



โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ	การเดินทางแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ ที่ถูกลบสองช่อง Closed knight's tours on $4 \times n$ chessboards with two squares removed
ชื่อนิสิต	ธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์ 593 35220 23
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเดินม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ ที่ถูกลบสองช่อง

ธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Closed knight's tours on $4 \times n$ chessboards with two squares removed

Mr. Tanatorn Kaewwannarat

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อโครงการ	การเดินทางแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ ที่ถูกลบสองช่อง
โดย	ธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อนุมัติให้รับโครงการฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499
โครงการวิทยาศาสตร์ (Senior Project)



..... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงการ



..... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)



..... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ไพศาล นาคมหาชาติสินธุ์)



..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.กীরดี ศรีอมร)

ธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์ : การเดินม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ ที่ถูกลบสองช่อง.
(Closed knight's tours on $4 \times n$ chessboards with two squares removed) อาจารย์ที่ปรึกษา
โครงการ : รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 59 หน้า.

โครงการนี้ระบุตำแหน่งช่องสองช่องทั้งหมดที่ลบออกจากกระดานหมากรุกขนาด 4×3 , 4×4 , 4×5 , 4×6 , 4×7 และ 4×8 แล้วมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานที่เหลืออยู่ และระบุตำแหน่งช่องสองช่องบางตำแหน่งที่ลบออกจากกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ เมื่อ $n \geq 9$ แล้ว มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานที่เหลืออยู่ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ข้อคาดการณ์บางส่วนของ Bi และ คณะ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์.....ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชาคณิตศาสตร์.....ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาโครงการ.....
ปีการศึกษา.....2562.....

ธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์
๒๖

5933522023 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : Closed knight's tours

TANATORN KAEWWANNARAT : Closed knight's tours on $4 \times n$ chessboards with two squares removed. ADVISOR : ASSOC. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 59 pp.

This project determines all pairs of squares such that after being deleted from the chessboards of size 4×3 , 4×4 , 4×5 , 4×6 , 4×7 and 4×8 , there exists a closed knight's tour on each deleted chessboard. We also determine some pairs of squares such that after being deleted from the chessboards of size $4 \times n$, where $n \geq 9$, there exists a closed knight's tour on each deleted chessboard. The result partially proves Bi et al.'s conjecture.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Tanatorn k.

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature R. Boonklurb

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงการนี้สำเร็จลุล่วงเพราะได้รับการอนุเคราะห์อย่างเต็มที่จากบุคคลเหล่านี้ ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ความดูแลเอาใจใส่เป็นอย่างดี ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ มาโดยตลอด ขอขอบคุณพี่วสุพล ศรีโชติ ที่ได้ให้คำชี้แนะในระหว่างการดำเนินงาน และให้ความรู้เพิ่มเติม จนทำให้โครงการเล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ ขอขอบคุณศาสตราจารย์ ดร.ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และอาจารย์ ดร.กิริติ ศรีอมร อาจารย์กรรมการคุมสอบครั้งนี้ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะและการตรวจทาน ทำให้โครงการเล่มนี้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

ผู้จัดทำโครงการ

สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญรูปภาพ.....	ซ
บทที่ 1 บทนำและความรู้เบื้องต้น.....	1
บทที่ 2 $CB(4, n)$ เมื่อ $n \leq 8$	5
บทที่ 3 $CB(4, n)$ เมื่อ $n \geq 9$	29
บทที่ 4 สรุปและข้อเสนอแนะ.....	41
เอกสารอ้างอิง.....	42
ภาคผนวก.....	43

สารบัญรูปลูกภาพ

รูปที่ 1.1 ตำแหน่งทั้ง 8 ที่การเดินม้า 1 ครั้งจาก (4, 5) บน CB(8, 8) ไปถึงได้.....	1
รูปที่ 1.2 G(8, 8).....	2
รูปที่ 1.3 การเดินม้าแบบปิดบน CB(8, 8).....	3
รูปที่ 1.4 การเดินม้าแบบเปิดบน CB(8, 8).....	3
รูปที่ 2.1 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	5
รูปที่ 2.2 $w(G(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}) - S = 4$	6
รูปที่ 2.3 $w(G(4, 3) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S = 4$	6
รูปที่ 2.4 $w(G(4, 3) - \{(1, 1), (1, 2)\}) - S = 4$	7
รูปที่ 2.5 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 4) - \{(1, 1), (1, 4)\}$	7
รูปที่ 2.6 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (1, 2)\}$	8
รูปที่ 2.7 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	8
รูปที่ 2.8 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 5)\}$	9
รูปที่ 2.9 $w(G(4, 5) - \{(1, 2), (1, 3)\}) - S = 8$	9
รูปที่ 2.10 $w(G(4, 5) - \{(1, 3), (4, 3)\}) - S = 8$	10
รูปที่ 2.11 $w(G(4, 3) - \{(1, 1), (1, 4)\}) - S = 8$	10
รูปที่ 2.12 $w(G(4, 5) - \{(1, 2), (4, 4)\}) - S = 8$	10
รูปที่ 2.13 $w(G(4, 5) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S = 8$	11
รูปที่ 2.14 $w(G(4, 5) - \{(1, 2), (4, 2)\}) - S = 8$	11
รูปที่ 2.15 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	12
รูปที่ 2.16 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 2)\}$	12
รูปที่ 2.17 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	13
รูปที่ 2.18 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 6)\}$	13
รูปที่ 2.19 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 5)\}$	13
รูปที่ 2.20 $w(G(4, 6) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S = 8$	14
รูปที่ 2.21 $w(G(4, 6) - \{(1, 2), (4, 4)\}) - S = 8$	14
รูปที่ 2.22 $w(G(4, 6) - \{(1, 1), (1, 4)\}) - S = 8$	15
รูปที่ 2.23 $w(G(4, 6) - \{(1, 3), (4, 3)\}) - S = 8$	15
รูปที่ 2.24 $w(G(4, 6) - \{(1, 2), (1, 3)\}) - S = 8$	15
รูปที่ 2.25 $w(G(4, 6) - \{(1, 3), (1, 4)\}) - S = 8$	16
รูปที่ 2.26 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	16

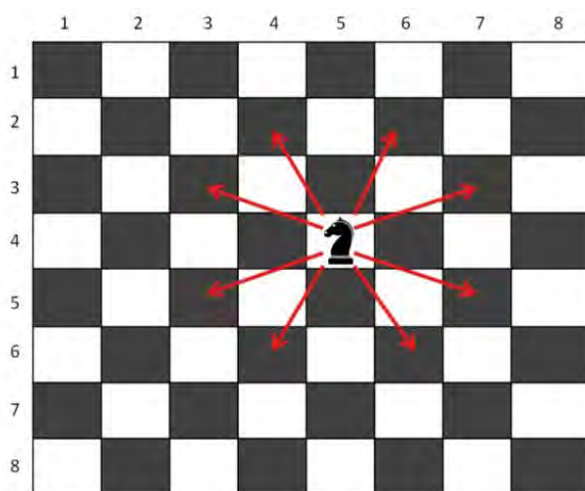
รูปที่ 2.60 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 7)\}$	28
รูปที่ 2.61 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 6)\}$	28
รูปที่ 3.1 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	29
รูปที่ 3.2 วิธี 8 เส้น บน $CB(4, 4)$	29
รูปที่ 3.3 วิธี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$	30
รูปที่ 3.4 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	30
รูปที่ 3.5 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 13) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	30
รูปที่ 3.6 วิธี 4 เส้น บน $CB(4, 3)$	31
รูปที่ 3.7 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	31
รูปที่ 3.8 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 14) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	31
รูปที่ 3.9 วิธี 4 เส้น บน $CB(4, 4)$	32
รูปที่ 3.10 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	32
รูปที่ 3.11 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 15) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	32
รูปที่ 3.12 วิธี 4 เส้น บน $CB(4, 5)$	33
รูปที่ 3.13 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 12) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	33
รูปที่ 3.14 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 16) - \{(1, 1), (4, 1)\}$	33
รูปที่ 3.15 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	34
รูปที่ 3.16 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$	34
รูปที่ 3.17 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	35
รูปที่ 3.18 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	35
รูปที่ 3.19 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 4)$	35
รูปที่ 3.20 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	36
รูปที่ 3.21 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 2), (4, 2)\}$	36
รูปที่ 3.22 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$	36
รูปที่ 3.23 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 3), (4, 3)\}$	37
รูปที่ 3.24 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 3), (4, 3)\}$	37
รูปที่ 3.25 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 3), (4, 3)\}$	38
รูปที่ 3.26 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 12) - \{(1, 3), (4, 3)\}$	38
รูปที่ 3.27 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$	38
รูปที่ 3.28 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$	39
รูปที่ 3.29 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 4), (4, 4)\}$	39
รูปที่ 3.30 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 4), (4, 4)\}$	39
รูปที่ 3.31 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$	40

รูปที่ 3.32 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 4), (4, 4)\}$	40
รูปที่ 3.33 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 12) - \{(1, 4), (4, 4)\}$	40

บทที่ 1

บทนำและความรู้เบื้องต้น

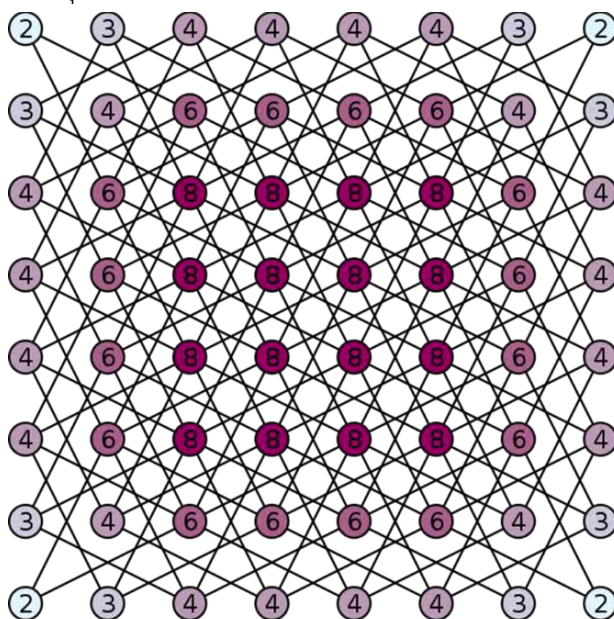
ในเกมหมากรุก มีตัวหมากหลายชนิด แต่ตัวหมากตัวหนึ่งที่น่าสนใจ คือ ม้า ซึ่งม้าในเกมหมากรุกมีวิธีการเดินที่น่าสนใจ กล่าวคือ ม้าจะเดินตามแนวตั้งหรือแนวนอนไปสองช่องแล้วเดินทำมุมฉากกับแนวเดิมไปอีกหนึ่งช่องบนกระดาน เรียกการเดินลักษณะนี้ว่า *การเดินม้าแบบปกติ* ซึ่งในโครงงานนี้จะเรียกสั้น ๆ ว่า *การเดินม้า* โดยทั่วไปแล้ว กระดานหมากรุกที่นิยมเล่นกันปกติจะมีขนาด 8×8 นั่นคือ กระดานหมากรุกจะประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถว แต่ละแถวมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดหลัก ต่อมาได้มีการพิจารณากระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน m แถว แต่ละแถวมี n หลัก ทาสีขาวและสีดำสลับกันไป ในโครงงานนี้จะใช้สัญลักษณ์ $CB(m, n)$ แทนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ นอกจากนี้ยังใช้การบอกตำแหน่งช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน $CB(m, n)$ ด้วยคู่อันดับ (i, j) ในลักษณะเดียวกับการบอกตำแหน่งของสมาชิกต่าง ๆ ของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ดังนั้น ถ้าการเดินม้า 1 ครั้งเริ่มจากช่อง (i, j) บน $CB(m, n)$ แล้วช่องถัดไปที่ม้าสามารถเดินไปได้จะมีอย่างมาก 8 ช่อง คือ $(i \pm 2, j \pm 1)$ หรือ $(i \pm 1, j \pm 2)$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.1 สังเกตว่า ถ้าการเดินม้าเริ่มจากช่องสีขาว แล้วช่องถัดไปที่ม้าจะเดินไปถึงได้จะเป็นช่องสีดำเท่านั้น ในทำนองกลับกัน ถ้าการเดินม้าเริ่มจากช่องสีดำ แล้วช่องถัดไปที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้ก็จะเป็นช่องสีขาวเท่านั้น



รูปที่ 1.1 ตำแหน่งทั้ง 8 ที่การเดินม้า 1 ครั้งจาก $(4, 5)$ บน $CB(8, 8)$ ไปถึงได้

เมื่อพิจารณาการเดินม้าบน $CB(m, n)$ แล้ว จะพบว่าสามารถนำมาจำลองเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้โดยใช้กราฟด้วยการแทนช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (i, j) แต่ละช่องเป็นจุดยอดของกราฟ แทนด้วย (i, j) เช่นเดิม และจุดยอดสองจุดจะมีเส้นเชื่อมหากัน หรือเรียกว่า ประชิดกัน ถ้าม้าสามารถเดินจากช่องหนึ่งไปยังอีกช่องหนึ่งได้ด้วยการเดินม้า 1 ครั้ง ทั้งนี้ถ้า (i, j) และ (r, s) ประชิดกัน จะใช้สัญลักษณ์ $(i, j)-(r, s)$ แทนเส้นเชื่อมที่มีจุดปลายทั้งสองเป็น (i, j) และ (r, s) ทั้งนี้จะเรียกกราฟที่แสดงเส้นเชื่อมทั้งหมดที่เป็นไปได้จากแต่ละจุดยอด

ของ $CB(m, n)$ ว่ากราฟหม้าของ $CB(m, n)$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $G(m, n)$ ดังตัวอย่าง $G(8, 8)$ ในรูปที่ 1.2 สังเกตว่าตัวเลขที่กำกับในแต่ละจุดยอดของ $G(8, 8)$ คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่ประชิดกับจุดยอดนั้น

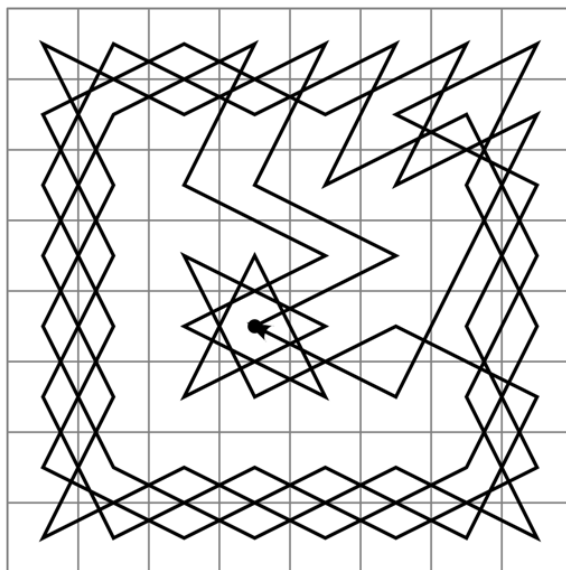


รูปที่ 1.2 $G(8, 8)$

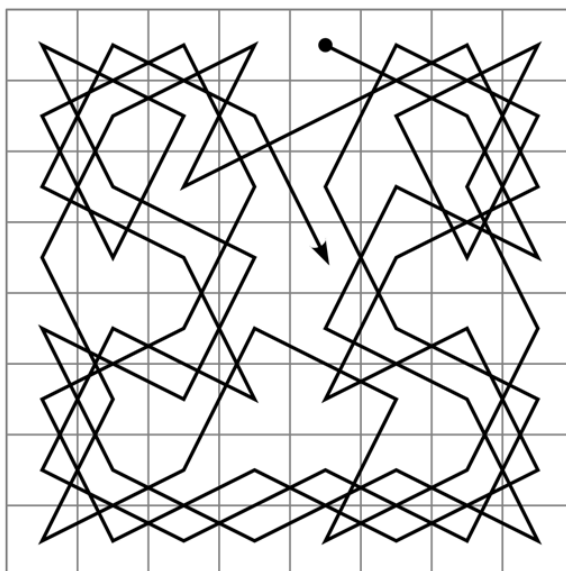
ปัญหาหนึ่งที่นักคณิตศาสตร์สนใจเกี่ยวกับการเดินหม้าบน $CB(m, n)$ คือ การมีอยู่ของการเดินหม้าแบบปิด และการมีอยู่ของการเดินหม้าแบบเปิด การเดินหม้าแบบปิดบน $CB(m, n)$ คือ การเดินหม้าที่เริ่มต้นจากช่องใดช่องหนึ่งบน $CB(m, n)$ และเดินผ่านช่องทุกช่องบน $CB(m, n)$ เพียงช่องละหนึ่งครั้งเท่านั้น แล้วเดินกลับมาที่จุดเริ่มต้น ในขณะที่ การเดินหม้าแบบเปิดบน $CB(m, n)$ คือ การเดินหม้าที่เริ่มต้นจากช่องใดช่องหนึ่งบน $CB(m, n)$ และเดินผ่านช่องทุกช่องบน $CB(m, n)$ เพียงช่องละหนึ่งครั้งเท่านั้น แต่ไม่ได้เดินกลับมาที่จุดเริ่มต้น ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.3 และ 1.4 ตามลำดับ หากพิจารณาในมุมมองของทฤษฎีกราฟจะเห็นว่า การหาการเดินหม้าแบบปิดบน $CB(m, n)$ คือ การหาวงแฮมิลโทเนียนบน $G(m, n)$ และการหาการเดินหม้าแบบเปิดบน $CB(m, n)$ คือ การหาวิถีแฮมิลโทเนียนบน $G(m, n)$ ทฤษฎีบทที่สำคัญบทหนึ่งในทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวกับการมีอยู่ของวงแฮมิลโทเนียนซึ่งโครงการนี้จะใช้อ้างอิง คือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [5] ให้ G เป็นกราฟ และ S เป็นสับเซตแท้ของเซตของจุดยอดทั้งหมดของ G ถ้า G มีวงแฮมิลโทเนียน แล้ว $w(G - S) \leq |S|$

เมื่อ $G - S$ คือ กราฟที่ลบจุดยอด S ออกจากจุดยอดของ G และลบเส้นเชื่อมทั้งหมดที่ประชิดกับจุดยอดทุกจุดใน S และ $w(G - S)$ คือ จำนวนส่วนประกอบของ $G - S$



รูปที่ 1.3 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(8, 8)$



รูปที่ 1.4 การเดินม้าแบบเปิดบน $CB(8, 8)$

ใน ค.ศ. 1991 Schwenk [4] ได้แสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับจำนวนนับ m, n ที่ $m \leq n$ จะมีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(m, n)$ ยกเว้นเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งในบรรดา 3 เงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) m และ n เป็นจำนวนคี่
- (2) $m = 1, 2$ หรือ 4
- (3) $m = 3$ และ $n = 4, 6$ หรือ 8

เป็นจริง นั่นคือ ถ้าเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งเกี่ยวกับ m และ n ข้างต้นเป็นจริง แล้วจะไม่มี การเดินม้าแบบปิดบน $CB(m, n)$ นั้นได้

จากเงื่อนไขทั้ง 3 ข้างต้นทำให้ต่อมา ใน ค.ศ. 2009 DeMaio และ Hippchen [2] ได้สนใจหาจำนวนช่องที่น้อยที่สุดที่เมื่อลบออกไปจาก $CB(m, n)$ แล้วทำให้มีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ ทั้งนี้ถ้า A

เป็นเซตของช่องที่ต้องการลบออกไปจาก $CB(m, n)$ แล้วในโครงงานนี้จะใช้สัญลักษณ์ $CB(m, n) - A$ แทนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่เหลือหลังจากลบช่องทั้งหลายใน A ออกไป และ $G(m, n) - A$ แทนกราฟม้าของ $CB(m, n) - A$

สำหรับจำนวนนับ m, n ที่ $m \leq n$ ให้ $T(m, n)$ แทน จำนวนช่องที่น้อยที่สุดที่ลบออกจาก $CB(m, n)$ แล้วมีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ แสดงว่าถ้ามีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(m, n)$ แล้ว $T(m, n) = 0$ แต่ถ้าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(m, n)$ แล้ว DeMaio และ Hippchen [2] สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$(1) T(m, n) = 1 \text{ เมื่อ } m \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนนับคี่ทั้งคู่ ยกเว้น } m = 3 \text{ และ } n = 5$$

$$(2) T(4, n) = 2 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับที่ } n \geq 4$$

$$(3) T(3, 4) = T(3, 8) = 2, T(3, 5) = 3 \text{ และ } T(3, 6) = 4$$

$$(4) T(2, n) = 2n - 2 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับที่ } n \geq 3$$

$$(5) T(1, n) \text{ and } T(2, 2) \text{ ไม่นิยาม}$$

ต่อมา Miller และ Farnsworth [3] ได้พิจารณาค่า n และหาตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการลบช่อง 1 ช่องออกจาก $CB(3, n)$ แล้วทำให้มีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ และเนื่องจาก $T(m, n) = 1$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ ยกเว้น $m = 3$ และ $n = 5$ ทำให้ใน ค.ศ. 2015 Bi และคณะ [1] ได้ศึกษาเกี่ยวกับตำแหน่งทั้งหมดของช่อง 1 ช่องที่เมื่อลบช่องนั้นออกจาก $CB(m, n)$ แล้วมีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกที่เหลืออยู่ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

สำหรับ $CB(4, n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ Bi และ คณะ [1] ยังได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2 [1] สำหรับจำนวนนับ n ที่ $n \geq 3$ ให้ A เป็นเซตของช่อง 2 ช่องบน $CB(4, n)$ จะได้ว่าถ้ามีการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - A$ แล้วสมาชิกใน A ไม่ใช่ช่องที่อยู่ในแถวที่ 2 หรือ แถวที่ 3

และยังมีข้อคาดการณ์ที่ว่า สำหรับจำนวนนับ n ที่ $n \geq 7$ จะได้ว่ามีการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - A$ เมื่อ A มีสมาชิกเพียง 2 ตัวที่เป็นช่อง 2 ช่องใด ๆ ที่มีสีต่างกัน และไม่ได้มีช่องใดช่องหนึ่งมาจากแถวที่ 2 หรือ แถวที่ 3 ของ $CB(4, n)$ เลย

นอกจากนี้จากผลงานของ DeMaio และ Hippchen ยังได้ด้วยว่า $T(2, 4) = 6$ และ $T(1, 4)$ ไม่นิยาม ดังนั้น สำหรับ $CB(4, 2)$ ต้องลบช่องออกทั้งหมด 6 ช่อง จึงจะมีการเดินม้าแบบปิดได้ และ $CB(4, 1)$ ไม่มีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานนี้ตั้งแต่ต้น จึงไม่นิยามจำนวนช่องที่ลบแล้วจะเกิดการเดินม้าแบบปิดบนกระดานดังกล่าว

ดังนั้น โครงงานนี้ จึงได้สนใจที่จะพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นี้เพียงบางส่วน โดยศึกษา $CB(4, n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ เพื่อ

(1) หาตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการลบช่อง 2 ช่องออกจาก $CB(4, n)$ แล้วมีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ เมื่อ $n \leq 8$

(2) พิสูจน์ว่าเมื่อลบช่อง 2 ช่องบางแบบออกจาก $CB(4, n)$ แล้วมีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ เมื่อ $n \geq 9$

บทที่ 2

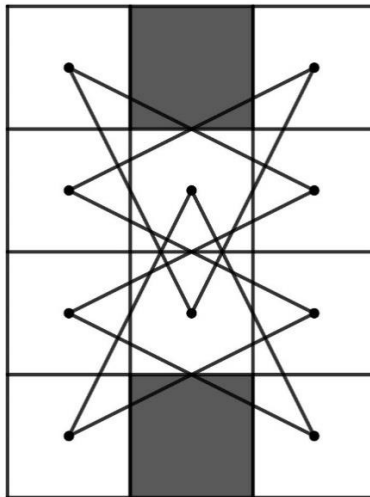
CB(4, n) เมื่อ $n \leq 8$

พิจารณา $CB(4, n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ ซึ่งไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n)$ แต่ DeMaio และ Hippchen [2] รับประกันว่าการลบช่องเพียง 2 ช่องที่เหมาะสมออกจาก $CB(4, n)$ จะทำให้หาการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลือได้ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีบท 1.2 ยังระบุว่าช่องทั้งสองดังกล่าวนี้ ต้องไม่มีช่องใดเลยมาจากแถวที่ 2 หรือ แถวที่ 3 นอกจากนี้ จากข้อสังเกตเกี่ยวกับการเดินม้าที่ 1 ครั้งจะเดินจากช่องสีขาวไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีดำไปช่องสีขาวเท่านั้น ทำให้สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ ถ้า A เป็นเซตที่มีสมาชิก 2 ตัวที่เป็นช่องสีเดียวกัน หรือ มีสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งมาจากแถวที่ 2 หรือ แถวที่ 3 แล้วไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - A$

ดังนั้นในบทนี้ จะหาดำแหน่งของช่องต่างสีกัน 2 ช่องทั้งหมดที่เป็นไปได้ในแถวที่ 1 หรือ แถวที่ 4 ที่ต้องการลบออกจาก $CB(4, 3)$, $CB(4, 4)$, $CB(4, 5)$, $CB(4, 6)$, $CB(4, 7)$ และ $CB(4, 8)$ แล้วมีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่

ทฤษฎีบท 2.2 มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - A$ ก็ต่อเมื่อ $A = \{(1, 2), (4, 2)\}$
พิสูจน์ ชั้นแรก รูปที่ 2.1 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

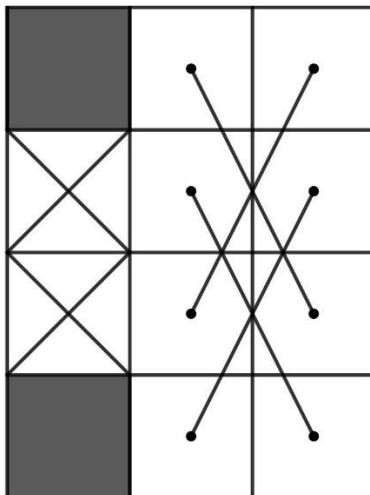


รูปที่ 2.1 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

ขั้นต่อมาแบ่งเป็น 4 กรณี ได้ดังนี้

กรณี 1 A เป็น $\{(1, 1), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 3), (4, 3)\}$

จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(2, 1), (3, 1)\}$ จากรูปที่ 2.2 จะได้ว่า $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}) - S) = 4 > 2 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

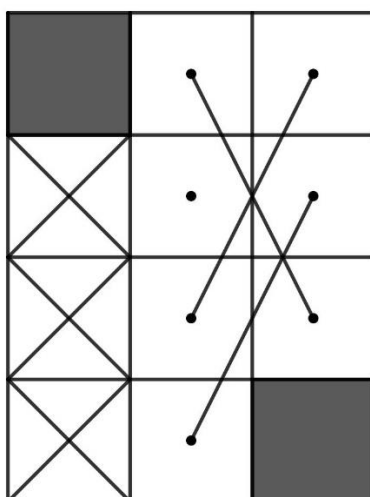


รูปที่ 2.2 $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}) - S) = 4$

หมายเหตุ สำหรับรูปต่อ ๆ ไป ช่องที่แรเงา คือ ช่อง 2 ช่องที่ลบออกจาก $CB(4, n)$ และ ช่องที่กากบาท คือ ช่องที่เป็นสมาชิกของ S ที่กำหนดในกรณีนั้น ๆ

กรณี 2 A เป็น $\{(1, 1), (4, 3)\}$ หรือ $\{(1, 3), (4, 1)\}$

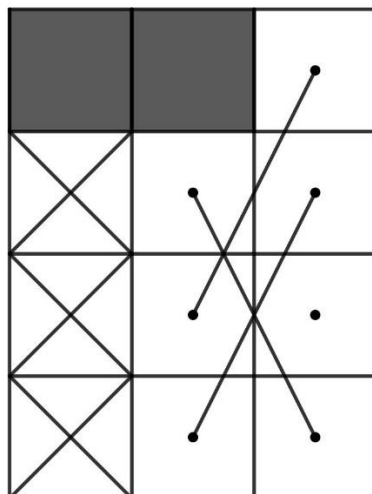
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 3)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ จากรูปที่ 2.3 จะได้ว่า $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S) = 4 > 3 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.3 $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S) = 4$

กรณี 3 A เป็น $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 2), (1, 3)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$ หรือ $\{(4, 2), (4, 3)\}$

จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (1, 2)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ จากรูปที่ 2.4 จะได้ว่า $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (1, 2)\}) - S) = 4 > 3 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (1, 2)\}$



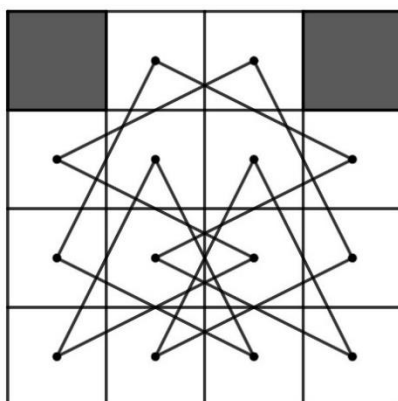
รูปที่ 2.4 $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (1, 2)\}) - S) = 4$

กรณีที่ 4 ถ้า A เป็นเซตของสองช่องอื่น ๆ ของ $CB(4, 3)$ ที่ไม่ใช่ $\{(1, 2), (4, 2)\}$ และไม่อยู่ในกรณีที่ 1 ถึง 3 แล้วจะเป็นสองช่องที่มีช่องใดช่องหนึ่งในแถวที่ 2 หรือ 3 หรือเป็นสองช่องที่มีสีเดียวกันทั้งคู่ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 3) - A$ ดังกล่าว



ทฤษฎีบท 2.3 มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 4) - A$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตใดเซตหนึ่งต่อไปนี้ $\{(1, 1), (1, 4)\}$, $\{(1, 1), (4, 1)\}$, $\{(1, 4), (4, 4)\}$ และ $\{(4, 1), (4, 4)\}$

พิสูจน์ ชั้นแรก จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 4) - \{(1, 1), (1, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.5 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 4) - \{(1, 1), (1, 4)\}$



รูปที่ 2.5 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 4) - \{(1, 1), (1, 4)\}$

ขั้นต่อมา ถ้า A เป็นเซตของสองช่องอื่น ๆ ของ $CB(4, 4)$ ที่ไม่ใช่ $\{(1, 1), (1, 4)\}$, $\{(1, 1), (4, 1)\}$, $\{(1, 4), (4, 4)\}$ และ $\{(4, 1), (4, 4)\}$ แล้วจะเป็นสองช่องที่มีช่องใดช่องหนึ่งในแถวที่ 2 หรือ 3 หรือเป็นสองช่องที่มีสีเดียวกันทั้งคู่ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 4) - A$ ดังกล่าว

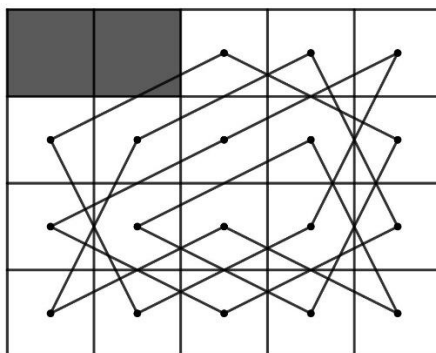


ทฤษฎีบท 2.4 มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - A$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตใดเซตหนึ่งต่อไปนี้ $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 4), (1, 5)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$, $\{(4, 4), (4, 5)\}$, $\{(1, 1), (4, 1)\}$, $\{(1, 5), (4, 5)\}$, $\{(1, 1), (4, 5)\}$ และ $\{(1, 5), (4, 1)\}$

พิสูจน์ ขั้นแรกแบ่งเป็น 3 กรณี ได้ดังนี้

กรณี 1 A เป็น $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 4), (1, 5)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$ หรือ $\{(4, 4), (4, 5)\}$

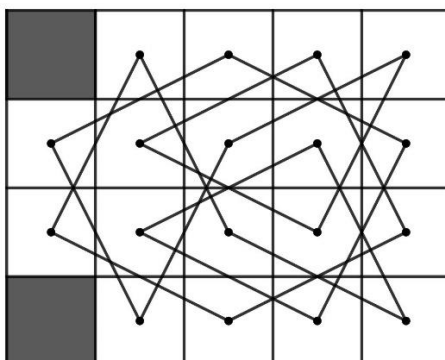
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (1, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.6 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (1, 2)\}$



รูปที่ 2.6 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (1, 2)\}$

กรณี 2 A เป็น $\{(1, 1), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 5)\}$

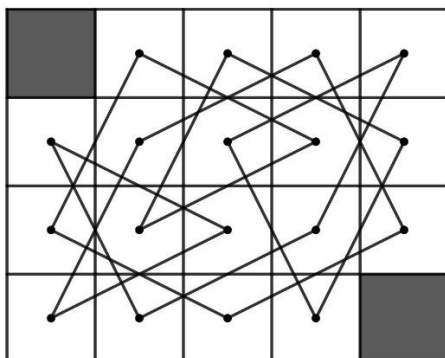
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.7 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 2.7 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 3 A เป็น $\{(1, 1), (4, 5)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 1)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.8 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 5)\}$

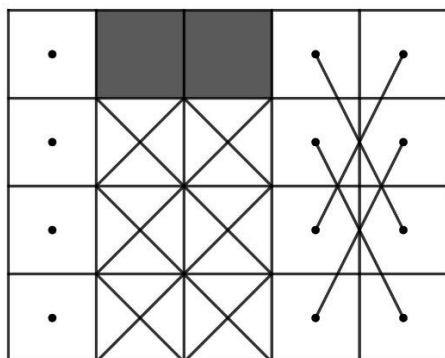


รูปที่ 2.8 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 5)\}$

ขั้นต่อมาแบ่งเป็น 7 กรณี ได้ดังนี้

กรณี 1 A เป็น $\{(1, 2), (1, 3)\}$, $\{(1, 3), (1, 4)\}$, $\{(4, 2), (4, 3)\}$ หรือ $\{(4, 3), (4, 4)\}$

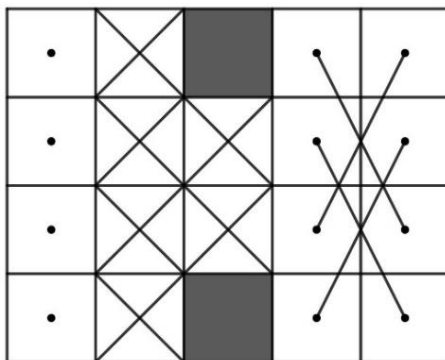
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 2), (1, 3)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$ จากรูปที่ 2.9 จะได้ว่า $w((G(4, 5) - \{(1, 2), (1, 3)\}) - S) = 8 > 6 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 2), (1, 3)\}$



รูปที่ 2.9 $w((G(4, 5) - \{(1, 2), (1, 3)\}) - S) = 8$

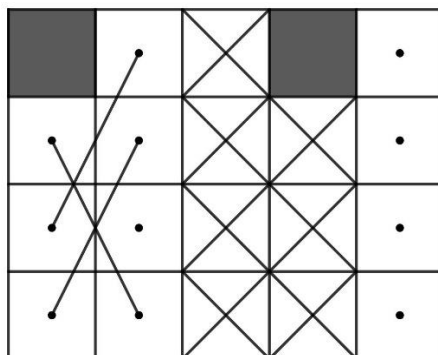
กรณี 2 A เป็น $\{(1, 3), (4, 3)\}$

ให้ $S = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$ จากรูปที่ 2.10 จะได้ว่า $w((G(4, 5) - \{(1, 3), (4, 3)\}) - S) = 8 > 6 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

รูปที่ 2.10 $w((G(4,5) - \{(1, 3), (4, 3)\}) - S) = 8$

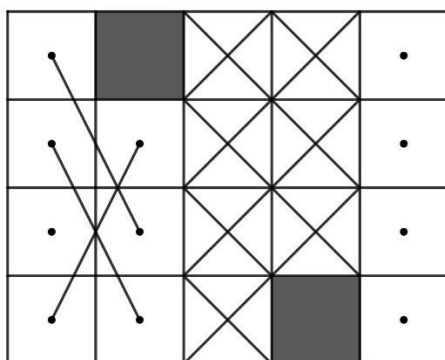
กรณี 3 A เป็น $\{(1, 1), (1, 4)\}, \{(1, 2), (1, 5)\}, \{(4, 1), (4, 4)\}$ หรือ $\{(4, 2), (4, 5)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (1, 4)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.11 จะได้ว่า $w((G(4, 5) - \{(1, 1), (1, 4)\}) - S) = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (1, 4)\}$

รูปที่ 2.11 $w((G(4, 3) - \{(1, 1), (1, 4)\}) - S) = 8$

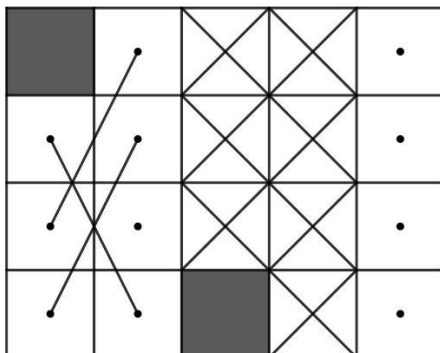
กรณี 4 A เป็น $\{(1, 2), (4, 4)\}$ หรือ $\{(1, 4), (4, 2)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 2), (4, 4)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ จากรูปที่ 2.12 จะได้ว่า $w((G(4, 5) - \{(1, 2), (4, 4)\}) - S) = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 2), (4, 4)\}$

รูปที่ 2.12 $w((G(4, 5) - \{(1, 2), (4, 4)\}) - S) = 8$

กรณี 5 A เป็น $\{(1, 1), (4, 3)\}, \{(1, 3), (4, 1)\}, \{(1, 3), (4, 5)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 3)\}$

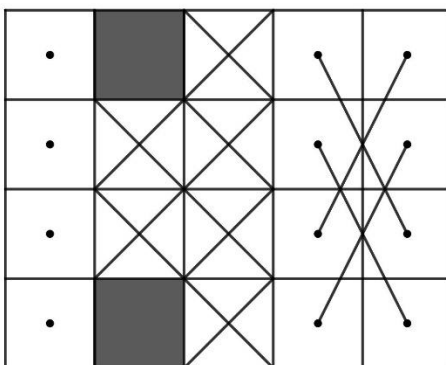
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 3)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.13 จะได้ว่า $w((G(4, 5) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S) = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 1), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.13 $w((G(4, 5) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S) = 8$

กรณี 6 A เป็น $\{(1, 2), (4, 2)\}$ หรือ $\{(1, 4), (4, 4)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 5) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.14 จะได้ว่า $w((G(4, 5) - \{(1, 2), (4, 2)\}) - S) = 8 > 6 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - \{(1, 2), (4, 2)\}$



รูปที่ 2.14 $w((G(4, 5) - \{(1, 2), (4, 2)\}) - S) = 8$

กรณี 7 ถ้า A เป็นเซตของสองช่องอื่น ๆ ของ $CB(4, 5)$ ที่ไม่ใช่ $\{(1, 1), (1, 2)\}, \{(1, 4), (1, 5)\}, \{(4, 1), (4, 2)\}, \{(4, 4), (4, 5)\}, \{(1, 1), (4, 1)\}, \{(1, 5), (4, 5)\}, \{(1, 1), (4, 5)\}$ และ $\{(1, 5), (4, 1)\}$ และไม่อยู่ในกรณีที่ 1 ถึง 6 แล้วจะเป็นสองช่องที่มีช่องใดช่องหนึ่งอยู่ในแถวที่ 2 หรือ 3 หรือเป็นสองช่องที่มีสีเดียวกันทั้งคู่ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 5) - A$ ดังกล่าว

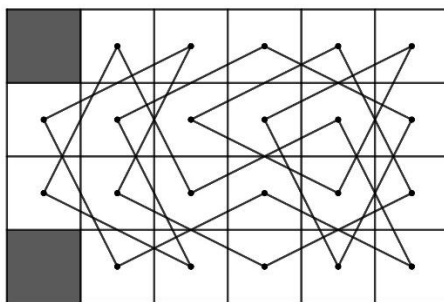


ทฤษฎีบท 2.5 มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - A$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตใดเซตหนึ่งต่อไปนี้ $\{(1, 1), (4, 1)\}$, $\{(1, 6), (4, 6)\}$, $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 5), (1, 6)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$, $\{(4, 5), (4, 6)\}$, $\{(1, 2), (4, 2)\}$, $\{(1, 5), (4, 5)\}$, $\{(1, 1), (1, 6)\}$, $\{(4, 1), (4, 6)\}$, $\{(1, 1), (4, 5)\}$, $\{(1, 2), (4, 6)\}$, $\{(1, 5), (4, 1)\}$ และ $\{(1, 6), (4, 2)\}$

พิสูจน์ ชั้นแรกแบ่งเป็น 5 กรณี ได้ดังนี้

กรณี 1 A เป็น $\{(1, 1), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 6)\}$

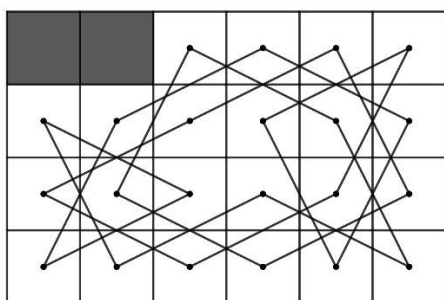
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.15 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 2.15 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 2 A เป็น $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 5), (1, 6)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$ หรือ $\{(4, 5), (4, 6)\}$

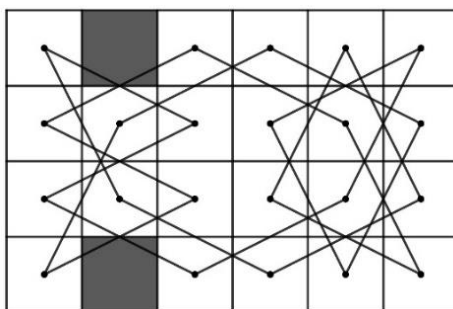
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.16 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 2)\}$



รูปที่ 2.16 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 2)\}$

กรณี 3 A เป็น $\{(1, 2), (4, 2)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 5)\}$

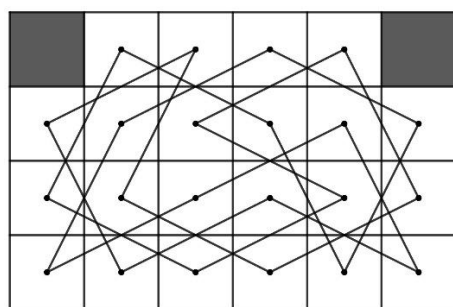
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.17 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (4, 2)\}$



รูปที่ 2.17 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

กรณี 4 A เป็น $\{(1, 1), (1, 6)\}$ หรือ $\{(4, 1), (4, 6)\}$

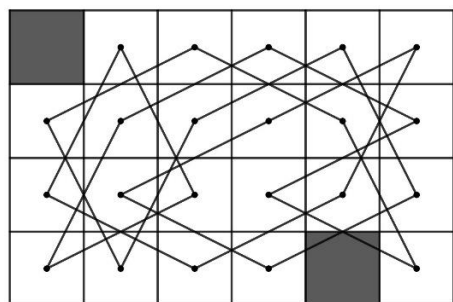
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 6)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.18 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 6)\}$



รูปที่ 2.18 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 6)\}$

กรณี 5 A เป็น $\{(1, 1), (4, 5)\}$, $\{(1, 2), (4, 6)\}$, $\{(1, 5), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 2)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.19 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 5)\}$

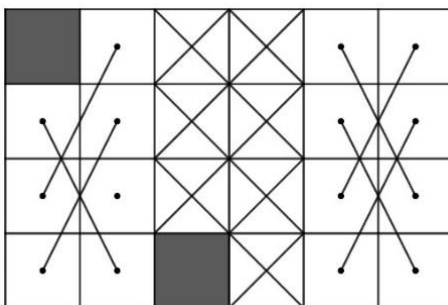


รูปที่ 2.19 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 5)\}$

ขั้นต่อมาแบ่งเป็น 7 กรณี ได้ดังนี้

กรณี 1 A เป็น $\{(1, 1), (4, 3)\}, \{(1, 3), (4, 1)\}, \{(1, 4), (4, 6)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 4)\}$

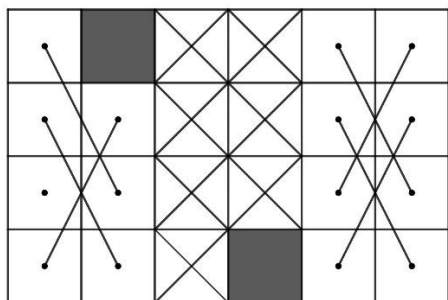
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 3)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.20 จะได้ว่า $w(G(4, 6) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.20 $w(G(4, 6) - \{(1, 1), (4, 3)\}) - S = 8$

กรณี 2 A เป็น $\{(1, 2), (4, 4)\}, \{(1, 3), (4, 5)\}, \{(1, 4), (4, 2)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 3)\}$

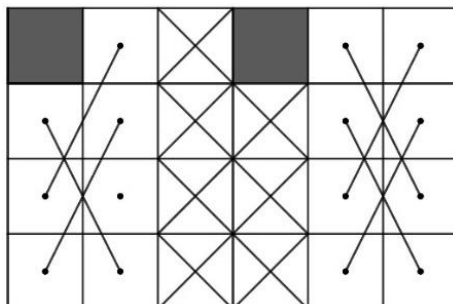
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (4, 4)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ จากรูปที่ 2.21 จะได้ว่า $w(G(4, 6) - \{(1, 2), (4, 4)\}) - S = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (4, 4)\}$



รูปที่ 2.21 $w(G(4, 6) - \{(1, 2), (4, 4)\}) - S = 8$

กรณี 3 A เป็น $\{(1, 1), (1, 4)\}, \{(1, 3), (1, 6)\}, \{(4, 1), (4, 4)\}$ หรือ $\{(4, 3), (4, 6)\}$

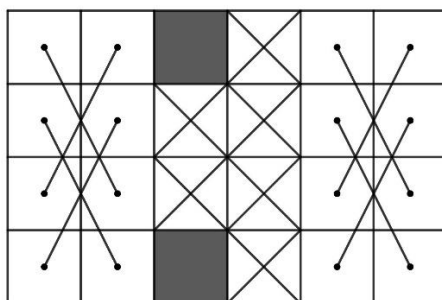
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 4)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.22 จะได้ว่า $w((G(4, 6) - \{(1, 1), (1, 4)\}) - S) = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 1), (1, 4)\}$



รูปที่ 2.22 $w((G(4, 6) - \{(1, 1), (1, 4)\}) - S) = 8$

กรณี 4 A เป็น $\{(1, 3), (4, 3)\}$ หรือ $\{(1, 4), (4, 4)\}$

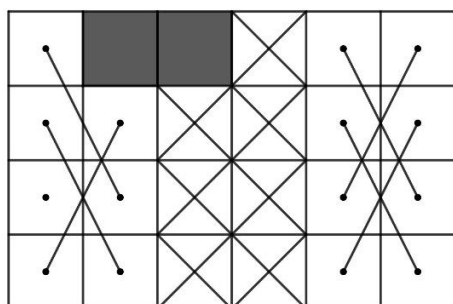
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.23 จะได้ว่า $w((G(4, 6) - \{(1, 3), (4, 3)\}) - S) = 8 > 6 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 3), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.23 $w((G(4, 6) - \{(1, 3), (4, 3)\}) - S) = 8$

กรณี 5 A เป็น $\{(1, 2), (1, 3)\}, \{(1, 4), (1, 5)\}, \{(4, 2), (4, 3)\}$ หรือ $\{(4, 4), (4, 5)\}$

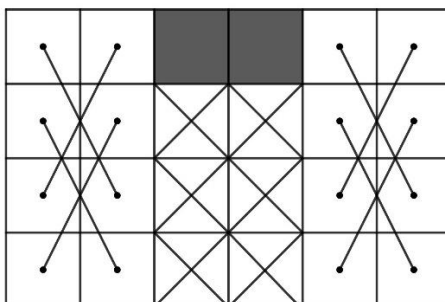
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (1, 3)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.24 จะได้ว่า $w((G(4, 6) - \{(1, 2), (1, 3)\}) - S) = 8 > 7 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 2), (1, 3)\}$



รูปที่ 2.24 $w((G(4, 6) - \{(1, 2), (1, 3)\}) - S) = 8$

กรณี 6 A เป็น $\{(1, 3), (1, 4)\}$ หรือ $\{(4, 3), (4, 4)\}$

จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 6) - \{(1, 3), (1, 4)\}$ เท่านั้น ให้ $S = \{(2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ จากรูปที่ 2.25 จะได้ว่า $w(G(4, 6) - \{(1, 3), (1, 4)\}) - S) = 8 > 6 = |S|$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่าไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - \{(1, 3), (1, 4)\}$



รูปที่ 2.25 $w(G(4, 6) - \{(1, 3), (1, 4)\}) - S) = 8$

กรณี 7 ถ้า A เป็นเซตของสองช่องอื่น ๆ ของ $CB(4, 6)$ ที่ไม่ใช่ $\{(1, 1), (4, 1)\}, \{(1, 6), (4, 6)\}, \{(1, 1), (1, 2)\}, \{(1, 5), (1, 6)\}, \{(4, 1), (4, 2)\}, \{(4, 5), (4, 6)\}, \{(1, 2), (4, 2)\}, \{(1, 5), (4, 5)\}, \{(1, 1), (1, 6)\}, \{(4, 1), (4, 6)\}, \{(1, 1), (4, 5)\}, \{(1, 2), (4, 6)\}, \{(1, 5), (4, 1)\}$ และ $\{(1, 6), (4, 2)\}$ และไม่อยู่ในกรณีที่ 1 ถึง 6 แล้วจะเป็นสองช่องที่มีช่องใดช่องหนึ่งในแถวที่ 2 หรือ 3 หรือเป็นสองช่องที่มีสีเดียวกันทั้งคู่ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะไม่มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 6) - A$ ดังกล่าว



ทฤษฎีบท 2.6 ให้ $1 \leq b, d \leq 7$

มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 7) - A$ ก็ต่อเมื่อ

(i) $A = \{(1, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคู่ หรือ

(ii) $A = \{(1, b), (1, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคี่ หรือ

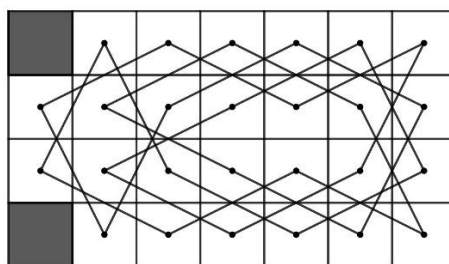
(iii) $A = \{(4, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคี่

พิสูจน์

กรณี 1 $A = \{(1, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคู่

กรณี 1.1 A เป็น $\{(1, 1), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 7)\}$

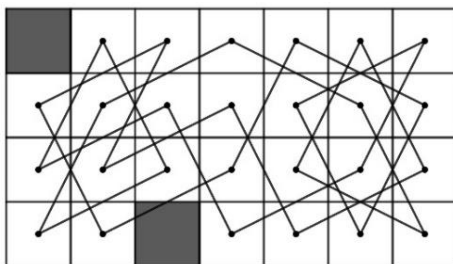
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.26 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 2.26 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 1.2 A เป็น $\{(1, 1), (4, 3)\}$, $\{(1, 3), (4, 1)\}$, $\{(1, 5), (4, 7)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 5)\}$

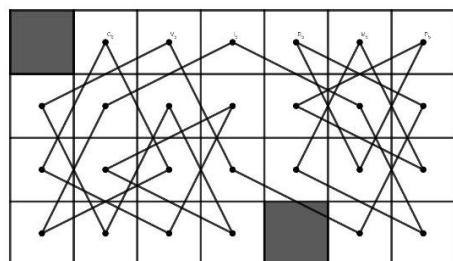
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 3)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.27 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.27 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 3)\}$

กรณี 1.3 A เป็น $\{(1, 1), (4, 5)\}$, $\{(1, 3), (4, 7)\}$, $\{(1, 5), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 3)\}$

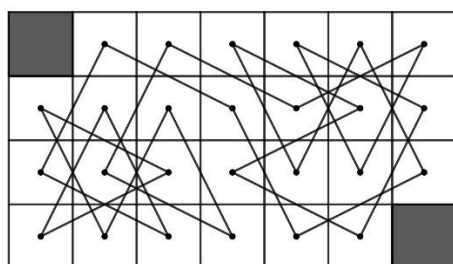
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.28 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 5)\}$



รูปที่ 2.28 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 5)\}$

กรณี 1.4 A เป็น $\{(1, 1), (4, 7)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 1)\}$

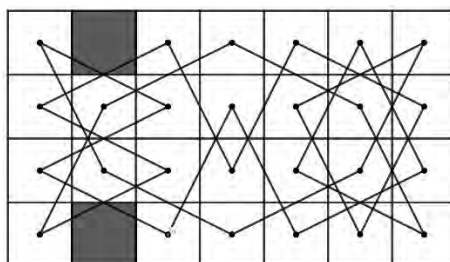
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 7)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.29 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 7)\}$



รูปที่ 2.29 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (4, 7)\}$

กรณี 1.5 A เป็น $\{(1, 2), (4, 2)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 6)\}$

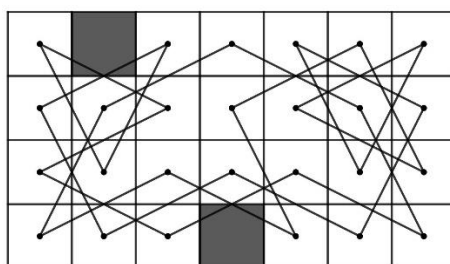
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.30 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 2)\}$



รูปที่ 2.30 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

กรณี 1.6 A เป็น $\{(1, 2), (4, 4)\}$, $\{(1, 4), (4, 2)\}$, $\{(1, 4), (4, 6)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 4)\}$

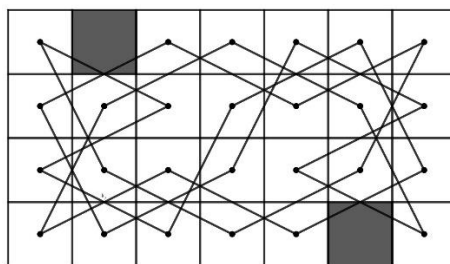
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.31 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 4)\}$



รูปที่ 2.31 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 4)\}$

กรณี 1.7 A $\{(1, 2), (4, 6)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 2)\}$

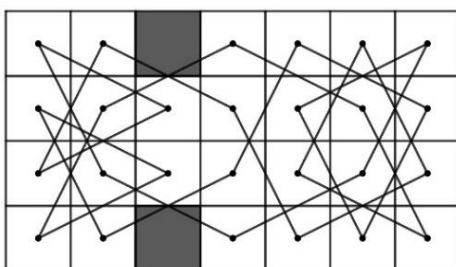
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 6)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.32 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 6)\}$



รูปที่ 2.32 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (4, 6)\}$

กรณี 1.8 A เป็น $\{(1, 3), (4, 3)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 5)\}$

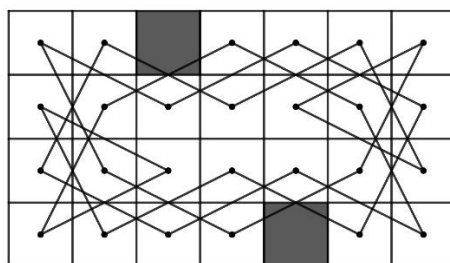
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.33 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.33 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

กรณี 1.9 A เป็น $\{(1, 3), (4, 5)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 3)\}$

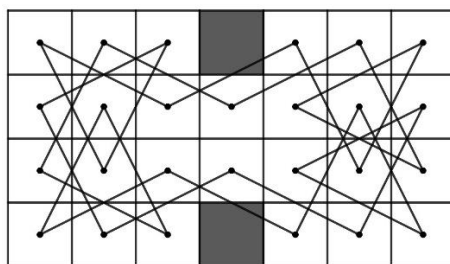
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (4, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.34 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (4, 5)\}$



รูปที่ 2.34 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (4, 5)\}$

กรณี 1.10 $A = \{(1, 4), (4, 4)\}$

พิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ซึ่งรูปที่ 2.35 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 4), (4, 4)\}$

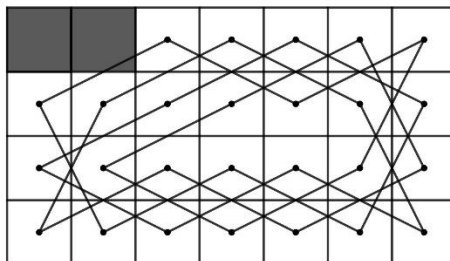


รูปที่ 2.35 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 4), (4, 4)\}$

กรณี 2 $A = \{(1, b), (1, d)\}$ หรือ $\{(4, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคี่

กรณี 2.1 A เป็น $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 6), (1, 7)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$ หรือ $\{(4, 6), (4, 7)\}$

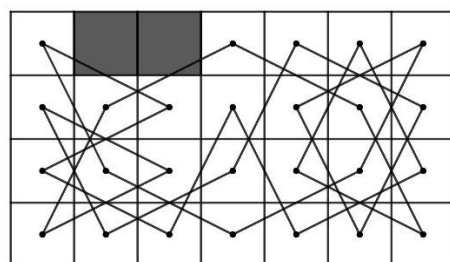
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.36 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 2)\}$



รูปที่ 2.36 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 2)\}$

กรณี 2.2 A เป็น $\{(1, 2), (1, 3)\}$, $\{(1, 5), (1, 6)\}$, $\{(4, 2), (4, 3)\}$ หรือ $\{(4, 5), (4, 6)\}$

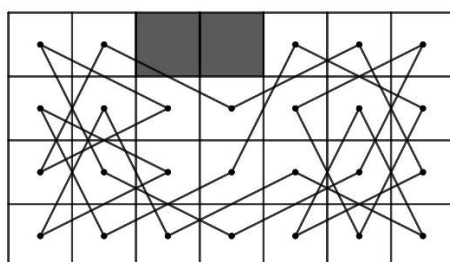
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (1, 3)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.37 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (1, 3)\}$



รูปที่ 2.37 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (1, 3)\}$

กรณี 2.3 A เป็น $\{(1, 3), (1, 4)\}$, $\{(1, 4), (1, 5)\}$, $\{(4, 3), (4, 4)\}$ หรือ $\{(4, 4), (4, 5)\}$

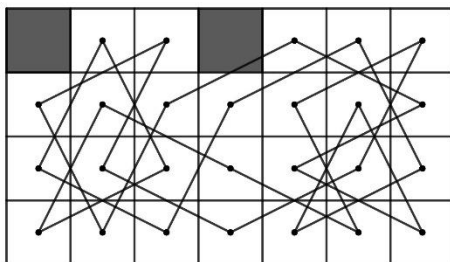
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (1, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.38 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (1, 4)\}$



รูปที่ 2.38 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 3), (1, 4)\}$

กรณี 2.4 A เป็น $\{(1, 1), (1, 4)\}, \{(1, 4), (1, 7)\}, \{(4, 1), (4, 4)\}$ หรือ $\{(4, 4), (4, 7)\}$

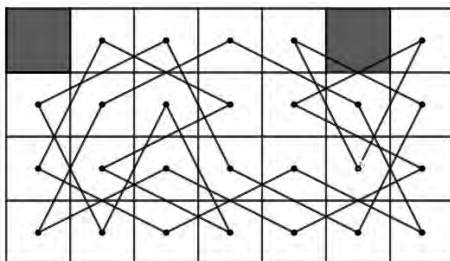
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.39 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 4)\}$



รูปที่ 2.39 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 4)\}$

กรณี 2.5 A เป็น $\{(1, 1), (1, 6)\}, \{(1, 2), (1, 7)\}, \{(4, 1), (4, 6)\}$ หรือ $\{(4, 2), (4, 7)\}$

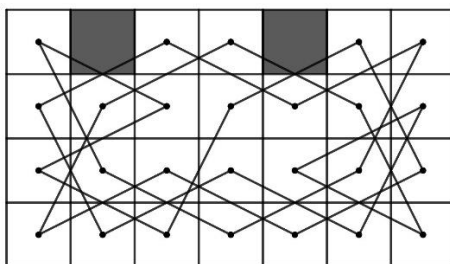
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 6)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.40 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 6)\}$



รูปที่ 2.40 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 1), (1, 6)\}$

กรณี 2.6 A เป็น $\{(1, 2), (1, 5)\}, \{(1, 3), (1, 6)\}, \{(4, 2), (4, 5)\}$ หรือ $\{(4, 3), (4, 6)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (1, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.41 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (1, 5)\}$



รูปที่ 2.41 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 7) - \{(1, 2), (1, 5)\}$

กรณี 3 ถ้า A เป็นเซตของช่องสองช่องอื่น ๆ ที่ไม่อยู่ใน กรณี 1 และ 2 แล้วจะเป็นสองช่องที่มีช่องใดช่องหนึ่ง อยู่ในแถวที่ 2 หรือ 3 หรือเป็นสองช่องที่มีสีเดียวกันทั้งคู่ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะไม่มีการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 3) - A$ ดังกล่าว



ทฤษฎีบท 2.7 ให้ $1 \leq b, d \leq 8$

มีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - A$ ก็ต่อเมื่อ

(i) $A = \{(1, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคู่ หรือ

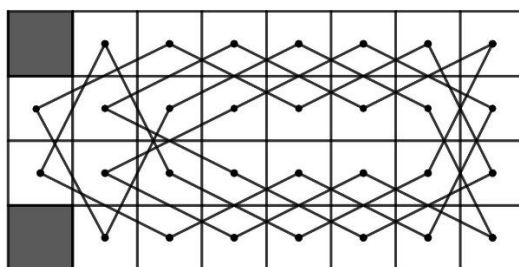
(ii) $A = \{(1, b), (1, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคี่ หรือ

(iii) $A = \{(4, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคี่

พิสูจน์ กรณี 1 $A = \{(1, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคู่

กรณี 1.1 A เป็น $\{(1, 1), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 8), (4, 8)\}$

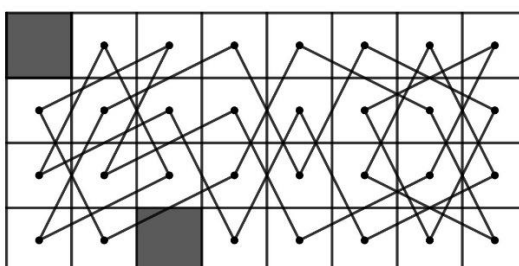
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.42 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 2.42 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 1.2 A เป็น $\{(1, 1), (4, 3)\}$, $\{(1, 3), (4, 1)\}$, $\{(1, 6), (4, 8)\}$ หรือ $\{(1, 8), (4, 6)\}$

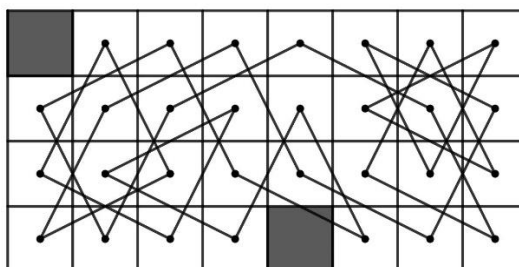
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 3)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.43 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.43 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 3)\}$

กรณี 1.3 A เป็น $\{(1, 1), (4, 5)\}$, $\{(1, 4), (4, 8)\}$, $\{(1, 5), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 8), (4, 4)\}$

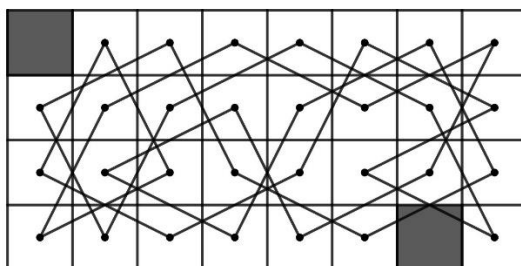
จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.44 แสดงการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 5)\}$



รูปที่ 2.44 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 5)\}$

กรณี 1.4 A เป็น $\{(1, 1), (4, 7)\}$, $\{(1, 2), (4, 8)\}$, $\{(1, 7), (4, 1)\}$ หรือ $\{(1, 8), (4, 2)\}$

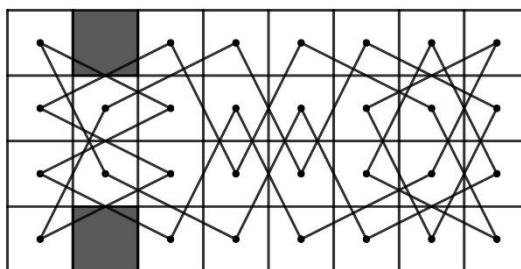
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 7)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.45 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 7)\}$



รูปที่ 3.45 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (4, 7)\}$

กรณี 1.5 A เป็น $\{(1, 2), (4, 2)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 7)\}$

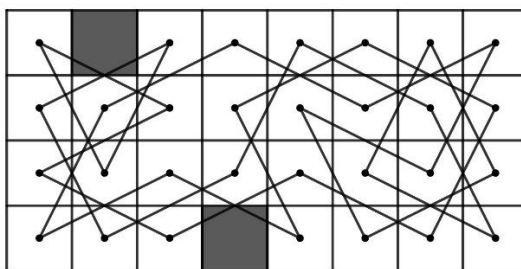
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.46 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 2)\}$



รูปที่ 2.46 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

กรณี 1.6 A เป็น $\{(1, 2), (4, 4)\}$, $\{(1, 4), (4, 2)\}$, $\{(1, 5), (4, 7)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 5)\}$

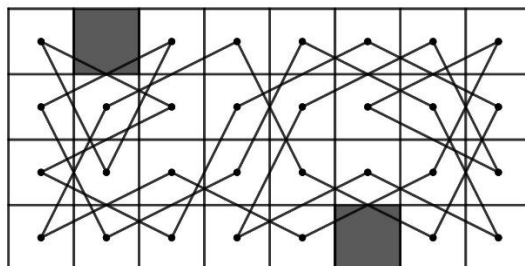
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.47 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 4)\}$



รูปที่ 3.47 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 4)\}$

กรณี 1.7 A เป็น $\{(1, 2), (4, 6)\}$, $\{(1, 3), (4, 7)\}$, $\{(1, 6), (4, 2)\}$ หรือ $\{(1, 7), (4, 3)\}$

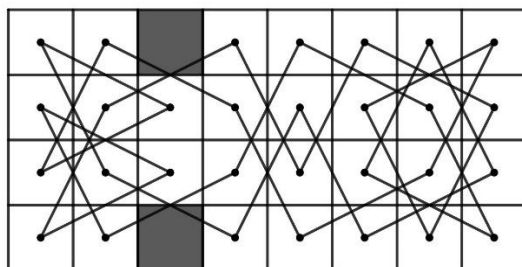
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 6)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.48 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 6)\}$



รูปที่ 3.48 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 6)\}$

กรณี 1.8 A เป็น $\{(1, 3), (4, 3)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 6)\}$

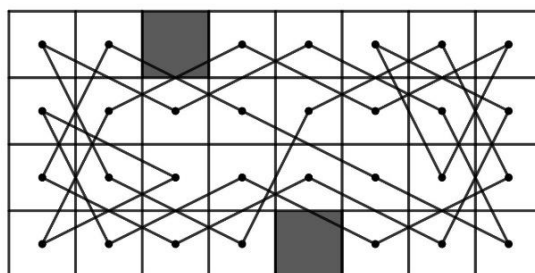
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.49 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (4, 3)\}$



รูปที่ 2.49 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

กรณี 1.9 A เป็น $\{(1, 3), (4, 5)\}$, $\{(1, 4), (4, 6)\}$, $\{(1, 5), (4, 3)\}$ หรือ $\{(1, 6), (4, 4)\}$

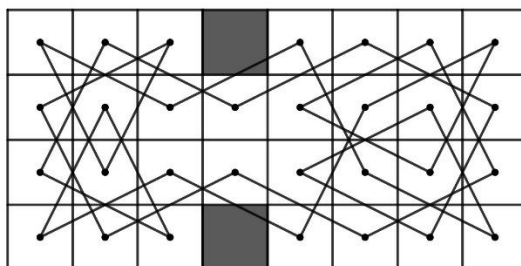
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (4, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.50 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (4, 5)\}$



รูปที่ 2.50 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (4, 5)\}$

กรณี 1.10 A เป็น $\{(1, 4), (4, 4)\}$ หรือ $\{(1, 5), (4, 5)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.51 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 4), (4, 4)\}$

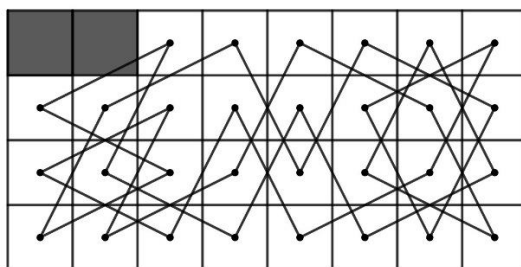


รูปที่ 2.51 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 4), (4, 4)\}$

กรณี 2 A = $\{(1, b), (1, d)\}$ หรือ $\{(4, b), (4, d)\}$ เมื่อ $b + d$ เป็นจำนวนนับคี่

กรณี 2.1 A เป็น $\{(1, 1), (1, 2)\}$, $\{(1, 7), (1, 8)\}$, $\{(4, 1), (4, 2)\}$ หรือ $\{(4, 7), (4, 8)\}$

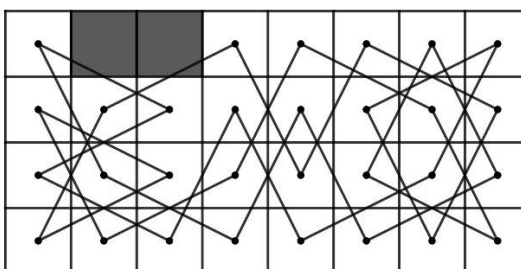
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 2)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.52 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 2)\}$



รูปที่ 2.52 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 2)\}$

กรณี 2.2 A เป็น $\{(1, 2), (1, 3)\}$, $\{(1, 6), (1, 7)\}$, $\{(4, 2), (4, 3)\}$ หรือ $\{(4, 6), (4, 7)\}$

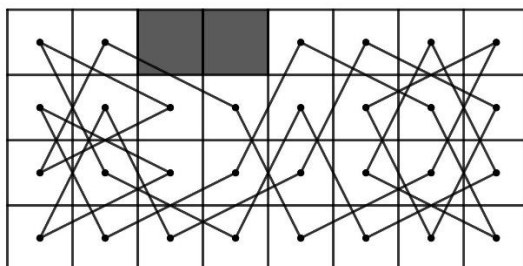
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 3)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.53 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 3)\}$



รูปที่ 2.53 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 3)\}$

กรณี 2.3 A เป็น $\{(1, 3), (1, 4)\}, \{(1, 5), (1, 6)\}, \{(4, 3), (4, 4)\}$ หรือ $\{(4, 5), (4, 6)\}$

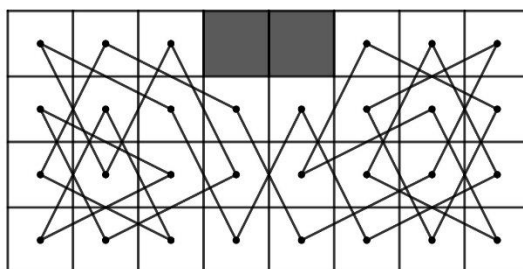
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.54 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 4)\}$



รูปที่ 3.54 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 4)\}$

กรณี 2.4 A เป็น $\{(1, 4), (1, 5)\}$ หรือ $\{(4, 4), (4, 5)\}$

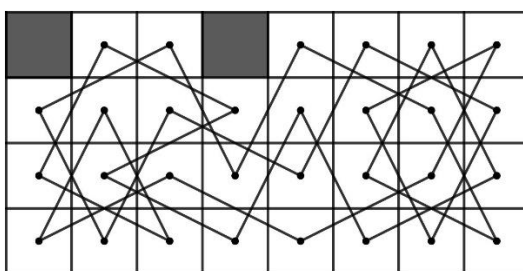
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 4), (1, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.55 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 4), (1, 5)\}$



รูปที่ 3.55 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 4), (1, 5)\}$

กรณี 2.5 A เป็น $\{(1, 1), (1, 4)\}, \{(1, 5), (1, 8)\}, \{(4, 1), (4, 4)\}$ หรือ $\{(4, 5), (4, 8)\}$

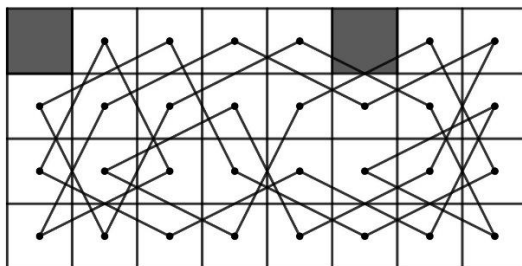
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 4)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.56 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 4)\}$



รูปที่ 2.56 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 4)\}$

กรณี 2.6 A เป็น $\{(1, 1), (1, 6)\}$, $\{(1, 3), (1, 8)\}$, $\{(4, 1), (4, 6)\}$ หรือ $\{(4, 3), (4, 8)\}$

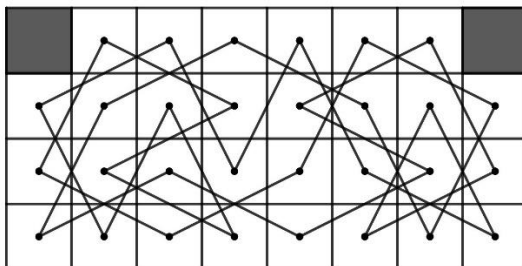
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 6)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.57 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 6)\}$



รูปที่ 2.57 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 6)\}$

กรณี 2.7 A เป็น $\{(1, 1), (1, 8)\}$ หรือ $\{(4, 1), (4, 8)\}$

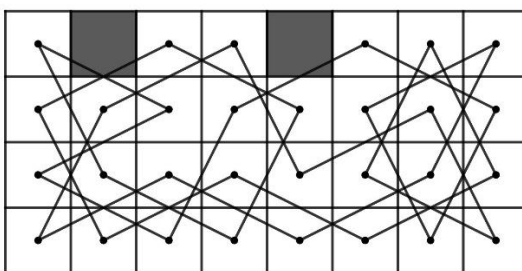
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 8)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.58 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 8)\}$



รูปที่ 2.58 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 1), (1, 8)\}$

กรณี 2.8 A เป็น $\{(1, 2), (1, 5)\}$, $\{(1, 4), (1, 7)\}$, $\{(4, 2), (4, 5)\}$ หรือ $\{(4, 4), (4, 7)\}$

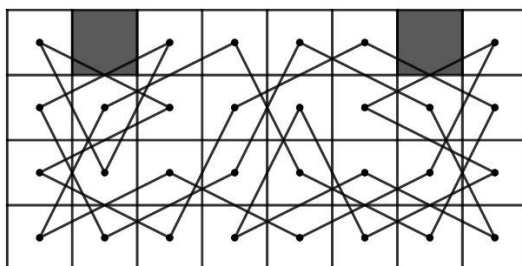
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 5)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.59 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 5)\}$



รูปที่ 2.59 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 5)\}$

กรณี 2.9 A เป็น $\{(1, 2), (1, 7)\}$ หรือ $\{(4, 2), (4, 7)\}$

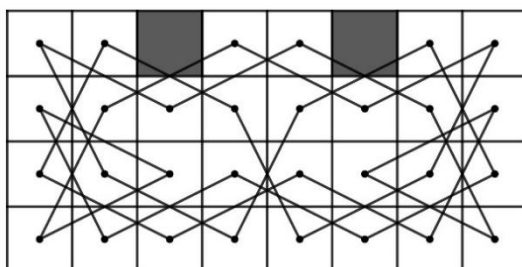
จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 7)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.60 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 7)\}$



รูปที่ 2.60 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (1, 7)\}$

กรณี 2.10 A เป็น $\{(1, 3), (1, 6)\}$ หรือ $\{(4, 3), (4, 6)\}$

จากความสัมพันธ์ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 6)\}$ เท่านั้น ซึ่งรูปที่ 2.61 แสดงการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 6)\}$



รูปที่ 2.61 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 3), (1, 6)\}$

กรณี 3 ถ้า A เป็นเซตของช่องสองช่องอื่น ๆ ที่ไม่อยู่ใน กรณี 1 และ 2 แล้วจะเป็นสองช่องที่มีช่องใดช่องหนึ่ง อยู่ในแถวที่ 2 หรือ 3 หรือเป็นสองช่องที่มีสีเดียวกันทั้งคู่ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะไม่มีการเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 3) - A$ ดังกล่าว



บทที่ 3

CB(4, n) เมื่อ $n \geq 9$

ในบทนี้จะพยายามพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ของ [1] บางส่วน โดยพิจารณาตำแหน่งช่อง 2 ช่องบางตำแหน่งที่เมื่อลบออกจาก $CB(4, n)$ แล้วทำให้มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานที่เหลืออยู่

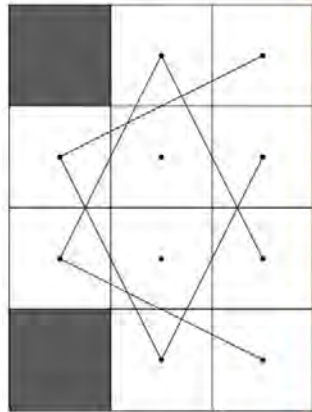
ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 ให้ n, b เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 9$ และ $1 \leq b \leq n$ จะมีการเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, b), (4, b)\}$ เมื่อ $1 \leq b \leq 4$ หรือ $n - 3 \leq b \leq n$

พิสูจน์ ให้ n, b เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 9$ และ $1 \leq b \leq n$ จากความสมมาตร จึงเพียงพอที่จะพิจารณาบนเฉพาะ $1 \leq b \leq 4$

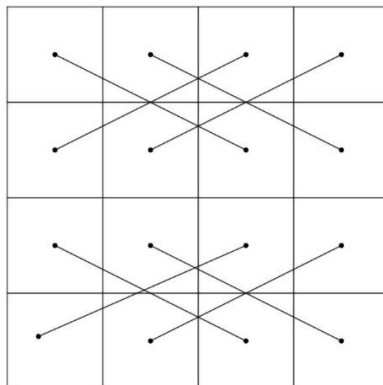
กรณี 1 $b = 1$

กรณี 1.1 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 5 + 4t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ออกเป็น $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ 1 อัน, $CB(4, 4)$ t อัน และ $CB(4, 2)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

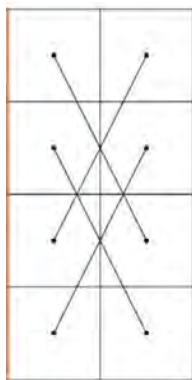
(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังรูปที่ 3.1 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 8 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.2 และ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.1 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 3.2 วิถี 8 เส้น บน $CB(4, 4)$

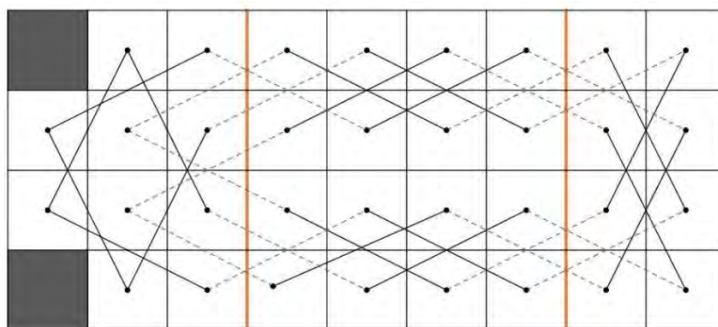
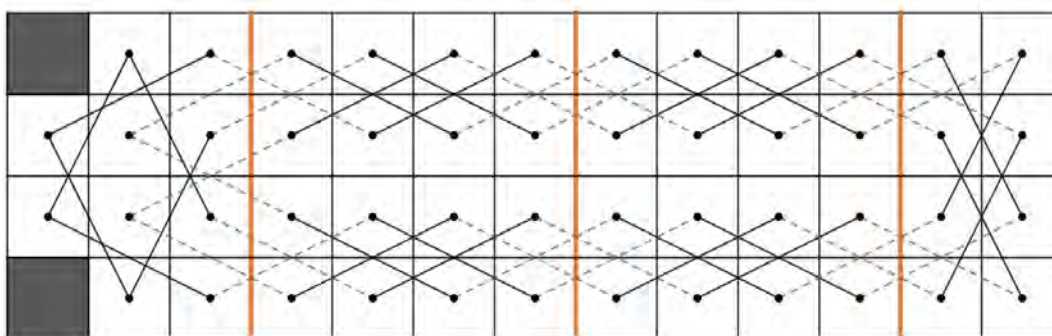
รูปที่ 3.3 วิธี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$

(ii) เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (2, 3), (3, 3)$ และ $(4, 3)$ ของ $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ กับจุดยอด $(2, 2), (1, 2), (4, 2)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 4)$ อันแรก ตามลำดับ จากนั้นเชื่อมจุดยอด $(2, 2)$ ของ $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ กับจุดยอด $(1, 1)$ และ $(3, 1)$ ของ $CB(4, 4)$ อันแรก และเชื่อมจุดยอด $(3, 2)$ ของ $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ กับจุดยอด $(2, 1)$ และ $(4, 1)$ ของ $CB(4, 4)$ อันแรก ดังรูปที่ 3.4

(iii) สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t - 1$ เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ และ $(4, 4)$ ของ $CB(4, 4)$ อันที่ i กับจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 4)$ อันที่ $i + 1$ ตามลำดับ

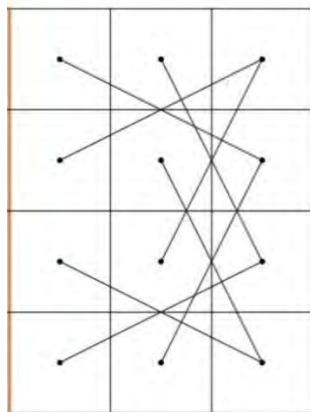
(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ และ $(4, 4)$ ของ $CB(4, 4)$ อันที่ t กับจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.4 และ 3.5 เมื่อ $n = 9$ และ 13 ตามลำดับ

รูปที่ 3.4 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ รูปที่ 3.5 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 13) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 1.2 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 6 + 4t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ออกเป็น $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ 1 อัน, $CB(4, 4) t$ อัน และ $CB(4, 3) 1$ อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังรูปที่ 3.1 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 8 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.2 และ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 3)$ ดังรูปที่ 3.6



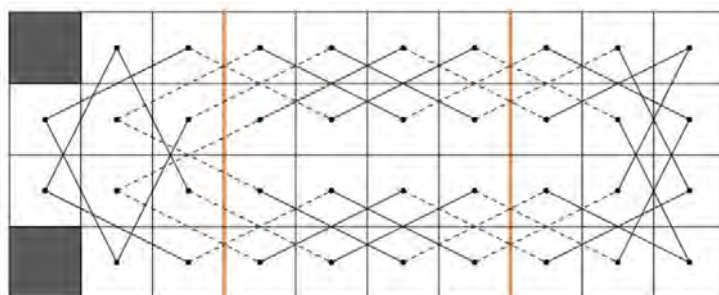
รูปที่ 3.6 วิถี 4 เส้น บน $CB(4, 3)$

(ii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (ii) ในกรณี 1.1

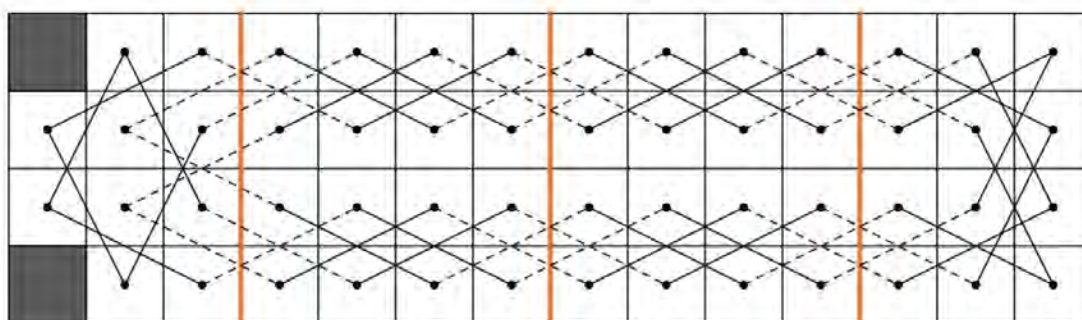
(iii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (iii) ในกรณี 1.1

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ และ $(4, 4)$ ของ $CB(4, 4)$ อันที่ t กับจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 3)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.7 และ 3.8 เมื่อ $n = 10$ และ 14 ตามลำดับ



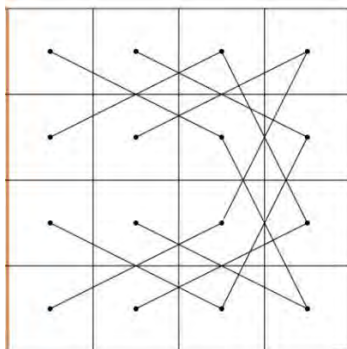
รูปที่ 3.7 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 3.8 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 14) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 1.3 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 7 + 4t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ออกเป็น $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ 1 อัน, $CB(4, 4) t$ อัน และ $CB(4, 4) 1$ อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังรูปที่ 3.1 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 8 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.2 และ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.9



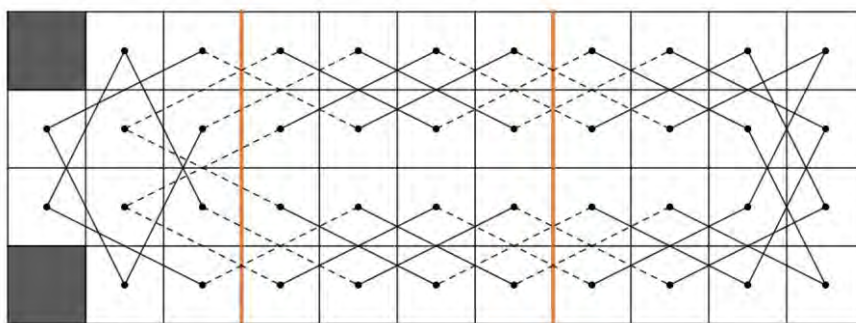
รูปที่ 3.9 วิถี 4 เส้น บน $CB(4, 4)$

(ii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (ii) ในกรณี 1.1

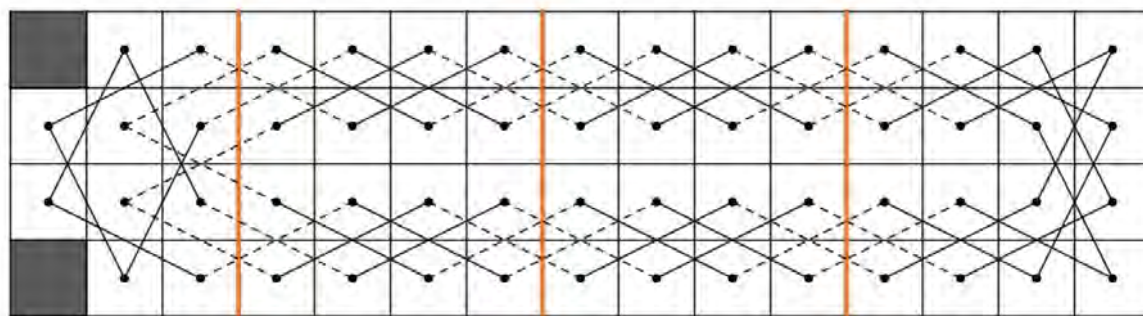
(iii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (iii) ในกรณี 1.1

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ และ $(4, 4)$ ของ $CB(4, 4)$ อันที่ t กับจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 4)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.10 และ 3.11 เมื่อ $n = 11$ และ 15 ตามลำดับ



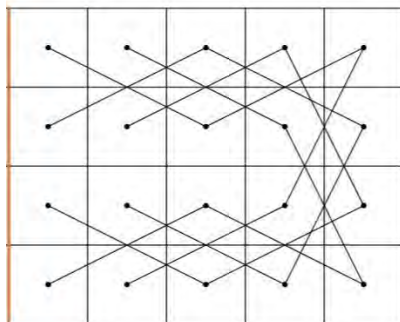
รูปที่ 3.10 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 1), (4, 1)\}$



รูปที่ 3.11 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 15) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

กรณี 1.4 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 8 + 4t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ออกเป็น $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ 1 อัน, $CB(4, 4) t$ อัน และ $CB(4, 5) 1$ อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังรูปที่ 3.1 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 8 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.2 และ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 5)$ ดังรูปที่ 3.12



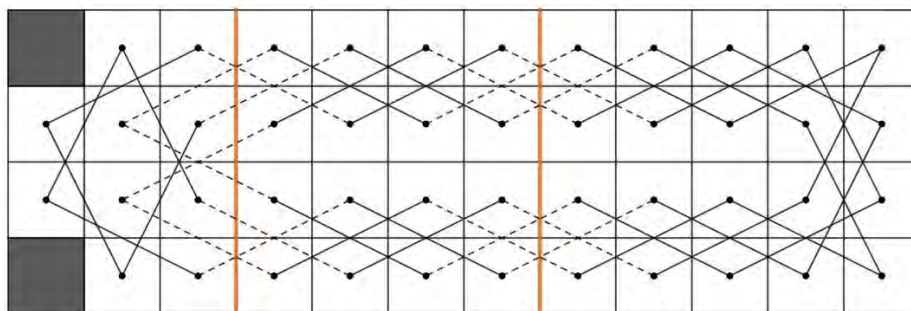
รูปที่ 3.12 วิถี 4 เส้น บน $CB(4, 5)$

(ii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (ii) ในกรณี 1.1

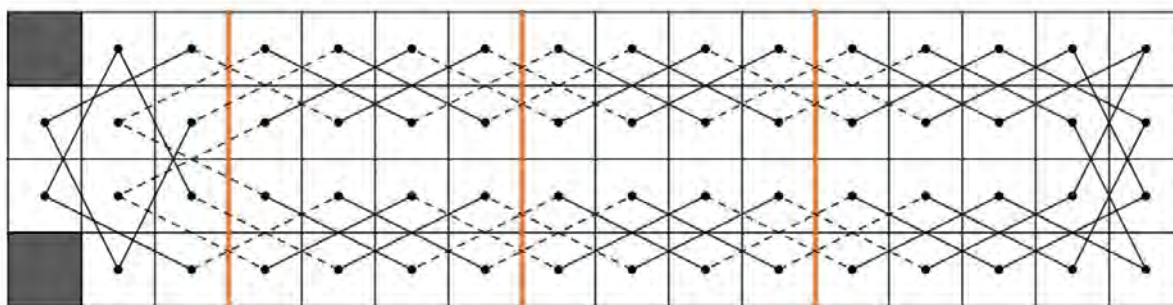
(iii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (iii) ในกรณี 1.1

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ และ $(4, 4)$ ของ $CB(4, 4)$ อันที่ t กับจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 5)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 1), (4, 1)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.13 และ 3.14 เมื่อ $n = 12$ และ 16 ตามลำดับ



รูปที่ 3.13 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 12) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

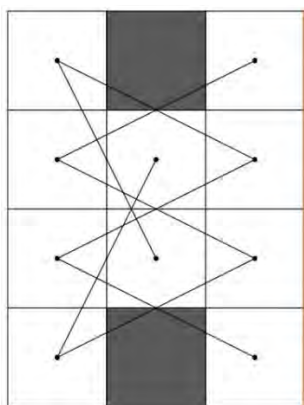


รูปที่ 3.14 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 16) - \{(1, 1), (4, 1)\}$

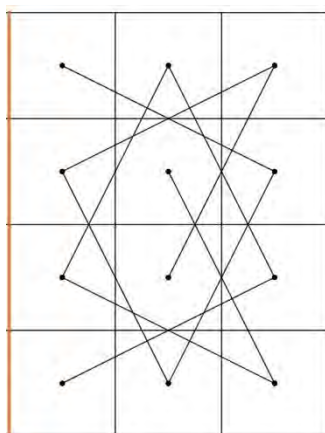
กรณี $2b = 2$

กรณี 2.1 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 6 + 2t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ออกเป็น $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ 1 อัน, $CB(4, 2)$ t อัน และ $CB(4, 3)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ดังรูปที่ 3.15 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3 และ สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$ ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.15 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$



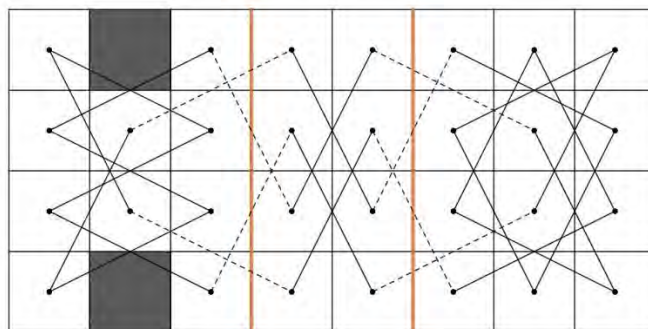
รูปที่ 3.16 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$

(ii) เชื่อมจุดยอด $(1, 3), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 3)$ ของ $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ กับจุดยอด $(3, 1), (1, 1), (4, 1)$ และ $(2, 1)$ ของ $CB(4, 2)$ อันแรก ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.17

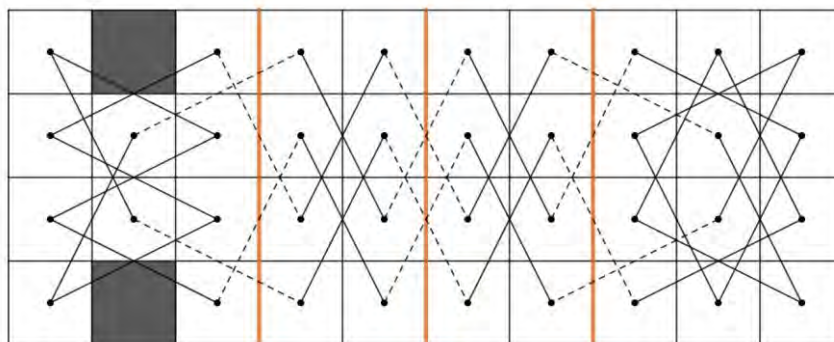
(iii) สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t - 1$ เชื่อมจุดยอด $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ i กับจุดยอด $(3, 1), (4, 1), (1, 1)$ และ $(2, 1)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ $i + 1$ ตามลำดับ

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ t กับจุดยอด $(2, 2), (4, 1), (1, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 3)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.17 และ 3.18 เมื่อ $n = 8$ และ 10 ตามลำดับ



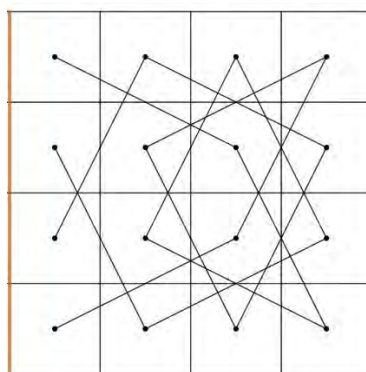
รูปที่ 3.17 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 8) - \{(1, 2), (4, 2)\}$



รูปที่ 3.18 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

กรณี 2.2 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 7 + 2t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ออกเป็น $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ 1 อัน, $CB(4, 2)$ t อัน และ $CB(4, 4)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ดังรูปที่ 3.15 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3 และ สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.19



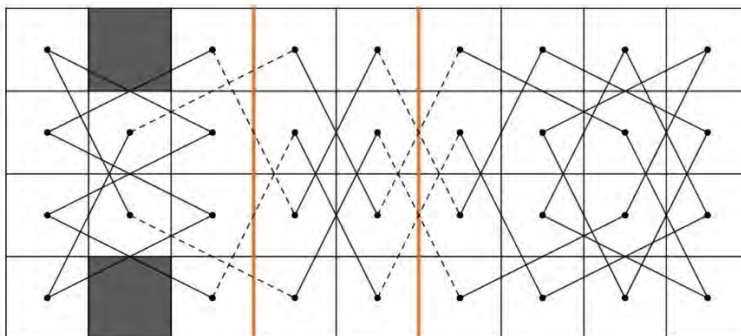
รูปที่ 3.19 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4)$

(ii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (ii) ในกรณี 2.1

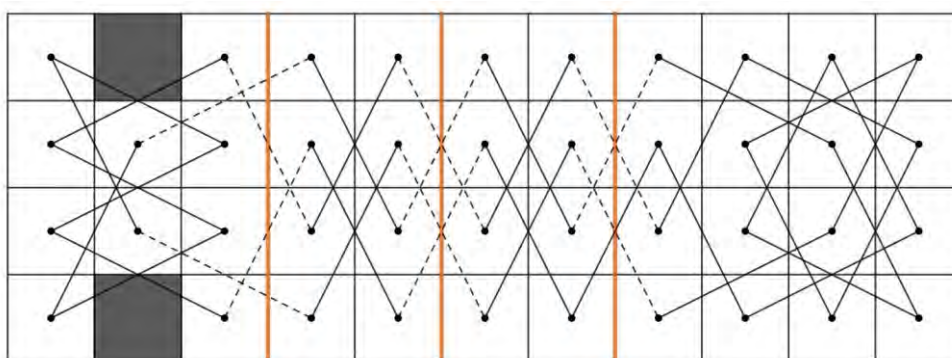
(iii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (iii) ในกรณี 2.1

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ t กับจุดยอด $(3, 1), (4, 1), (1, 1)$ และ $(2, 1)$ ของ $CB(4, 4)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 2), (4, 2)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.20 และ 3.21 เมื่อ $n = 9$ และ 11 ตามลำดับ



รูปที่ 3.20 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

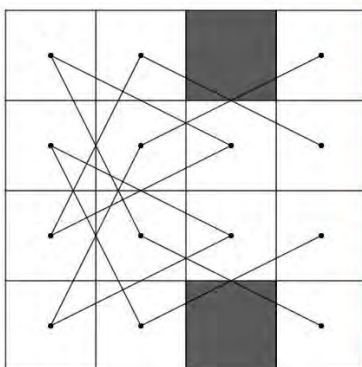


รูปที่ 3.21 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 2), (4, 2)\}$

กรณี 3 $b = 3$

กรณี 3.1 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 7 + 2t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ออกเป็น $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ 1 อัน, $CB(4, 2)$ t อัน และ $CB(4, 3)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินทางแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ดังรูปที่ 3.22 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3 และ สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$ ดังรูปที่ 3.16



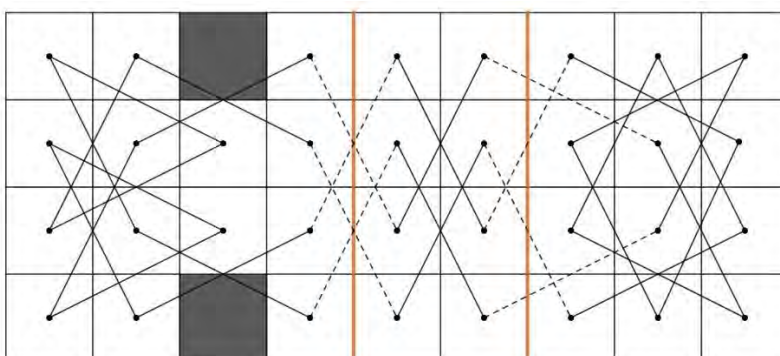
รูปที่ 3.22 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

(ii) เชื่อมจุดยอด $(1, 4), (2, 4), (3, 4)$ และ $(4, 4)$ ของ $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ กับจุดยอด $(3, 1), (4, 1), (1, 1)$ และ $(2, 1)$ ของ $CB(4, 2)$ อันแรก ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.23

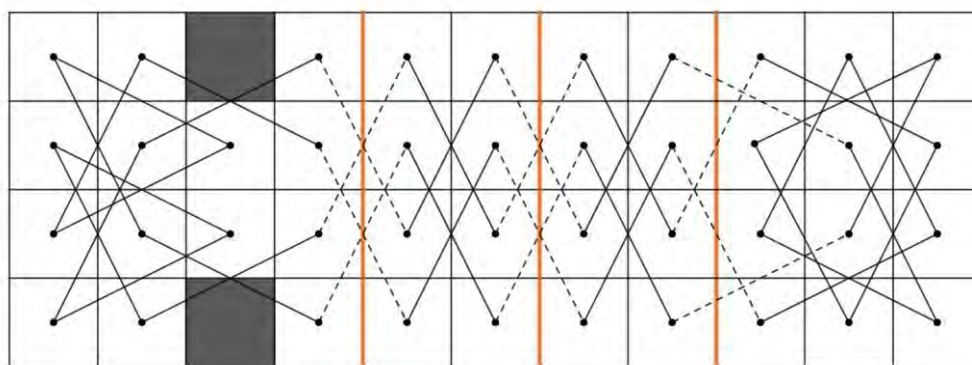
(iii) สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t - 1$ เชื่อมจุดยอด $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ i กับจุดยอด $(3, 1), (4, 1), (1, 1)$ และ $(2, 1)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ $i + 1$ ตามลำดับ

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ t กับจุดยอด $(2, 2), (4, 1), (1, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 3)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.23 และ 3.24 เมื่อ $n = 9$ และ 11 ตามลำดับ



รูปที่ 3.23 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 3), (4, 3)\}$



รูปที่ 3.24 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

กรณี 3.2 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 8 + 2t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ออกเป็น $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ 1 อัน, $CB(4, 2)$ t อัน และ $CB(4, 4)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

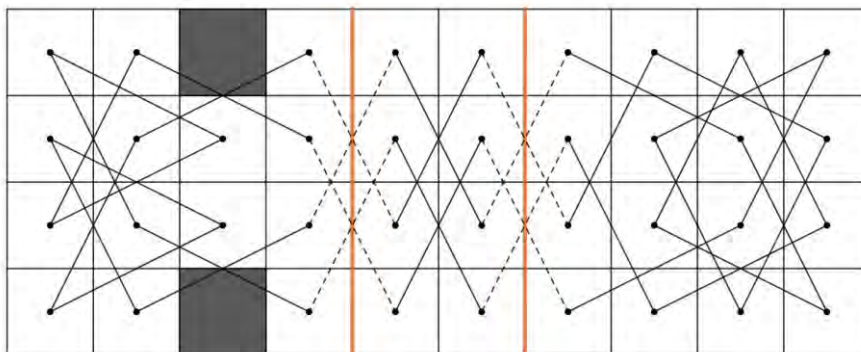
(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ดังรูปที่ 3.23 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3 และ สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.19

(ii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (ii) ในกรณี 3.1

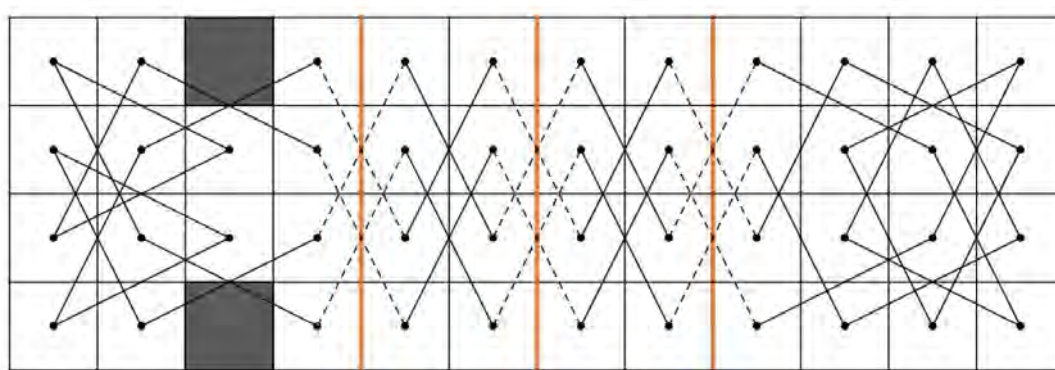
(iii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (iii) ในกรณี 3.1

(iv) เชื่อมจุดยอด $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ t กับจุดยอด $(3, 1), (4, 1), (1, 1)$ และ $(2, 1)$ ของ $CB(4, 4)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 3), (4, 3)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.25 และ 3.26 เมื่อ $n = 10$ และ 12 ตามลำดับ



รูปที่ 3.25 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

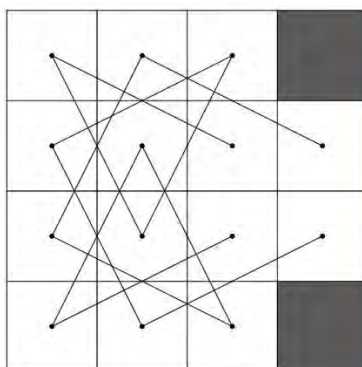


รูปที่ 3.26 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 12) - \{(1, 3), (4, 3)\}$

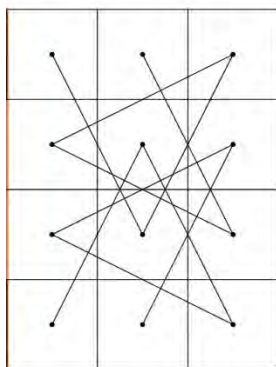
กรณี 4 $b = 4$

กรณี 4.1 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 7 + 2t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ออกเป็น $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ 1 อัน, $CB(4, 2)$ t อัน และ $CB(4, 3)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ดังรูปที่ 3.27 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3 และ สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$ ดังรูปที่ 3.28



รูปที่ 3.27 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$



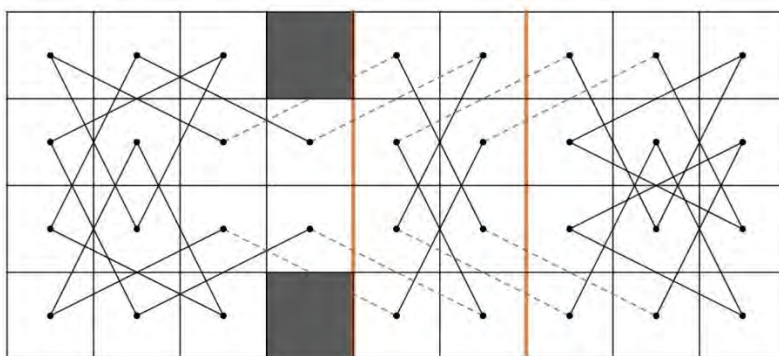
รูปที่ 3.28 วิธี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$

(ii) เชื่อมจุดยอด $(2, 3), (2, 4), (3, 3)$ และ $(3, 4)$ ของ $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ กับจุดยอด $(1, 1), (1, 2), (4, 1)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันแรก ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.29

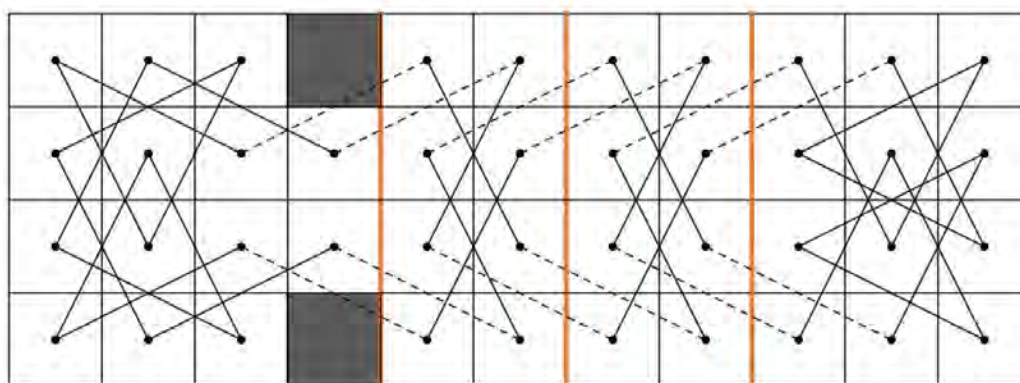
(iii) สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t - 1$ เชื่อมจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ i กับจุดยอด $(1, 1), (1, 2), (4, 1)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ $i + 1$ ตามลำดับ

(iv) เชื่อมจุดยอด $(2, 1), (2, 2), (3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ t กับจุดยอด $(1, 1), (1, 2), (4, 1)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 3)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.29 และ 3.30 เมื่อ $n = 9$ และ 11 ตามลำดับ



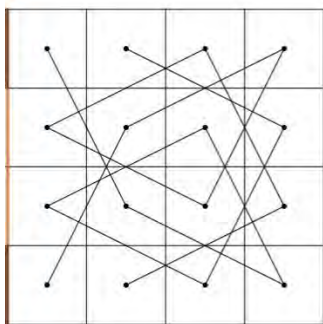
รูปที่ 3.29 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 9) - \{(1, 4), (4, 4)\}$



รูปที่ 3.30 การเดินทางแบบปิดบน $CB(4, 11) - \{(1, 4), (4, 4)\}$

กรณี 4.2 มีจำนวนนับ t ที่ $n = 8 + 2t$ แบ่ง $CB(4, n) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ออกเป็น $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ 1 อัน, $CB(4, 2)$ t อัน และ $CB(4, 4)$ 1 อัน แล้วสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $CB(4, n) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ตามขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

(i) สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ดังรูปที่ 3.27 จากนั้น สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \leq i \leq t$ สร้างวิถี 4 เส้น บน $CB(4, 2)$ ดังรูปที่ 3.3 และ สร้างวิถี 2 เส้น บน $CB(4, 4)$ ดังรูปที่ 3.31



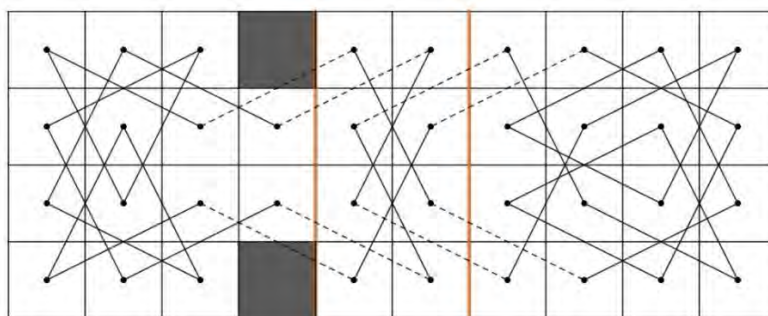
รูปที่ 3.31 วิถี 2 เส้น บน $CB(4, 3)$

(ii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (ii) ในกรณี 4.1

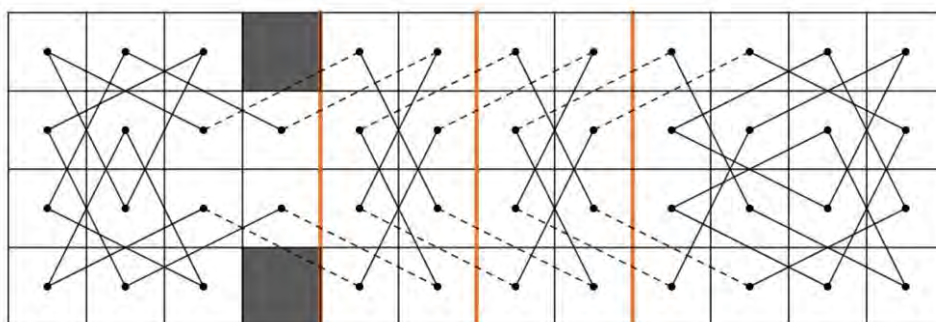
(iii) เชื่อมจุดยอดต่าง ๆ เหมือน (iii) ในกรณี 4.2

(iv) เชื่อมจุดยอด $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ และ $(3, 2)$ ของ $CB(4, 2)$ อันที่ t กับจุดยอด $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$ และ $(4, 2)$ ของ $CB(4, 4)$ ตามลำดับ

จึงจะทำให้ได้การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, n) - \{(1, 4), (4, 4)\}$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.32 และ 3.33 เมื่อ $n = 10$ และ 12 ตามลำดับ



รูปที่ 3.32 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 10) - \{(1, 4), (4, 4)\}$



รูปที่ 3.33 การเดินม้าแบบปิดบน $CB(4, 12) - \{(1, 4), (4, 4)\}$



บทที่ 4

สรุปและข้อเสนอแนะ

โครงการนี้ตอบคำถามของ Bi และ คณะได้อย่างสมบูรณ์สำหรับ $CB(4, n)$ เมื่อ $n \leq 8$ อย่างไรก็ตามในกรณีที่ $n \geq 9$ สามารถหาคำตอบได้เพียงบางส่วนเท่านั้น ผู้ที่สนใจอาจพยายามหาวิธีสร้างการเดินแบบปิดของม้าบน $C(4, n) - A$ เมื่อ A เป็นเซตของช่องสองช่องที่ต่างสีกันในแถวที่ 1 หรือ แถวที่ 4

เอกสารอ้างอิง

- [1] Baoyue Bi, Steve Butler, Stephanie DeGraaf and Elizabeth Doebel. (2015). Knight's tours on boards with odd dimensions, *Involve a Journal of Mathematics*, 8(4), 615-627.
- [2] Joseph DeMaio, Thomas Hippchen. (2009). Closed Knight's Tours with Minimal Square Removal for All Rectangular Boards, *Mathematics Magazine*, 82(3), 219-225.
- [3] Amanda M. Miller, David L. Farnsworth. (2013). Knight's Tours on $3 \times n$ Chessboards with a Single Square Removed, *Open Journal of Discrete Mathematics*, 3, 56-59.
- [4] Allen J. Schwenk. (1991). Which rectangular chessboards have a knight's tour?, *Mathematics Magazine*, 64(5), 325-332.
- [5] วรานุช แคมมณี, (2559). กราฟออยเลอร์เรียนและกราฟแฮมิลโตเนียน. *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น* (185). สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงการ รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย)	การเดินม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ ที่ถูกลบสองช่องเมื่อ $n \geq 3$
ชื่อโครงการ (ภาษาอังกฤษ)	Closed knight's tours on $4 \times n$ chessboards with two squares removed where $n \geq 3$
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ	นายธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์ เลขประจำตัวนิสิต 5933522023 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในเกมหมากรุก จะมีตัวหมากหลายชนิด แต่มีตัวหมากตัวหนึ่งที่เราสนใจ คือ ม้า ซึ่งม้าในกระดานหมากรุกนั้นจะมีวิธีการเดินที่น่าสนใจ คือ ม้าจะเดินตามแนวตั้งหรือแนวนอนไปสองช่องแล้วเดินทำมุมฉากกับแนวเดิมไปอีกหนึ่งช่องบนกระดาน เราจะเรียกการเดินแบบนี้ว่า การเดินของม้าแบบปกติ โดยทั่วไปแล้วกระดานหมากรุกที่นิยมเล่นกันปกติจะมีขนาด 8×8 นั่นคือ กระดานหมากรุกจะประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถว และแปดหลัก ต่อมาได้มีการพิจารณากระดานหมากรุกที่มีขนาด $m \times n$ ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน m แถว และ n หลัก เมื่อพิจารณาดูการเดินของม้าบนกระดานหมากรุกแล้ว จะพบว่าเราสามารถนำมาจำลองเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้โดยใช้กราฟด้วยการแทนช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละช่องเป็นจุดยอดของกราฟและจุดยอดสองจุดจะมีเส้นเชื่อมหรือเรียกว่าประชิดกันถ้าม้าสามารถเดินจากช่องหนึ่งไปยังอีกช่องหนึ่งได้ด้วยหลักการเดินของม้าแบบปกติ

ในโครงการนี้ เราจะศึกษาไปที่ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการเดินของม้าบนกระดานหมากรุก โดยม้าจะต้องเดินผ่านช่องทุกช่องบนกระดานหมากรุกเพียงช่องละหนึ่งครั้งเท่านั้นและเป็นไปตามหลักการเดินของม้าแบบปกติ ถ้าการเดินของม้าบนกระดานหมากรุกนั้นมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นช่องเดียวกัน เราจะเรียกการเดินม้านั้นว่า “การเดินม้าแบบปิด” แต่ถ้าจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นช่องที่แตกต่างกัน เราจะเรียกการเดินม้านั้นว่า “การเดินม้าแบบเปิด”

ในปีค.ศ.1991 Schwenk [4] ได้ให้ทฤษฎีบทไว้ว่า สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ $m \leq n$ จะมีการเดินม้าแบบปิด ยกเว้นเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งหรือมากกว่าในสามเงื่อนไข ดังนี้ (1) m และ n เป็น

จำนวนคี่ (2) $m = 1, 2$ หรือ 4 (3) $m = 3$ และ $n = 4, 6$ หรือ 8 นั่นคือ ถ้าเกิดกรณีเหล่านี้ขึ้นเพียงเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่ง แล้วจะไม่สามารถหาการเดินม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ นั้นได้ เนื่องจากมีกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ จากสามเงื่อนไขที่ไม่สามารถหาการเดินม้าแบบปิดบนกระดานได้ จึงทำให้ต่อมา ในปี ค.ศ. 2009 DeMaio และ Hippchen [2] ได้สนใจและศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนช่องที่น้อยที่สุดบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่ถูกลบออกไปแล้วทำให้มีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลือ ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Miller และ Farnsworth [3] ได้หาตำแหน่งในการลบช่องหนึ่งช่องที่เป็นไปได้ทั้งหมด ออกจากกระดานหมากรุกขนาด $3 \times n$ แล้วทำให้มีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ และต่อมาในปี ค.ศ. 2015 Bi และคณะ [1] ได้สร้างเงื่อนไขที่ขยายงานของ Miller และ Farnsworth [3] โดยการพิสูจน์ว่าเราสามารถลบช่องใดเพียงหนึ่งช่องได้บ้างจากกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ m, n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 ที่เมื่อลบแล้วทำให้มีการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่

ต่อมาเมื่อพิจารณา กระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ เนื่องจากทฤษฎีบทของ Schwenk [4] กระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ ไม่สามารถหาการเดินม้าแบบปิดได้ แต่ในปี ค.ศ. 2009 DeMaio และ Hippchen [2] ได้พิสูจน์ไว้แล้วว่า หากลบช่องออกสองช่องจากกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ จะเพียงพอที่รับประกันได้ว่าการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลือเสมอ ในโครงการนี้ จึงได้สนใจและขยายแนวคิดของ Bi และคณะ [1] ในการหาตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการลบช่องสองช่องออกจากกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ โดยที่ $n \geq 3$ แล้วทำให้สามารถหาการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ได้

วัตถุประสงค์

เพื่อหาตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการลบช่องสองช่องออกจากกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ โดยที่ $n \geq 3$ แล้วทำให้สามารถหาการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ได้

ขอบเขตของโครงการ

ศึกษากระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ และการเดินม้าแบบปิดบนกระดานดังกล่าวเท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานและการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$
2. หาตำแหน่งที่ในการลบช่องสองช่องออกจากกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ โดยที่ $n \geq 3$ แล้วทำให้สามารถหาการเดินม้าแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ได้
3. พิสูจน์ว่าตำแหน่งที่หาได้นั้นเป็นตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดแล้ว

ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการ ดำเนินการ	เดือน											
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	
1. ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและ เสนอหัวข้อโครงงาน												
2. ดำเนินการโครงงาน - ศึกษาการเดินทางของน้ำแบบปกติ บนกระดานหมากรุกขนาด มาตรฐานและการเดินของน้ำ แบบปิดบนกระดานหมากรุก ขนาด $m \times n$ - หาดำแหน่งที่ในการลบช่องสอง ช่องออกจากกระดานหมากรุก ขนาด $4 \times n$ โดยที่ $n \geq 3$ แล้วทำให้สามารถหา การเดินทางน้ำแบบปิดบนกระดาน ที่เหลืออยู่ได้ - พิสูจน์ว่าตำแหน่งที่หาได้นั้น เป็นตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้ง หมดแล้ว												
3. เขียนรายงานและนำเสนอ โครงงาน												

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการลบช่องสองช่องออกจากกระดานหมากรุกขนาด $4 \times n$ โดยที่ $n \geq 3$ แล้วทำให้สามารถหาการเดินทางน้ำแบบปิดบนกระดานที่เหลืออยู่ได้
2. ได้ฝึกฝนการคิด วิเคราะห์ ตั้งคำถาม และแก้ไขปัญหา

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

Microsoft Word Microsoft Powerpoint กระดาษ A4 กระดาษกราฟ และ External Harddisk

งบประมาณ

1. กระดาษ A4	500	บาท
2. ค่าอุปกรณ์เครื่องเขียน	2000	บาท
3. ค่าถ่ายเอกสาร	500	บาท
4. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล	2000	บาท

เอกสารอ้างอิง

- [1] Baoyue Bi, Steve Butler, Stephanie DeGraaf and Elizabeth Doebel. (2015). Knight's tours on boards with odd dimensions, *Involve a Journal of Mathematics*, 8(4), 615-627.
- [2] Joseph DeMaio, Thomas Hippchen. (2009). Closed Knight's Tours with Minimal Square Removal for All Rectangular Boards, *Mathematics Magazine*, 82(3), 219-225.
- [3] Amanda M. Miller, David L. Farnsworth. (2013). Knight's Tours on $3 \times n$ Chessboards with a Single Square Removed, *Open Journal of Discrete Mathematics*, 3, 56-59.
- [4] Allen J. Schwenk. (1991). Which rectangular chessboards have a knight's tour?, *Mathematics Magazine*, 64(5), 325-332.

ประวัติผู้เขียน



นายธนธรณ์ แก้ววรรณรัตน์

เลขประจำตัวนิต 5933522023

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย