากับ $\left\lceil \frac{2}{3}(2^n - 1) \right\rceil$ วิธี [1]

ผู้ดำเนินการมีความสนใจในการศึกษาปริศนาที่คล้ายคลึงกับปริศนาสปินเอาท์ให้หลากหลาย เช่น เพิ่มช่องพิเศษสำหรับหมุนสปินเนอร์ และมุ่งเน้นแก้ปัญหาจำนวนครั้งในการเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด

วัตถุประสงค์

ก. เพื่อศึกษาวิธีการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์ ซึ่งใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) และ รหัสเกรย์ในรูปแบบการสะท้อนของเลขฐานสอง(binary reflected gray code)

ข. เพื่อสร้างเกมใหม่ซึ่งได้นำปริศนาสปินเอาท์เป็นพื้นฐาน โดยจะมุ่งเน้นหาวิธีการแก้ปัญหาโดยมีจำนวนวิธีที่จะเปลี่ยนสถานะของสปินเนอร์ที่น้อยที่สุด เช่น เพิ่มช่องพิเศษในการหมุนมาอีก 1 ช่อง

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาจำนวนสปินเนอร์ n ตัว โดยที่ n เป็นจำนวนนับ

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

ก. ศึกษาการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์

ข. แก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์ที่ออกแบบเพิ่ม

ค. ดำเนินการเขียนรายงาน

ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	**พ.ศ. 2562**					**พ.ศ.2563**			
	ส.ค.	**ก.ย.**	**ต.ค.**	**พ.ย.**	**ธ.ค.**	**ม.ค.**	**ก.พ.**	**มี.ค.**	**เม.ย.**
ก. ศึกษาการแก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์									
ข. แก้ปัญหาปริศนาสปินเอาท์ที่ออกแบบเพิ่ม									
ค. ดำเนินการเขียนรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ก. ได้รับความรู้พื้นฐานที่ใช้แก้ปริศนาสปินเอาท์ เช่น ความสัมพันธ์เวียนเกิด รหัสเกรย์ เป็นต้น

ข. เพื่อทำให้ปริศนาสปินเอาท์เป็นที่รู้จักมากขึ้น และ เพิ่มความท้าทายในการเล่นให้มากขึ้น

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

ก. คอมพิวเตอร์

ข. เครื่องพิมพ์

ค. ของเล่นปริศนาสปินเอาท์

งบประมาณ

ก. กระดาษ	200 บาท
ข. เครื่องเขียน	300 บาท
ค. ของเล่นปริศนาสปินเอาท์	3000 บาท

เอกสารอ้างอิง

1. Robert L. Lamphere, A Recurrence Relation in the Spinout Puzzle, The College Mathematics Journal, Vol 27, No. 4 (Sep., 1996), pp. 286-289
2. Leanne Merril and Tony Van, A Tale Of Two Puzzles, pp. 101-147
3. Gabriel, SPIN-OUT, from http://mypuzzlecollection.blogspot.com/2012/09/spin-out.html

ประวัติผู้เขียน

นายวิชยุตม์ ลิขิตรัตนากร
รหัสนิสิต 5933546023
สาขา คณิตศาสตร์
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย