โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวง อย่างน้อย 2 วง
Directed edge-graceful labeling of digraph containing at least 2 cycles

ชื่อนิสิต นางสาวนัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว 5933525923

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง

นางสาวนัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

Directed edge-graceful labeling of digraph containing at least 2 cycles

Miss Natdawan Ruamkaew

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2019

โครงงาน	การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง
โดย	นางสาวนัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว เลขประจำตัวนิสิต 5933525923
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

. . . . หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

. . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

. . . . กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช)

. . . . กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร)

นัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว : การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง. (Directed edge-graceful labeling of digraph containing at least 2 cycles) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน : รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 46 หน้า

โครงงานนี้พิจารณาไดกราฟ $C(c \times a)$ ที่เกิดจากการกำหนดทิศทางให้กับเส้นเชื่อมต่าง ๆ วง C_a จำนวน c วง ในลักษณะเดียวกันทั้งหมด และให้จุดจุดหนึ่งบนวง C_a เหล่านั้นรวมเป็นจุดเดียวกัน เราสร้างการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟนี้ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $a \geq 3$ และ c เป็นจำนวนเต็มที่ $c \geq 2$ สุดท้ายจึงพิสูจน์ว่าการกำกับดังกล่าวเป็นการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางอย่างสง่างามของไดกราฟ $C(c \times a)$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต นัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน

ปีการศึกษา 2562

5933525923 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : cycle, digraph, directed edge-graceful labeling

NATDAWAN RUAMKAEW : Directed edge-graceful labeling of digraph containing at least 2 cycles. ADVISOR : ASSOC. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 46 pp.

This project consider the digraph $C(c \times a)$ which obtained by determining a direction to all edges of cycle C_a for c cycles and identifying a vertex of each cycle to a single vertex. Then, we construct a directed edge labeling to this digraph, where a is an odd integer such that $a \geq 3$ and c is an integer such that $c \geq 2$. Finally, we proved that the constructed labeling is a directed edge-graceful labeling for this digraph $C(c \times a)$.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Natdawan

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature R. Boonklurb

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

ในการดำเนินงานครั้งนี้ได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากบุคคลหลายท่านด้วยกัน จึงขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ ที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน พร้อมทั้งให้ความรู้ คำปรึกษาแนะนำ และสละเวลาคอยติดตามความก้าวหน้าตลอดระยะเวลาการทำโครงงานจนกระทั่งโครงงานสำเร็จตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

ตลอดจนขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช และรองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงาน และได้ให้คำปรึกษาและแก้ไขปรับปรุงโครงงานนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัว รวมถึงเพื่อน ๆ ทุกคน ที่คอยให้กำลังใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์ ที่คอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่าง ๆ มาตลอดการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ .... ฉ

สารบัญ .... ช

สารบัญภาพ .... ซ

บทที่ 1 บทนำและความรู้ทั่วไป 1

บทที่ 2 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$ 8

บทที่ 3 บทสรุปและข้อเสนอแนะ 30

เอกสารอ้างอิง 31

ภาคผนวก 32

ประวัติผู้เขียน 36

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่ 1.1 ตัวอย่างไดกราฟ 1

ภาพที่ 1.2 ไดกราฟ $F(n,m)$ 2

ภาพที่ 1.3 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $F(5,10)$ 2

ภาพที่ 1.4 ไดกราฟ $\langle K_{1,n}: m\rangle$ 2

ภาพที่ 1.5 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $\langle K_{1,4}: 7\rangle$ 3

ภาพที่ 1.6 ไดกราฟ T_n 3

ภาพที่ 1.7 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ T_{15} 3

ภาพที่ 1.8 ไดกราฟ $C_{2m}@K_{1,2n+1}$ 4

ภาพที่ 1.9 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_{10}@K_{1,13}$ 4

ภาพที่ 1.10 ไดกราฟ $C_{2m+1}@K_{1,2n}$ 5

ภาพที่ 1.11 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_9@K_{1,10}$ 5

ภาพที่ 1.12 ไดกราฟ $C_n \odot \overline{K}_m$ 5

ภาพที่ 1.13 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_5 \odot \overline{K}_8$ 6

ภาพที่ 1.14 ไดกราฟ $C(3,4,5)$ 6

ภาพที่ 1.15 ไดกราฟ $C(3 \times 7)$ 7

ภาพที่ 2.1 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 3)$ 12

ภาพที่ 2.2 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 3)$ 12

หน้า

ภาพที่ 2.3 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3 \times 3)$ 13

ภาพที่ 2.4 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 5)$ 14

ภาพที่ 2.5 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 5)$ 15

ภาพที่ 2.6 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(5 \times 5)$ 16

ภาพที่ 2.7 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 7)$ 19

ภาพที่ 2.8 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 7)$ 19

ภาพที่ 2.9 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3 \times 7)$ 23

ภาพที่ 2.10 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 9)$ 26

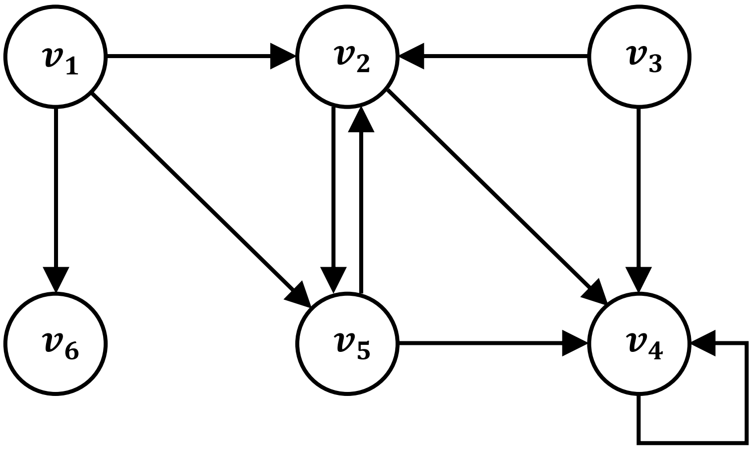
ภาพที่ 2.11 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 9)$ 26

ภาพที่ 2.12 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3 \times 9)$ 29

บทที่ 1

บทนำและความรู้พื้นฐาน

ไดกราฟ $G(V,E)$ ประกอบด้วยเซต V ของจุดยอดจำนวน p จุด และ E เป็นเซตของคู่อันดับ (a,b) สับเซตของ $V\times V$ หรือเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง (a,b) จำนวน q เส้น ทั้งนี้สำหรับเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง (a,b) ของไดกราฟ $G(V,E)$ จะเรียกจุดยอด a ว่า จุดเริ่มต้น และ จุดยอด b ว่า จุดปลาย โดยจะเขียนแทนเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง (a,b) ด้วยเส้นตรงที่มีลูกศรชี้จากจุดยอด a ไปยังจุดยอด b ดังตัวอย่างในภาพ 1.1 ที่เป็นไดกราฟที่มีจุดยอด 6 จุด และเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง 10 เส้น



ภาพที่ 1.1 ตัวอย่างไดกราฟ

โดยทั่วไป การกำกับของกราฟหรือไดกราฟ คือ ฟังก์ชันจากเซตของจุดยอด หรือเซตของเส้นเชื่อม หรือทั้งสองเซตของกราฟ ไปยังสับเซตของจำนวนเต็ม โดยฟังก์ชันดังกล่าวจะมีสมบัติบางประการ ซึ่งในโครงงานนี้สนใจศึกษาการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่สมบัติพิเศษ ซึ่งเรียกว่า การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 *การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ* $G(V,E)$ คือ ฟังก์ชัน f แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก E ไปยัง $\{1,2,3,\ldots,q\}$ ที่มีสมบัติว่า $g: V\rightarrow\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$g(v)=\left(f^{+}(v)-f^{-}(v)\right)(\mathrm{mod}\,p)$$

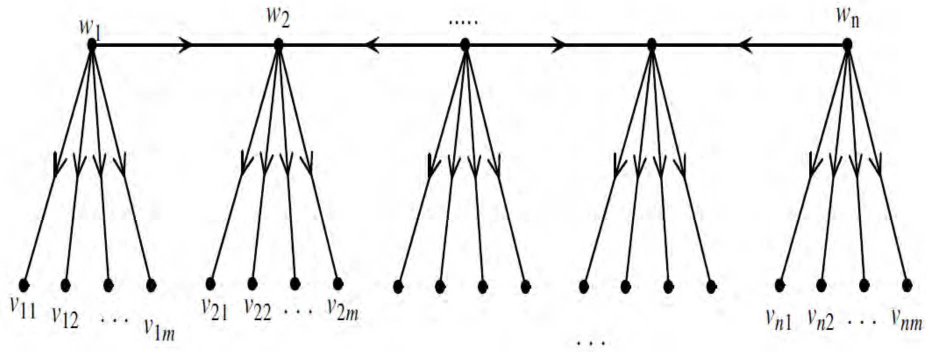
เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ

$f^{+}(v)$ คือ ผลรวมของจำนวนซึ่งกำกับโดย f บนเส้นเชื่อมที่มีทิศพุ่งเข้าหาจุดยอด v และ

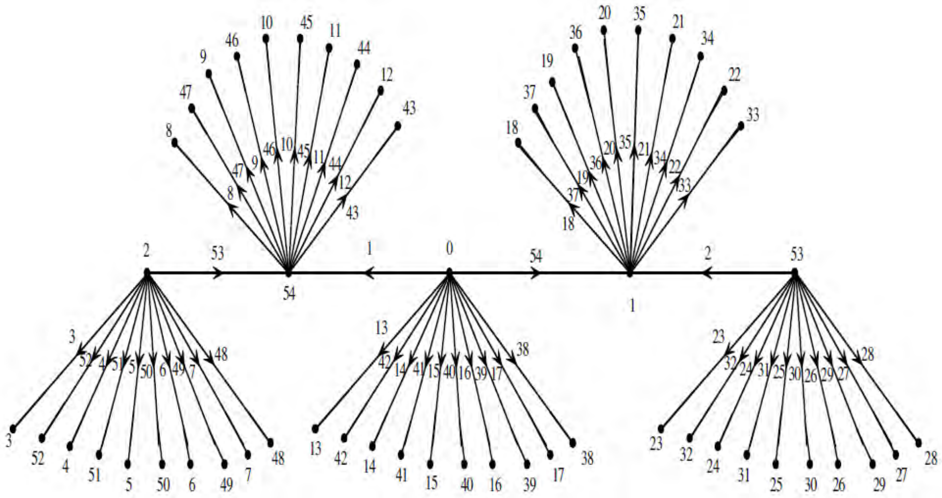
$f^{-}(v)$ คือ ผลรวมของจำนวนซึ่งกำกับโดย f บนเส้นเชื่อมที่มีทิศพุ่งออกจากจุดยอด v

ใน ค.ศ. 2011 Gayathri และ Vanitha [1] ได้ศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่ไม่มีวง กล่าวคือ ไดกราฟ $F(n,m)$ ที่มีจุดยอดเป็น $V\big(F(n,m)\big)=\{w_1,w_2,w_3,\ldots,w_n,v_{11},$

$v_{12}, v_{13}, v_{1m} v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{2m}, \dots, v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots, v_{nm}\}$ และมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางในลักษณะดังภาพ 1.2 และตัวอย่างในภาพ 1.3 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $F(5,10)$

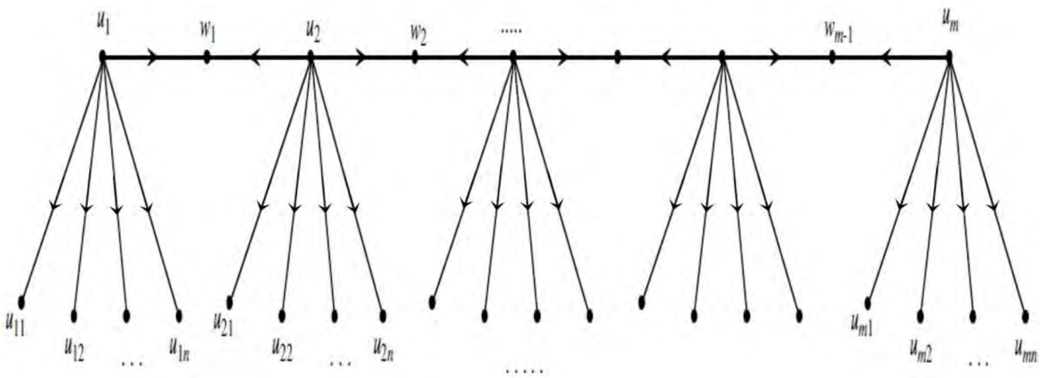


ภาพที่ 1.2 ไดกราฟ $F(n,m)$

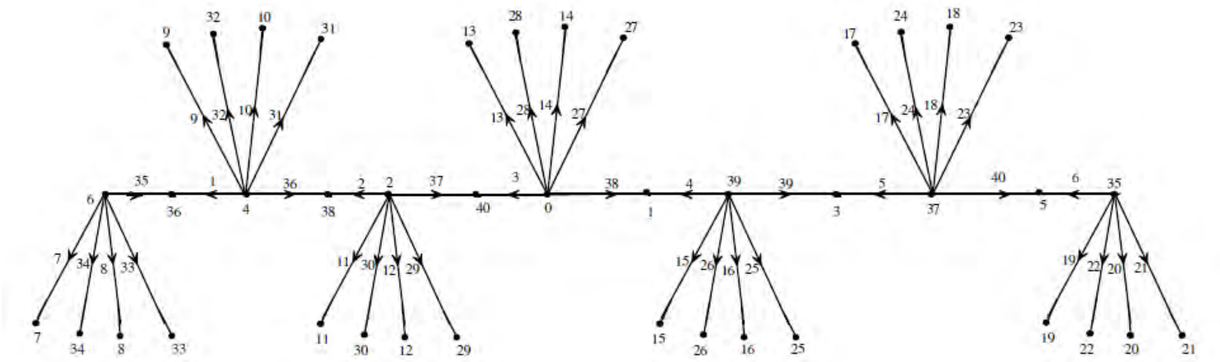


ภาพที่ 1.3 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $F(5,10)$

นอกจากนี้ [1] ยังได้สร้างการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $\langle K_{1,n}: m\rangle$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับ ที่ $m \geq 2$ และ n เป็นจำนวนนับคี่ที่ $n \geq 3$ โดยที่ไดกราฟนี้มี $V(\langle K_{1,n}: m\rangle) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, w_1, w_2, w_3 \dots, w_{m-1}, u_{11}, u_{12}, u_{13} \dots, u_{1n}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \dots, u_{2n}, \dots, u_{m1}, u_{m2}, u_{m3}, \dots, u_{mn}\}$ และมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางในลักษณะดังภาพ 1.4 และตัวอย่างในภาพ 1.5 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $\langle K_{1,4}: 7\rangle$

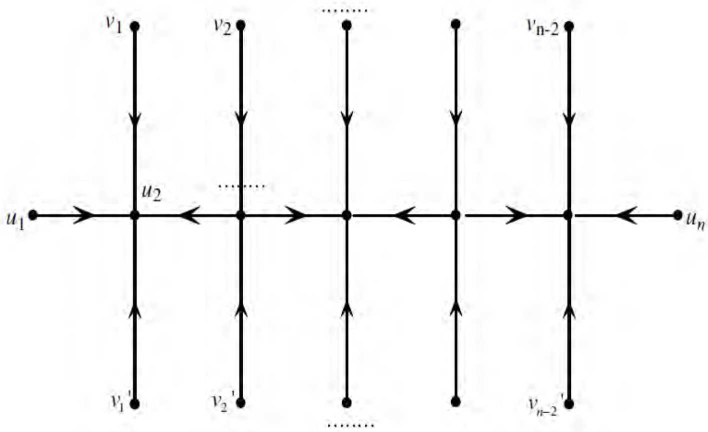


ภาพที่ 1.4 ไดกราฟ $\langle K_{1,n}: m\rangle$

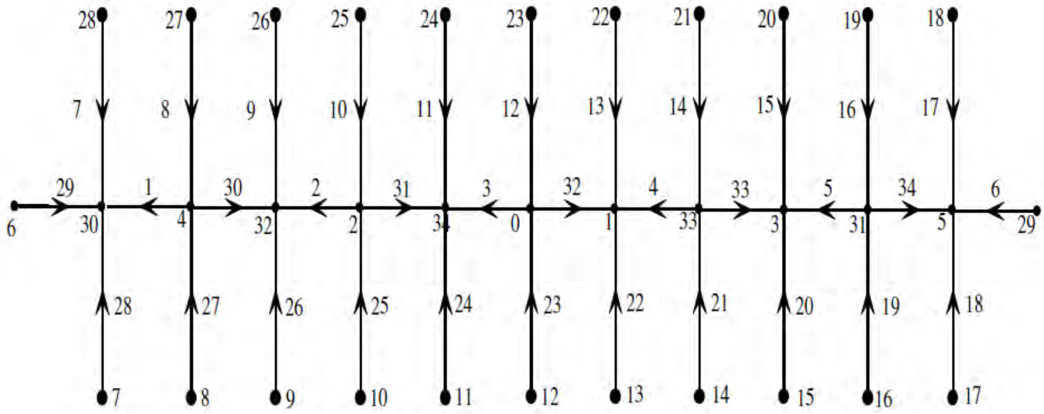


ภาพที่ 1.5 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $\langle K_{1,4}: 7\rangle$

ยิ่งไปกว่านั้น [1] ยังได้สร้างการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ T_n เมื่อ n เป็นจำนวนนับคี่ที่ $n \geq 5$ โดยที่ไดกราฟนี้มี $V(T_n) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}, v_1', v_2', v_3', \ldots, v_{n-2}'\}$ และมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางในลักษณะดังภาพ 1.6 และตัวอย่างในภาพ 1.7 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ T_{15}

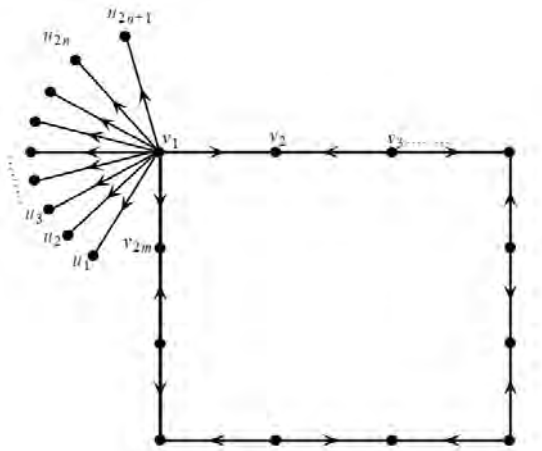


ภาพที่ 1.6 ไดกราฟ T_n

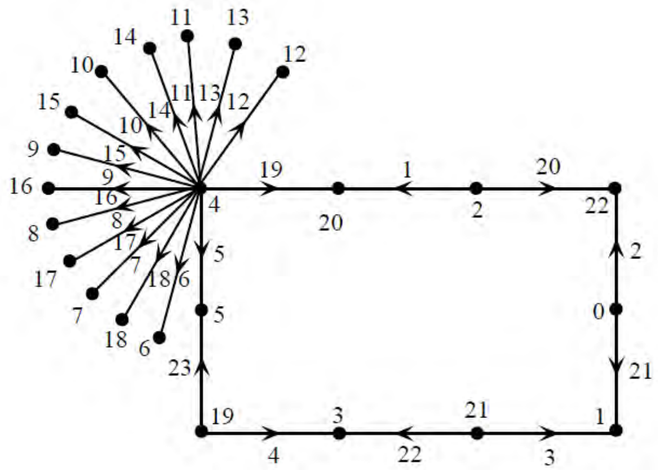


ภาพที่ 1.7 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ T_{15}

และในปีเดียวกัน Gayathri และ Vanitha [2] ได้ศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวง 1 วง กล่าวคือ ไดกราฟ $C_{2m}@K_{1,2n+1}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับที่ $m \geq 2$ โดยที่ $V(C_{2m}@K_{1,2n+1}) = \{v_1, v_2, v_3 \ldots, v_{2m}, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{2n+1}\}$ และมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางในลักษณะดังภาพ 1.8 และตัวอย่างในภาพ 1.9 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_{10}@K_{1,13}$

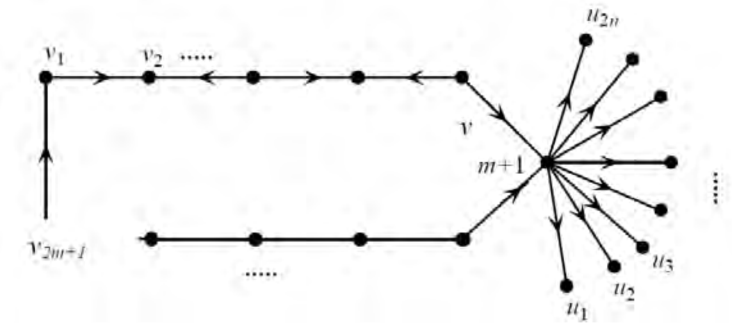


ภาพที่ 1.8 ไดกราฟ $C_{2m}@K_{1,2n+1}$

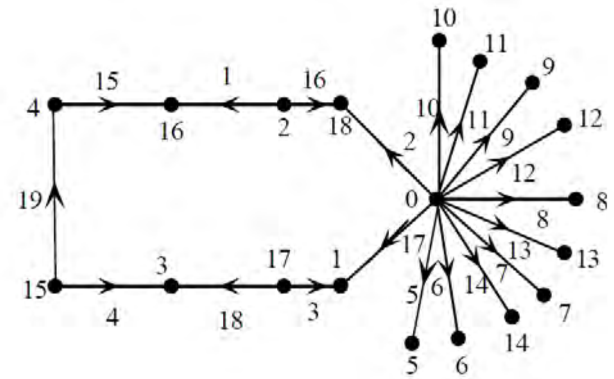


ภาพที่ 1.9 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_{10}@K_{1,13}$

Gayathri และ Vanitha [2] ยังได้สร้างการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_{2m+1}@K_{1,2n}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับที่ $m \geq 2$ และ $V(C_{2m+1}@K_{1,2n}) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2m+1}, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{2n}\}$ และมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางในลักษณะดังภาพ 1.10 และตัวอย่างในภาพ 1.11 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_9@K_{1,10}$

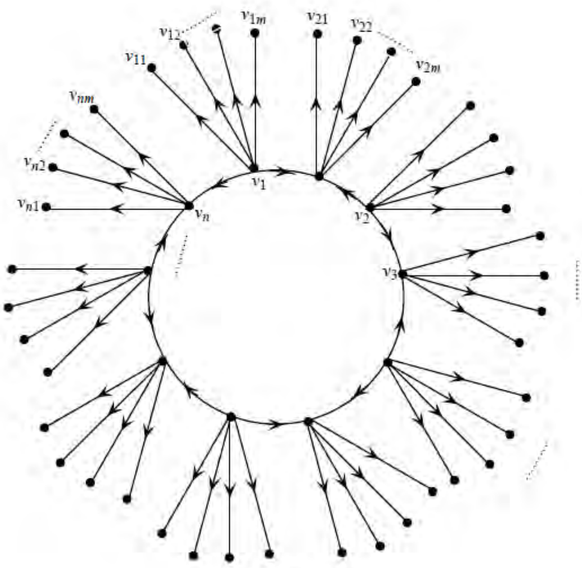


ภาพที่ 1.10 ไดกราฟ $C_{2m+1}@K_{1,2n}$

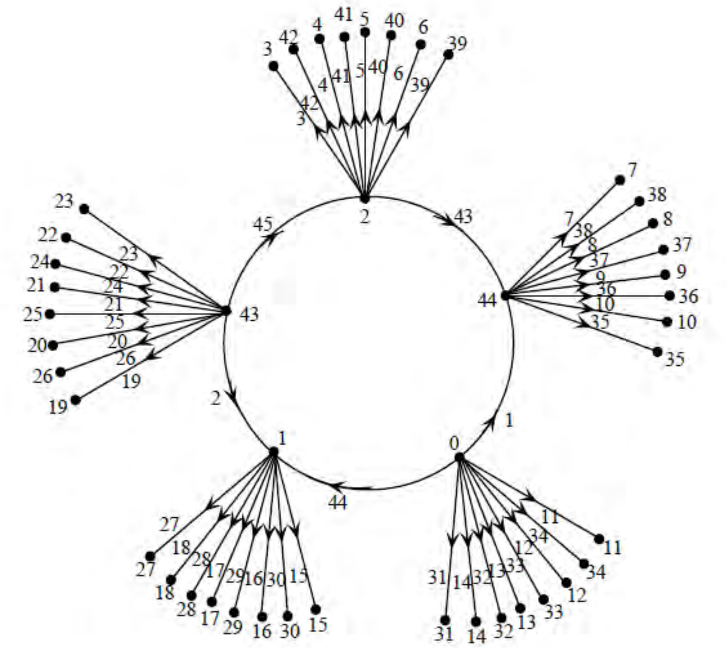


ภาพที่ 1.11 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_9@K_{1,10}$

สุดท้าย [2] ได้สร้างการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_n \odot \overline{K}_m$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับคู่ และ n เป็นจำนวนนับคี่ที่ $n \geq 3$ โดยที่ $V(C_n \odot \overline{K}_m) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1m}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, \ldots, v_{2m}, \ldots, v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \ldots, v_{nm}\}$ และมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางในลักษณะดังภาพ 1.12 และตัวอย่างในภาพ 1.13 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_5 \odot \overline{K}_8$



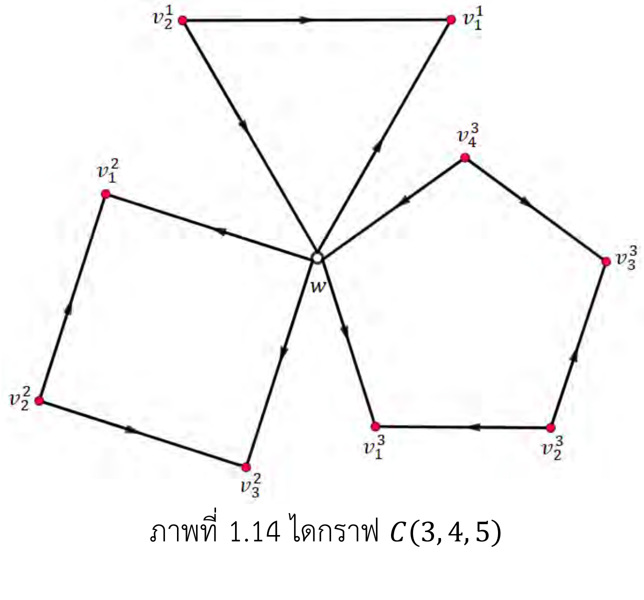
ภาพที่ 1.12 ไดกราฟ $C_n \odot \overline{K}_m$



ภาพที่ 1.13 การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C_5 \odot \overline{K}_8$

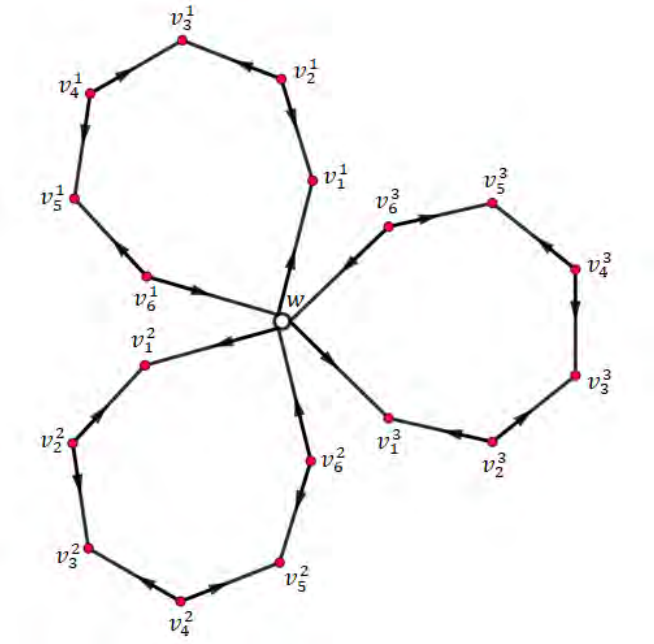
จากผลการศึกษาของ Gayathri และ Vanitha ทั้งจาก [1] และ [2] ซึ่งมุ่งพิจารณาไดกราฟที่ไม่มีวงและไดกราฟที่มีวงเพียงวงเดียว โครงงานนี้จึงขยายแนวคิดเพื่อศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วงบางชนิดที่นิยามโดยบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2 ให้ c เป็นจำนวนนับที่ $c \geq 2$ และ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_c$ เป็นจำนวนนับที่ $n_i \geq 3$ ทุก i ที่ $1 \leq i \leq c$ ไดกราฟ $C(n_1, n_2, n_3, \dots, n_c)$ มี $V\big(C(n_1, n_2, n_3, \dots, n_c)\big) = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_{n_1-1}^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2, \dots, v_{n_2-1}^2, v_1^3, v_2^3, v_3^3, \dots, v_{n_3-1}^3, \dots, v_1^c, v_2^c, v_3^c, \dots, v_{n_c-1}^c, w\}$ ซึ่งแต่ละวงมีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางพุ่งออกจาก w ไปยัง v_1^j เส้นเชื่อมเส้นต่อไปชี้ทิศทางตรงข้ามกับเส้นแรก เส้นเชื่อมเส้นที่ 3 ชี้ทิศทางตรงข้ามกับเส้นที่ 2 และเป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนถึงเส้นเชื่อมแสดงทิศทางเส้นสุดท้ายของวงนั้น ๆ ในลักษณะดังภาพ 1.14 ซึ่งแสดง $C(3,4,5)$



ภาพที่ 1.14 ไดกราฟ $C(3,4,5)$

โดยไดกราฟที่จะศึกษาในโครงงานนี้เป็นกรณีพิเศษของไดกราฟในบทนิยาม 1.2 ที่ $n_i = a$ ทุก i ที่ $1 \leq i \leq c$ ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ $C(c \times a)$ แทน $C(a, a, a, \dots, a)$ ดังตัวอย่าง $C(3 \times 7)$ ในภาพ 1.15



ภาพที่ 1.15 ไดกราฟ $C(3 \times 7)$

บทที่ 2
การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$

ให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $a \geq 3$ และ c เป็นจำนวนเต็มที่ $c \geq 2$ จะได้ว่าไดกราฟ $C(c \times a)$ ในบทนิยาม 1.2 มีจำนวนจุดยอดเป็น $p = (a-1)c + 1 \geq 7$ และมีจำนวนเส้นเชื่อมเป็น $q = ac \geq 6$ สร้างการกำกับ $f: E \to \{1, 2, 3, \dots, ac\}$ บนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟดังกล่าวโดยขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

ขั้นตอนวิธี 1 (i) $f(w, v_1^j) = j$ เมื่อ $1 \leq j \leq c$

(ii) $f(v_{2i}^j, v_{2i-1}^j) = j + (2i-1)c$ เมื่อ $1 \leq j \leq c$ และ $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c}$

(iii) $f(v_{2i}^j, v_{2i+1}^j) = j + 2ic$ เมื่อ $1 \leq j \leq c$ และ $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1$

(iv) $f\left(v_{\frac{p-1}{c}}^j, w\right) = p + j - 1$ เมื่อ $1 \leq j \leq c$

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับ $p \geq 7$ การกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$ ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 1 เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$

บทพิสูจน์ จะแบ่งการพิสูจน์เป็นสามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1. จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก E ไปทั่วถึง $\{1, 2, 3, \dots, ac\}$

สังเกตว่า $E_1 = \{f(w, v_1^j) | 1 \leq j \leq c\} = \{j | 1 \leq j \leq c\} = \{1, 2, 3, \dots, c\}$

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ f(v_{2i}^j, v_{2i-1}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} \right\} \\
&= \left\{ f(v_{2i}^j, v_{2i-1}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \tfrac{a-1}{2} \right\} \\
&= \left\{ j + (2i-1)c \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \tfrac{a-1}{2} \right\} \\
&= \{c+1, c+2, c+3, \dots, 2c, 3c+1, 3c+2, 3c+3, \dots, 4c, 5c+1, 5c+2, 5c+3, \dots, 6c, \dots, \\
&\qquad (a-2)c+1, (a-2)c+2, (a-2)c+3, \dots, (a-1)c\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \left\{ f(v_{2i}^j, v_{2i+1}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1 \right\} \\
&= \left\{ f(v_{2i}^j, v_{2i+1}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \tfrac{a-3}{2} \right\} \\
&= \left\{ j + 2ic \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \tfrac{a-3}{2} \right\} \\
&= \{2c+1, 2c+2, 2c+3, \dots, 3c, 4c+1, 4c+2, 4c+3, \dots, 5c, 6c+1, 6c+2, 6c+3, \dots, 7c, \dots, \\
&\qquad (a-3)c+1, (a-3)c+2, (a-3)c+3, \dots, (a-2)c\}
\end{aligned}
$$

$$E_4 = \left\{ f\left(v^j_{\frac{p-1}{c}}, w\right) \middle| 1 \le j \le c \right\} = \{p + j - 1 \ |1 \le j \le c\}$$
$$= \{(a-1)c + 1, (a-1)c + 2, (a-1)c + 3, \dots, ac\}$$

ทำให้ได้ว่า $f(E) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{1, 2, 3, \dots, ac\}$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก E ไปทั่วถึง $\{1, 2, 3, \dots, ac\}$ และเนื่องจาก $|E| = ac$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก E ไปทั่วถึง $\{1, 2, 3, \dots, ac\}$

ขั้นที่ 2. จะคำนวณค่าของฟังก์ชัน g ที่จุดยอดของไดกราฟ $C(c \times a)$

2.1 จากขั้นตอนวิธี 1 (i) และ (ii) จะได้ว่า ถ้า $1 \le j \le c$ แล้ว

$$f^+(v_1^j) = f(w, v_1^j) + f(v_2^j, v_1^j) = j + (j + c) = 2j + c$$

ต่อมาเนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางพุ่งออกจากจุดยอด v_1^j ทุก $1 \le j \le c$ จะได้ว่า $f^-(v_1^j) = 0$

ดังนั้น $g(v_1^j) = (2j + c) \pmod p$

2.1.1 กรณี $a = 3$ และ $1 \le j < \frac{c+1}{2}$ จะได้ว่า $p = 2c + 1 > 2j + c$ ดังนั้น $g(v_1^j) = 2j + c$

2.1.2 กรณี $a = 3$ และ $\frac{c+1}{2} \le j \le c$ จะได้ $p = 2c + 1 \le 2j + c \le 3c < 4c + 2 = 2p$

ดังนั้น $g(v_1^j) = 2j + c - p$

2.1.3 กรณี $a \ge 5$ จะได้ว่า ถ้า $1 \le j \le c$ แล้ว $2j + c \le 3c < 4c + 1 \le (a-1)c + 1 = p$

ดังนั้น $g(v_1^j) = 2j + c$

2.2 เนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางพุ่งเข้าหาจุดยอด v_{2i}^j ทุก $1 \le j \le c$ และ $1 \le i \le \frac{p-1}{2c} - 1$

จะได้ว่า $f^+(v_{2i}^j) = 0$

ต่อมาจากขั้นตอนวิธี 1 (ii) และ (iii) จะได้ว่า ถ้า $1 \le j \le c$ และ $1 \le i \le \frac{p-1}{2c} - 1$ แล้ว

$$f^-(v_{2i}^j) = f(v_{2i}^j, v_{2i-1}^j) + f(v_{2i}^j, v_{2i+1}^j) = (j + (2i-1)c) + (j + 2ic) = 2j + (4i-1)c$$

ดังนั้น $g(v_{2i}^j) = (-2j - (4i-1)c) \pmod p$

2.2.1 กรณี $2j + (4i-1)c \le p$ จะได้ $g(v_{2i}^j) = p - 2j - (4i-1)c$

2.2.2 กรณี $2j + (4i-1)c > p$ สังเกตว่าในกรณีนี้

$$p < 2j + (4i-1)c \le 2c + \left(4\left(\frac{p-1}{2c} - 1\right) - 1\right)c = 2p - c - 2 < 2p$$

ดังนั้น $g(v_{2i}^j) = 2p - 2j - (4i-1)c$

2.3 จากขั้นตอนวิธี 1 (ii) และ (iii) จะได้ว่า ถ้า $1 \le j \le c$ และ $1 \le i \le \frac{p-1}{2c} - 2$ แล้ว

$$f^+(v_{2i+1}^j) = f(v_{2i}^j, v_{2i+1}^j) + f(v_{2i+2}^j, v_{2i+1}^j) = (j + 2ic) + (j + (2(i+1) - 1)c)$$
$$= 2j + (4i+1)c$$

ต่อมาเนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางพุ่งออกจากจุดยอด v_{2i+1}^{j} ทุก $1 \leq j \leq c$

และ $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 2$ จะได้ว่า $f^{-}(v_{2i+1}^{j}) = 0$

ดังนั้น $g(v_{2i+1}^{j}) = (2j + (4i+1)c) \pmod p$

2.3.1 กรณี $2j + (4i+1)c < p$ จะได้ $g(v_{2i+1}^{j}) = 2j + (4i+1)c$

2.3.2 กรณี $2j + (4i+1)c \geq p$ สังเกตว่าในกรณีนี้

$$p \leq 2j + (4i+1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1}{2c} - 2\right) + 1\right)c = 2p - 5c - 2 < 2p$$

ดังนั้น $g(v_{2i+1}^{j}) = 2j + (4i+1)c - p$

2.4 จากขั้นตอนวิธี 1 (ii) และ (iii) จะได้ว่า ถ้า $\frac{p-1}{c} - 1 \geq 3$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว

$$\begin{aligned} f^{+}\left(v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right) &= f\left(v_{\frac{p-1}{c}-2}^{j}, v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right) + f\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}, v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right) \\ &= \left(j + 2\left(\frac{p-1}{2c} - 1\right)c\right) + \left(j + \left(2\left(\frac{p-1}{2c}\right) - 1\right)c\right) \\ &= 2p + 2j - 3c - 2 \end{aligned}$$

ต่อมาเนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางพุ่งออกจากจุดยอด $v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}$ ทุก $1 \leq j \leq c$ จะได้ว่า

$f^{-}\left(v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right) = 0$

ดังนั้น $g\left(v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right) = (2p + 2j - 3c - 2) \pmod p$

เนื่องจาก $2j - 3c - 2 \leq -c - 2 < (a-1)c + 1 = p$ ดังนั้น $g\left(v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right) = p + 2j - 3c - 2$

2.5 เนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมแสดงทิศทางพุ่งเข้าหาจุดยอด $v_{\frac{p-1}{c}}^{j}$ ทุก $1 \leq j \leq c$ จะได้ว่า $f^{+}\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right) = 0$

ต่อมาจากขั้นตอนวิธี 1 (ii) และ (iv) จะได้ว่า ถ้า $1 \leq j \leq c$ แล้ว

$$\begin{aligned} f^{-}\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right) &= f\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}, v_{\frac{p-c-1}{c}}^{j}\right) + f\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}, w\right) = \left(j + \left(2\left(\frac{p-1}{2c}\right) - 1\right)c\right) + (p + j - 1) \\ &= 2p + 2j - c - 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right) = (2 + c - 2p - 2j) \pmod p$

2.5.1 กรณี $2 + c - 2j \geq 0$ จะได้ว่า $g\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right) = 2 + c - 2j$

2.5.2 กรณี $2 + c - 2j < 0$ จะได้ว่า $p + 2 + c - 2j \geq p + c > 0$

ดังนั้น $g\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right) = p + 2 + c - 2j$

2.6 จากขั้นตอนวิธี 1 (i) และ (iv) จะได้ว่าถ้า $1 \le j \le c$ แล้ว

$f^{-}(w) = \sum_{j=1}^{c} f\left(w, v_1^j\right) = \sum_{j=1}^{c} j = \frac{c(c+1)}{2}$ และ

$f^{+}(w) = \sum_{j=1}^{c} f\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}, w\right) = \sum_{j=1}^{c}(p + j - 1) = \frac{c(2p+c-1)}{2}$

ดังนั้น $g(w) = \left(\frac{c(2p+c-1)}{2} - \frac{c(c+1)}{2}\right) \pmod p = c(p-1) \pmod p$

เนื่องจาก $p - c = (a-1)c + 1 - c = (a-2)c + 1 > 0$

ดังนั้น $g(w) = p - c$

ขั้นที่ 3 จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ โดยจะแบ่งการพิจารณาเป็นกรณีต่าง ๆ ตามค่าของ a และ c ดังต่อไปนี้

3.1 กรณี $a = 3$ และ c เป็นจำนวนเต็มคู่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 < \frac{p-1}{2c} - 1 = 0$, $\frac{p-1}{c} - 1 = 1$ และ $p - 1 = 2c$ ดังนั้น

จาก 2.1.1 และ 2.1.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left\{g\left(v_1^j\right) \middle| 1 \le j \le c\right\} &= \left\{g\left(v_1^j\right) \middle| 1 \le j \le \tfrac{c}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v_1^j\right) \middle| \tfrac{c+2}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \left\{2j + c \middle| 1 \le j \le \tfrac{c}{2}\right\} \cup \left\{2j + c - (2c+1) \middle| \tfrac{c+2}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \{c+2, c+4, c+6, \dots, 2c\} \cup \{1, 3, 5, \dots, c-1\} \\ &= A_{11} \cup A_{12} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_{11} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ $c + 2$ ถึง $2c$ และ A_{12} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง $c - 1$

ต่อมาจาก 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left\{g\left(v_2^j\right) \middle| 1 \le j \le c\right\} &= \left\{g\left(v_2^j\right) \middle| 1 \le j \le \tfrac{c+2}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v_2^j\right) \middle| \tfrac{c+4}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \left\{2 + c - 2j \middle| 1 \le j \le \tfrac{c+2}{2}\right\} \cup \left\{(2c+1) + 2 + c - 2j \middle| \tfrac{c+4}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \{0, 2, 4, \dots, c\} \cup \{c+3, c+5, c+7, \dots, 2c-1\} \\ &= A_{21} \cup A_{22} \end{aligned}$$

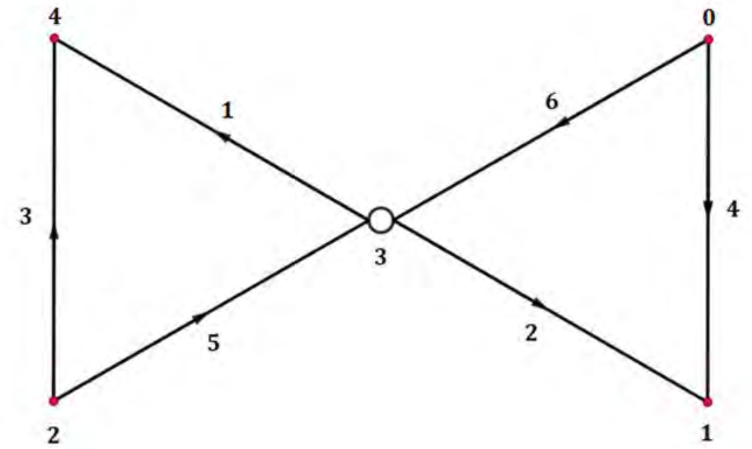
จะเห็นว่า A_{21} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง c และ A_{22} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $c + 3$ ถึง $2c - 1$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{(2c+1) - c\} = \{c+1\} = A_3$

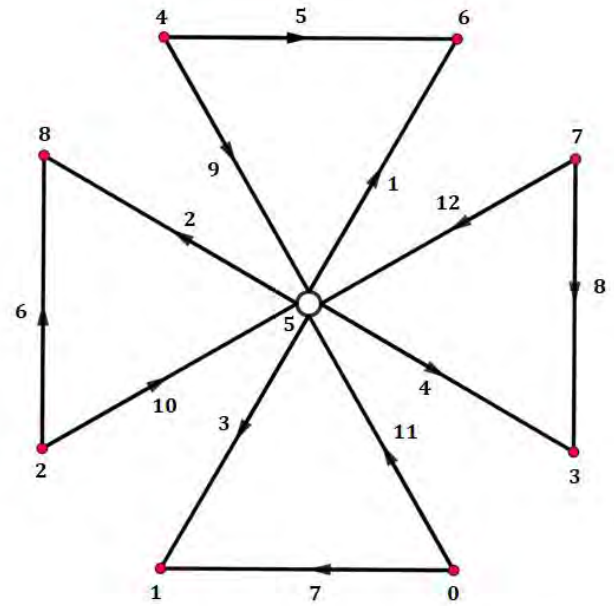
เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใด ๆ จากบรรดา $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ และ A_3 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $A_{21} \cup A_{12} \cup A_3 \cup A_{11} \cup A_{22} = \{0, 1, 2, \dots, 2c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0, 1, 2, \dots, 2c\}$



ภาพที่ 2.1 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 3)$



ภาพที่ 2.2 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 3)$

3.2 กรณี $a = 3$ และ c เป็นจำนวนเต็มคี่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 < \frac{p-1}{2c} - 1 = 0$, $\frac{p-1}{c} - 1 = 1$ และ $p - 1 = 2c$ ดังนั้น

จาก 2.1.1 และ 2.1.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_1^j)|1 \le j \le c\} &= \left\{g(v_1^j)\middle|1 \le j \le \tfrac{c-1}{2}\right\} \cup \left\{g(v_1^j)\middle|\tfrac{c+1}{2} \le j \le c\right\}\\ &= \left\{2j + c\middle|1 \le j \le \tfrac{c-1}{2}\right\} \cup \left\{2j + c - (2c+1)\middle|\tfrac{c+1}{2} \le j \le c\right\}\\ &= \{c+2, c+4, c+6, \dots, 2c-1\} \cup \{0, 2, 4, \dots, c-1\}\\ &= A_{11} \cup A_{12}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_{11} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $c + 2$ ถึง $2c - 1$ และ A_{12} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง $c - 1$

ต่อมาจาก 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left\{g\left(v_2^j\right)\middle|1 \le j \le c\right\} &= \left\{g\left(v_2^j\right)\middle|1 \le j \le \tfrac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v_2^j\right)\middle|\tfrac{c+3}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \left\{2+c-2j\middle|1 \le j \le \tfrac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{(2c+1)+2+c-2j\middle|\tfrac{c+3}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \{1,3,5,\dots,c\} \cup \{c+3,c+5,c+7,\dots,2c\} \\ &= A_{21} \cup A_{22}\end{aligned}$$

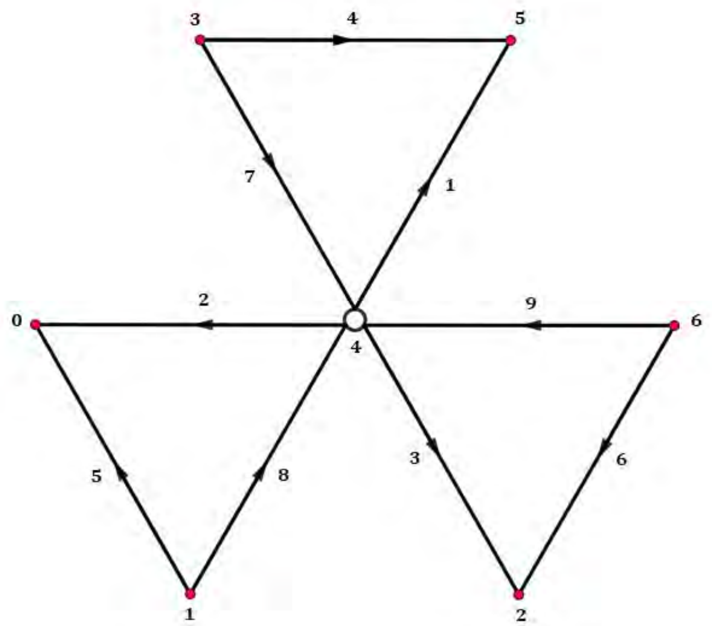
จะเห็นว่า A_{21} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง c และ A_{22} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ $c+3$ ถึง $2c$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{(2c+1)-c\} = \{c+1\} = A_3$

เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใด ๆ จากบรรดา $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ และ A_3 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $A_{12} \cup A_{21} \cup A_3 \cup A_{11} \cup A_{22} = \{0,1,2,\dots,2c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0,1,2,\dots,2c\}$



ภาพที่ 2.3 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3 \times 3)$

3.3 กรณี $a = 5$ และ c เป็นจำนวนเต็มคู่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 = 0$, $\frac{p-1}{2c} - 1 = 1$, $\frac{p-1}{c} - 1 = 3$ และ $p - 1 = 4c$ ดังนั้น

จาก 2.1.3 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v_1^j\right)\middle|1 \le j \le c\right\} = \{2j+c|1 \le j \le c\} = \{c+2, c+4, c+6, \dots, 3c\} = A_1$$

จะเห็นว่า A_1 เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ $c+2$ ถึง $3c$

ต่อมาสังเกตว่าถ้า $1 \le j \le \frac{c}{2}$ แล้ว $2j + 3c \le 4c < 4c + 1 = p$ และถ้า $\frac{c+2}{2} \le j \le c$ แล้ว $2j + 3c \ge 4c + 2 > 4c + 1 = p$ ดังนั้นโดย 2.2.1 และ 2.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_2^j)|1\le j\le c\} &= \left\{g(v_2^j)\middle|1\le j\le \tfrac{c}{2}\right\}\cup\left\{g(v_2^j)\middle|\tfrac{c+2}{2}\le j\le c\right\}\\ &= \left\{(4c+1)-2j-3c\middle|1\le j\le \tfrac{c}{2}\right\}\cup\left\{2(4c+1)-2j-3c\middle|\tfrac{c+2}{2}\le j\le c\right\}\\ &= \{1,3,5,\dots,c-1\}\cup\{3c+2,3c+4,3c+6,\dots,4c\}\\ &= A_{21}\cup A_{22}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_{21} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง $c-1$ และ A_{22} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ $3c+2$ ถึง $4c$

ต่อมาโดย 2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_3^j)|1\le j\le c\} &= \{(4c+1)+2j-3c-2|1\le j\le c\}\\ &= \{c-1+2j|1\le j\le c\}\\ &= \{c+1,c+3,c+5,\dots,3c-1\}\\ &= A_3\end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_3 เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $c+1$ ถึง $3c-1$

ต่อมาโดย 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_4^j)|1\le j\le c\} &= \left\{g(v_4^j)\middle|1\le j\le \tfrac{c+2}{2}\right\}\cup\left\{g(v_4^j)\middle|\tfrac{c+4}{2}\le j\le c\right\}\\ &= \left\{2+c-2j\middle|1\le j\le \tfrac{c+2}{2}\right\}\cup\left\{(4c+1)+2+c-2j\middle|\tfrac{c+4}{2}\le j\le c\right\}\\ &= \{0,2,4,\dots,c\}\cup\{3c+3,3c+5,3c+7,\dots,4c-1\}\\ &= A_{41}\cup A_{42}\end{aligned}$$

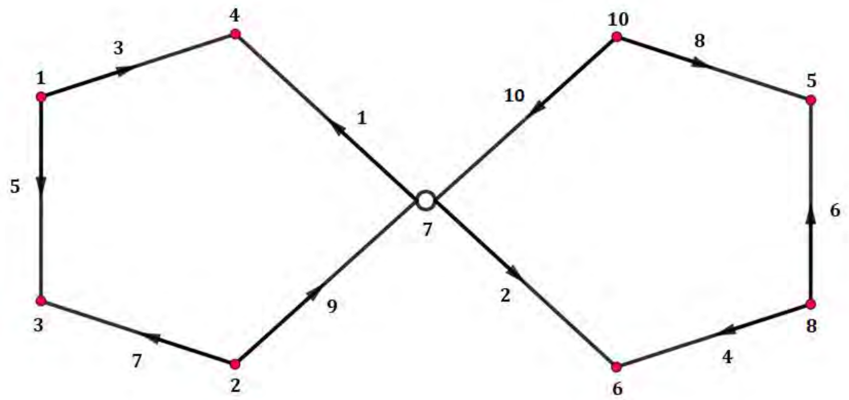
จะเห็นว่า A_{41} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง c และ A_{42} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $3c+3$ ถึง $4c-1$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\}=\{(4c+1)-c\}=\{3c+1\}=A_5$

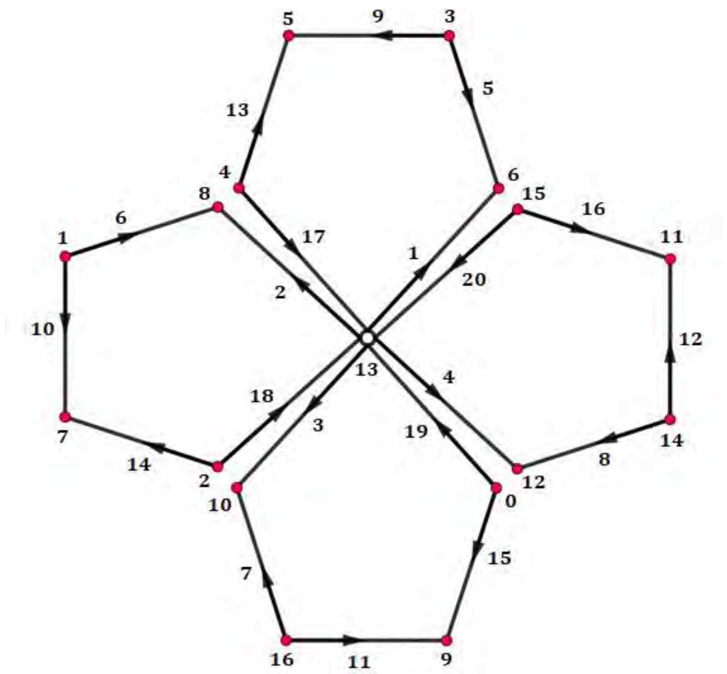
เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใด ๆ จากบรรดา $A_1, A_{21}, A_{22}, A_3, A_{41}, A_{42}$ และ A_5 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $A_{41}\cup A_{21}\cup A_3\cup A_1\cup A_5\cup A_{22}\cup A_{42}=\{0,1,2,\dots,4c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0,1,2,\dots,4c\}$



ภาพที่ 2.4 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2\times 5)$



ภาพที่ 2.5 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 5)$

3.4 กรณี $a = 5$ และ c เป็นจำนวนเต็มคี่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 = 0$, $\frac{p-1}{2c} - 1 = 1$, $\frac{p-1}{c} - 1 = 3$ และ $p - 1 = 4c$ ดังนั้น

จาก 2.1.3 จะได้ว่า

$\{g(v_1^j) | 1 \le j \le c\} = \{2j + c | 1 \le j \le c\} = \{c+2, c+4, c+6 \dots, 3c\} = A_1$

จะเห็นว่า A_1 เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $c + 2$ ถึง $3c$

ต่อมาสังเกตว่าถ้า $1 \le j \le \frac{c+1}{2}$ แล้ว $2j + 3c \le 4c + 1 = p$ และถ้า $\frac{c+3}{2} \le j \le c$ แล้ว $2j + 3c \ge 4c + 3 > 4c + 1 = p$ ดังนั้นโดย 2.2.1 และ 2.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_2^j) | 1 \le j \le c\} &= \left\{g(v_2^j) \middle| 1 \le j \le \tfrac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{g(v_2^j) \middle| \tfrac{c+3}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \left\{(4c+1) - 2j - 3c \middle| 1 \le j \le \tfrac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{2(4c+1) - 2j - 3c \middle| \tfrac{c+3}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \{0, 2, 4, \dots, c-1\} \cup \{3c+2, 3c+4, 3c+6, \dots, 4c+1\} \\ &= A_{21} \cup A_{22}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_{21} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง $c - 1$ และ A_{22} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $3c + 2$ ถึง $4c + 1$

ต่อมาโดย 2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_3^j) | 1 \le j \le c\} &= \{(4c+1) + 2j - 3c - 2 | 1 \le j \le c\} \\ &= \{c - 1 + 2j | 1 \le j \le c\} \\ &= \{c+1, c+3, c+5, \dots, 3c-1\} \\ &= A_3\end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_3 เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $c + 1$ ถึง $3c - 1$

ต่อมาโดย 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{g(v_4^j)|1 \le j \le c\} &= \left\{g(v_4^j)\middle|1 \le j \le \tfrac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{g(v_4^j)\middle|\tfrac{c+3}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \left\{2+c-2j\middle|1 \le j \le \tfrac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{(4c+1)+2+c-2j\middle|\tfrac{c+3}{2} \le j \le c\right\} \\ &= \{1,3,5,\dots,c\} \cup \{3c+3, 3c+5, 3c+7,\dots,4c\} \\ &= A_{41} \cup A_{42}\end{aligned}$$

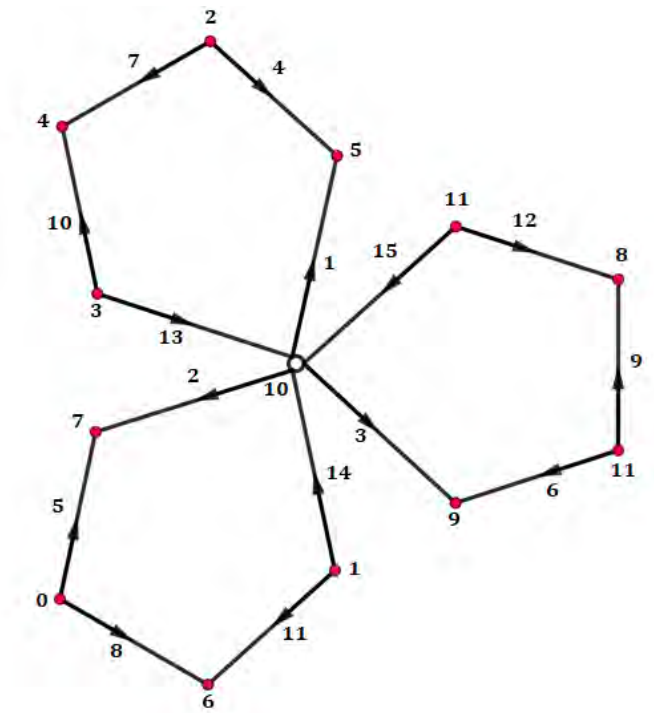
จะเห็นว่า A_{41} เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 1 ถึง c และ A_{42} เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ $3c+3$ ถึง $4c$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{(4c+1)-c\} = \{3c+1\} = A_5$

เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใด ๆ จากบรรดา $A_1, A_{21}, A_{22}, A_3, A_{41}, A_{42}$ และ A_5 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $A_{21} \cup A_{41} \cup A_3 \cup A_1 \cup A_5 \cup A_{22} \cup A_{42} = \{0,1,2,\dots,4c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0,1,2,\dots,4c\}$



ภาพที่ 2.6 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3 \times 5)$

3.5 กรณี $a \ge 7$, $\frac{a-3}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ c เป็นจำนวนเต็มคู่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 = \frac{a-5}{2} \ge 1$, $\frac{p-1}{2c} - 1 = \frac{a-3}{2} \ge 2$, $\frac{p-1}{c} - 1 = a-2 \ge 3$ และ $p-1 = (a-1)c$ ดังนั้น

จาก 2.1.3 จะได้ว่า

$\{g(v_1^j)|1 \le j \le c\} = \{2j+c|1 \le j \le c\} = \{c+2, c+4, c+6\dots,3c\} = A_1$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_1 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ และ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_1 \subseteq [c+2, 3c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \leq i \leq \frac{p-1-2c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right) - 1\right)c$

$= p - 1 - c < p$ และ

ถ้า $\frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c > 2 + \left(4\left(\frac{p-1+2c}{4c}\right) - 1\right)c$

$= p + c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.2.1 และ 2.2.2 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v_{2i}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$$
$$= \left\{g\left(v_{2i}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-2c}{4c}\right\} \cup \left\{g\left(v_{2i}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$$
$$= \left\{\left((a-1)c+1\right) - 2j - (4i-1)c\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-2c}{4c}\right\}$$
$$\cup \left\{2\left((a-1)c+1\right) - 2j - (4i-1)c\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$$
$$= \{3c - (2j-1)|1 \leq j \leq c\} \cup \{7c - (2j-1)|1 \leq j \leq c\} \cup \{11c - (2j-1)|1 \leq j \leq c\}$$
$$\cup \ldots \cup \{(a-4)c - (2j-1)|1 \leq j \leq c\}$$
$$\cup \{5c - (2j-2)|1 \leq j \leq c\} \cup \{9c - (2j-2)|1 \leq j \leq c\} \cup \{13c - (2j-2)|1 \leq j \leq c\}$$
$$\cup \ldots \cup \{(a-2)c - (2j-2)|1 \leq j \leq c\}$$
$$= \{c+1, c+3, c+5, \ldots, 3c-1\} \cup \{5c+1, 5c+3, 5c+5, \ldots, 7c-1\}$$
$$\cup \{9c+1, 9c+3, 9c+5, \ldots, 11c-1\}$$
$$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+1, (a-6)c+3, (a-6)c+5, \ldots, (a-4)c-1\}$$
$$\cup \{3c+2, 3c+4, 3c+6, \ldots, 5c\} \cup \{7c+2, 7c+4, 7c+6, \ldots, 9c\}$$
$$\cup \{11c+2, 11c+4, 11c+6, \ldots, 13c\}$$
$$\cup \ldots \cup \{(a-4)c+2, (a-4)c+4, (a-4)c+6, \ldots, (a-2)c\}$$
$$= A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \cup B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup \ldots \cup B_{2c}$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \subseteq [c+1, (a-4)c-1]$

สมาชิกแต่ละตัวใน $B_{21}, B_{22}, B_{23}, \ldots, B_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup \ldots \cup B_{2c} \subseteq [3c+2, (a-2)c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \leq i \leq \frac{p-1-6c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i+1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1-6c}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p - 1 - 3c < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1-2c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq \frac{c}{2}$ แล้ว $2j + (4i+1)c \leq c + \left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p - 1 < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1-2c}{4c}$ และ $\frac{c+2}{2} \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i+1)c \geq c + 2 + \left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p + 1 > p$ และ

ถ้า $\frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 2$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i+1)c \geq 2 + \left(4\left(\frac{p-1+2c}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p + 3c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.3.1 และ 2.3.2 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1\le j\le c \text{ และ } 1\le i\le \tfrac{p-1}{2c}-2\right\}$$
$$=\left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1\le j\le c \text{ และ } 1\le i\le \tfrac{p-1-6c}{4c}\right\}\cup\left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right)\middle|1\le j\le \tfrac{c}{2}\right\}$$
$$\cup\left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right)\middle|\tfrac{c+2}{2}\le j\le c\right\}\cup\left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1\le j\le c \text{ และ } \tfrac{p-1+2c}{4c}\le i\le \tfrac{p-1}{2c}-2\right\}$$
$$=\left\{2j+(4i+1)c\middle|1\le j\le c \text{ และ } 1\le i\le \tfrac{p-1-6c}{4c}\right\}\cup\left\{2j+\left(4\left(\tfrac{p-1-2c}{4c}\right)+1\right)c\middle|1\le j\le \tfrac{c}{2}\right\}$$
$$\cup\left\{2j+\left(4\left(\tfrac{p-1-2c}{4c}\right)+1\right)c-((a-1)c+1)\middle|\tfrac{c+2}{2}\le j\le c\right\}$$
$$\cup\left\{2j+(4i+1)c-((a-1)c+1)\middle|1\le j\le c \text{ และ } \tfrac{p-1+2c}{4c}\le i\le \tfrac{p-1}{2c}-2\right\}$$
$$=\{5c+2j|1\le j\le c\}\cup\{9c+2j|1\le j\le c\}\cup\{13c+2j|1\le j\le c\}$$
$$\cup\ldots\cup\{(a-6)c+2j|1\le j\le c\}\cup\left\{(a-2)c+2j\middle|1\le j\le \tfrac{c}{2}\right\}\cup\left\{-c+2j-1\middle|\tfrac{c+2}{2}\le j\le c\right\}$$
$$\cup\{3c+2j-1|1\le j\le c\}\cup\{7c+2j-1|1\le j\le c\}\cup\{11c+2j-1|1\le j\le c\}$$
$$\cup\ldots\cup\{(a-8)c+2j-1)|1\le j\le c\}$$
$$=\{5c+2,5c+4,5c+8,\ldots,7c\}\cup\{9c+2,9c+4,9c+6,\ldots,11c\}$$
$$\cup\{13c+2,13c+4,13c+8,\ldots,15c\}$$
$$\cup\ldots\cup\{(a-6)c+2,(a-6)c+4,(a-6)c+6,\ldots,(a-4)c\}$$
$$\cup\{(a-2)c+2,(a-2)c+4,(a-2)c+6,\ldots,(a-1)c\}\cup\{1,3,5,\ldots,c-1\}$$
$$\cup\{3c+1,3c+3,3c+5,\ldots,5c-1\}\cup\{7c+1,7c+3,7c+5,\ldots,9c-1\}$$
$$\cup\{11c+1,11c+3,11c+5,\ldots,13c-1\}$$
$$\cup\ldots\cup\{(a-8)c+1,(a-8)c+3,(a-8)c+5,\ldots,(a-6)c-1\}$$
$$=A_{31}\cup A_{32}\cup A_{33}\cup\ldots\cup A_{3c}\cup B_{31}\cup B_{32}\cup C_{31}\cup C_{32}\cup C_{33}\cup\ldots\cup C_{3c}$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{31},A_{32},A_{33},\ldots,A_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c+\beta$ เมื่อ $\alpha\equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_{31}\cup A_{32}\cup A_{33}\cup\ldots\cup A_{3c}\subseteq[5c+2,(a-4)c]$

สมาชิกแต่ละตัวใน B_{31} อยู่ในรูป $\alpha c+\beta$ เมื่อ $\alpha=a-2\equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $B_{31}\subseteq[(a-2)c+2,(a-1)c]$

สมาชิกใน B_{32} เป็นจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง $c-1$

สมาชิกแต่ละตัวใน $C_{31},C_{32},C_{33},\ldots,C_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c+\beta$ เมื่อ $\alpha\equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $C_{31}\cup C_{32}\cup C_{33}\cup\ldots\cup C_{3c}\subseteq[3c+1,(a-6)c-1]$

ต่อมาโดย 2.4 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right)\middle|1\le j\le c\right\}=\{(a-1)c+1+2j-3c-2|1\le j\le c\}$$
$$=\{(a-4)c+1,(a-4)c+3,(a-4)c+5,\ldots,(a-2)c-1\}$$
$$=A_4$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_4 อยู่ในรูป $\alpha c+\beta$ เมื่อ $\alpha=a-4\equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_4\subseteq[(a-4)c+1,(a-2)c-1]$

ต่อมาโดย 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$\left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right)\middle|1 \le j \le c\right\}$
$= \left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right)\middle|1 \le j \le \frac{c+2}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right)\middle|\frac{c+4}{2} \le j \le c\right\}$
$= \left\{c + 2 - 2j\middle|1 \le j \le \frac{c+2}{2}\right\} \cup \left\{((a-1)c + 1) + c + 2 - 2j\middle|\frac{c+4}{2} \le j \le c\right\}$
$= \{0, 2, 4, \dots, c\} \cup \{(a-2)c + 3, (a-2)c + 5, (a-2)c + 7, \dots, (a-1)c - 1\}$
$= A_{51} \cup A_{52}$

จะเห็นว่าสมาชิกใน A_{51} เป็นจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง c

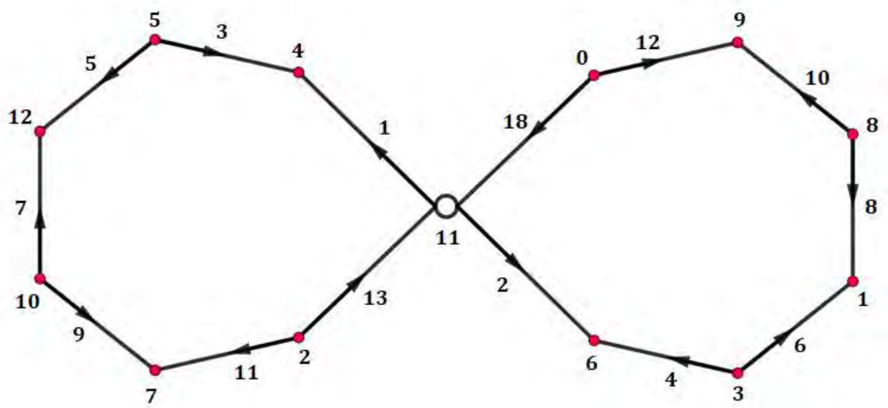
สมาชิกแต่ละตัวใน A_{52} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{52} \subseteq [(a-2)c + 3, (a-1)c - 1]$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{((a-1)c + 1) - c\} = \{(a-2)c + 1\} = A_6$

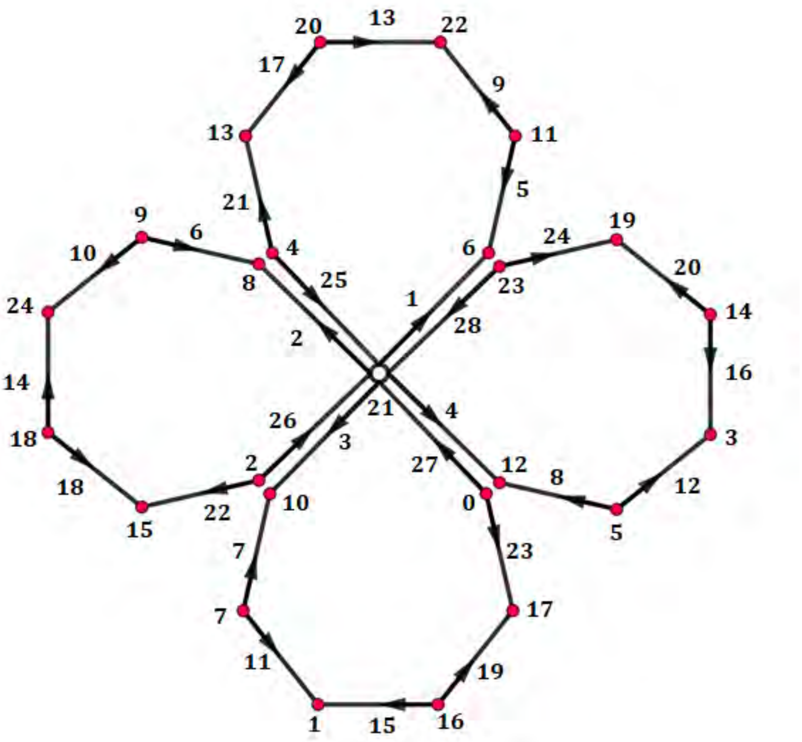
เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใดๆ จากบรรดา $A_1, A_{21}, A_{22}, A_{23}, \dots, A_{2c}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, \dots, B_{2c}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, \dots, A_{3c}, B_{31}, B_{32}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, \dots, C_{3c}, A_4, A_{51}, A_{52}$ และ A_6 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $A_{51} \cup B_{32} \cup A_{21} \cup A_1 \cup C_{31} \cup B_{21} \cup A_{22} \cup A_{31} \cup C_{32} \cup B_{22} \cup A_{23} \cup A_{32} \cup C_{33} \cup B_{23} \cup A_{33} \cup \dots \cup C_{3c} \cup A_{2c} \cup A_{3c} \cup A_4 \cup B_{2c} \cup A_6 \cup B_{31} \cup A_{52} = \{0, 1, 2, \dots, (a-1)c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0, 1, 2, \dots, (a-1)c\}$



ภาพที่ 2.7 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 7)$



ภาพที่ 2.8 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 7)$

3.6 กรณี $a \geq 7$, $\frac{a-3}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ c เป็นจำนวนเต็มคี่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 = \frac{a-5}{2} \geq 1$, $\frac{p-1}{2c} - 1 = \frac{a-3}{2} \geq 2$, $\frac{p-1}{c} - 1 = a - 2 \geq 3$ และ $p - 1 = (a-1)c$ ดังนั้น

จาก 2.1.3 จะได้ว่า

$\{g(v_1^j) | 1 \leq j \leq c\} = \{2j + c | 1 \leq j \leq c\} = \{c+2, c+4, c+6, \dots, 3c\} = A_1$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_1 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_1 \subseteq [c+2, 3c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \leq i \leq \frac{p-1-2c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right) - 1\right)c$

$= p - 1 - c < p$ และ

ถ้า $\frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c > 2 + \left(4\left(\frac{p-1+2c}{4c}\right) - 1\right)c$

$= p + c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.2.1 และ 2.2.2 จะได้ว่า

$\left\{g(v_{2i}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$

$= \left\{g(v_{2i}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-2c}{4c}\right\} \cup \left\{g(v_{2i}^j) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$

$= \left\{((a-1)c+1) - 2j - (4i-1)c \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-2c}{4c}\right\}$

$\cup \left\{2((a-1)c+1) - 2j - (4i-1)c \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1+2c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$

$= \{3c-(2j-1)|1 \le j \le c\} \cup \{7c-(2j-1)|1 \le j \le c\} \cup \{11c-(2j-1)|1 \le j \le c\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-4)c-(2j-1)|1 \le j \le c\}$
$\cup \{5c-(2j-2)|1 \le j \le c\} \cup \{9c-(2j-2)|1 \le j \le c\} \cup \{13c-(2j-2)|1 \le j \le c\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-2)c-(2j-2)|1 \le j \le c\}$
$= \{c+1, c+3, c+5, \ldots, 3c-1\} \cup \{5c+1, 5c+3, 5c+5, \ldots, 7c-1\}$
$\cup \{9c+1, 9c+3, 9c+5, \ldots, 11c-1\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+1, (a-6)c+3, (a-6)c+5, \ldots, (a-4)c-1\}$
$\cup \{3c+2, 3c+4, 3c+6, \ldots, 5c\} \cup \{7c+2, 7c+4, 7c+6, \ldots, 9c\}$
$\cup \{11c+2, 11c+4, 11c+6, \ldots, 13c\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-4)c+2, (a-4)c+4, (a-4)c+6, \ldots, (a-2)c\}$
$= A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \cup B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup \ldots \cup B_{2c}$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \subseteq [c+1, (a-4)c-1]$

สมาชิกแต่ละตัวใน $B_{21}, B_{22}, B_{23}, \ldots, B_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup \ldots \cup B_{2c} \subseteq [3c+2, (a-2)c-1]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \le i \le \frac{p-1-6c}{4c}$ และ $1 \le j \le c$ แล้ว $2j+(4i+1)c \le 2c + \left(4\left(\frac{p-1-6c}{4c}\right)+1\right)c$
$= p-1-3c < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1-2c}{4c}$ และ $1 \le j \le \frac{c-1}{2}$ แล้ว $2j+(4i+1)c \le c-1+\left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right)+1\right)c = p-2 < p$

และถ้า $i = \frac{p-1-2c}{4c}$ และ $\frac{c+1}{2} \le j \le c$ แล้ว $2j+(4i+1)c \ge c+1+\left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right)+1\right)c = p$ และ

ถ้า $\frac{p-1+2c}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c} - 2$ และ $1 \le j \le c$ แล้ว $2j+(4i+1)c \ge 2+\left(4\left(\frac{p-1+2c}{4c}\right)+1\right)c$
$= p+3c+1 > p$

ดังนั้นโดย 2.3.1 และ 2.3.2 จะได้ว่า

$\left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1}{2c}-2\right\}$
$= \left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1-6c}{4c}\right\} \cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right)\middle|1 \le j \le \frac{c-1}{2}\right\}$
$\cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right)\middle|\frac{c+1}{2} \le j \le c\right\} \cup \left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } \frac{p-1+2c}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c}-2\right\}$
$= \left\{2j+(4i+1)c\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1-6c}{4c}\right\} \cup \left\{2j+\left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right)+1\right)c\middle|1 \le j \le \frac{c-1}{2}\right\}$
$\cup \left\{2j+\left(4\left(\frac{p-1-2c}{4c}\right)+1\right)c-((a-1)c+1)\middle|\frac{c+1}{2} \le j \le c\right\}$
$\cup \left\{2j+(4i+1)c-((a-1)c+1)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } \frac{p-1+2c}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c}-2\right\}$
$= \{5c+2j|1 \le j \le c\} \cup \{9c+2j|1 \le j \le c\} \cup \{13c+2j|1 \le j \le c\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+2j|1 \le j \le c\} \cup \left\{(a-2)c+2j\middle|1 \le j \le \frac{c-1}{2}\right\}$
$\cup \left\{-c+2j-1\middle|\frac{c+1}{2} \le j \le c\right\} \cup \{3c+2j-1|1 \le j \le c\} \cup \{7c+2j-1|1 \le j \le c\}$
$\cup \{11c+2j-1|1 \le j \le c\} \cup \ldots \cup \{(a-8)c+2j-1)|1 \le j \le c\}$
$= \{5c+2, 5c+4, 5c+8, \ldots, 7c\} \cup \{9c+2, 9c+4, 9c+6, \ldots, 11c\}$
$\cup \{13c+2, 13c+4, 13c+8, \ldots, 15c\}$

$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+2,(a-6)c+4,(a-6)c+6,\ldots,(a-4)c\}$
$\cup \{(a-2)c+2,(a-2)c+4,(a-2)c+6,\ldots,(a-1)c-1\} \cup \{0,2,4,\ldots,c-1\}$
$\cup \{3c+1,3c+3,3c+5,\ldots,5c-1\} \cup \{7c+1,7c+3,7c+5,\ldots,9c-1\}$
$\cup \{11c+1,11c+3,11c+5,\ldots,13c-1\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-8)c+1,(a-8)c+3,(a-8)c+5,\ldots,(a-6)c-1\}$
$= A_{31} \cup A_{32} \cup A_{33} \cup \ldots \cup A_{3c} \cup B_{31} \cup B_{32} \cup C_{31} \cup C_{32} \cup C_{33} \cup \ldots \cup C_{3c}$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{31}, A_{32}, A_{33}, \ldots, A_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_{31} \cup A_{32} \cup A_{33} \cup \ldots \cup A_{3c} \subseteq [5c+2,(a-4)c]$

สมาชิกแต่ละตัวใน B_{31} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a-2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $B_{31} \subseteq [(a-2)c+2,(a-1)c-1]$

สมาชิกใน B_{32} เป็นจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง $c-1$

สมาชิกแต่ละตัวใน $C_{31}, C_{32}, C_{33}, \ldots, C_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $C_{31} \cup C_{32} \cup C_{33} \cup \ldots \cup C_{3c} \subseteq [3c+1,(a-6)c-1]$

ต่อมาโดย 2.4 จะได้ว่า

$$\left\{ g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}-1}\right) \middle| 1 \le j \le c \right\} = \{(a-1)c+1+2j-3c-2 | 1 \le j \le c\}$$
$$= \{(a-4)c+1,(a-4)c+3,(a-4)c+5,\ldots,(a-2)c-1\}$$
$$= A_4$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_4 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a-4 \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_4 \subseteq [(a-4)c+1,(a-2)c-1]$

ต่อมาโดย 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$\left\{ g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right) \middle| 1 \le j \le c \right\}$$
$$= \left\{ g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right) \middle| 1 \le j \le \tfrac{c+1}{2} \right\} \cup \left\{ g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right) \middle| \tfrac{c+3}{2} \le j \le c \right\}$$
$$= \left\{ c+2-2j \middle| 1 \le j \le \tfrac{c+1}{2} \right\} \cup \left\{ ((a-1)c+1)+c+2-2j \middle| \tfrac{c+3}{2} \le j \le c \right\}$$
$$= \{1,3,5,\ldots,c\} \cup \{(a-2)c+3,(a-2)c+5,(a-2)c+7,\ldots,(a-1)c\}$$
$$= A_{51} \cup A_{52}$$

จะเห็นว่าสมาชิกใน A_{51} เป็นจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง c

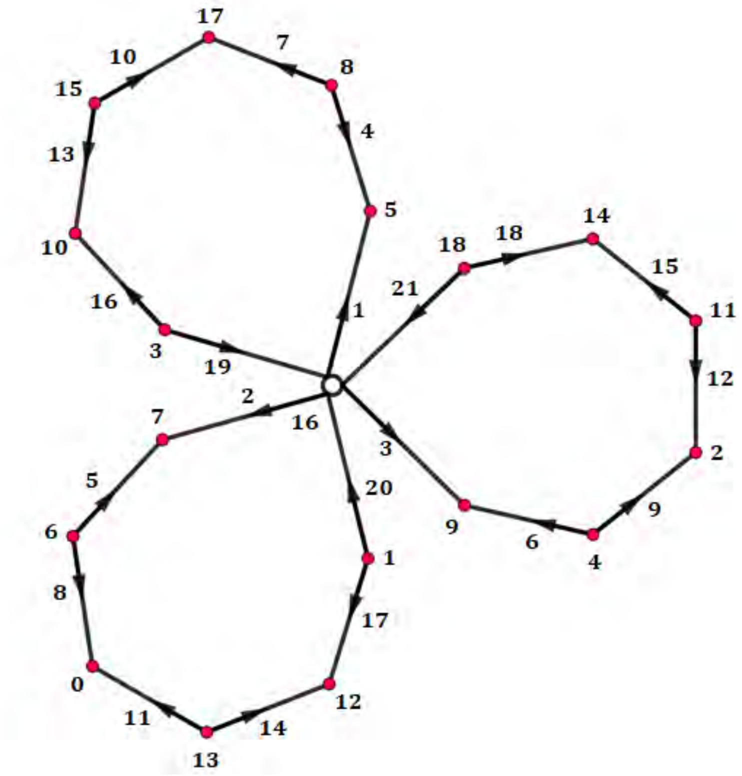
สมาชิกแต่ละตัวใน A_{52} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a-2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{52} \subseteq [(a-2)c+3,(a-1)c-1]$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{((a-1)c+1)-c\} = \{(a-2)c+1\} = A_6$

เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใดๆ จากบรรดา $A_1, A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{2c}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, \ldots, B_{2c}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, \ldots, A_{3c}, B_{31}, B_{32}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, \ldots, C_{3c}, A_4, A_{51}, A_{52}$ และ A_6 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $B_{32} \cup A_{51} \cup A_{21} \cup A_1 \cup C_{31} \cup B_{21} \cup A_{22} \cup A_{31} \cup C_{32} \cup B_{22} \cup A_{23} \cup A_{32} \cup C_{33} \cup B_{23} \cup \ldots \cup C_{3c} \cup A_{2c} \cup A_{3c} \cup A_4 \cup A_6 \cup B_{31} \cup A_{52} = \{0,1,2,\ldots,(a-1)c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0,1,2,\ldots,(a-1)c\}$



ภาพที่ 2.9 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3\times 7)$

3.7 กรณี $a \geq 7$, $\frac{a-3}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ c เป็นจำนวนเต็มคู่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 = \frac{a-5}{2} \geq 1$, $\frac{p-1}{2c} - 1 = \frac{a-3}{2} \geq 2$, $\frac{p-1}{c} - 1 = a - 2 \geq 3$ และ $p - 1 = (a-1)c$ ดังนั้น

จาก 2.1.3 จะได้ว่า

$\left\{g\left(v_1^j\right) \middle| 1 \leq j \leq c\right\} = \{2j + c | 1 \leq j \leq c\} = \{c+2, c+4, c+6, \dots, 3c\} = A_1$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_1 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_1 \subseteq [c+2, 3c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1-4c}{4c}\right) - 1\right)c$
$= p - 1 - 3c < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1}{4c}$ และ $1 \leq j \leq \frac{c}{2}$ แล้ว $2j + (4i-1)c \leq c + \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c = p - 1 < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1}{4c}$ และ $\frac{c+2}{2} \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c \geq c + 2 + \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c = p + 1 > p$ และ

ถ้า $\frac{p-1+4c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c > 2 + \left(4\left(\frac{p-1+4c}{4c}\right) - 1\right)c$
$= p + 3c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.2.1 และ 2.2.2 จะได้ว่า

$\left\{g\left(v_{2i}^j\right) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$

$= \left\{g\left(v_{2i}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1-4c}{4c}\right\} \cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right)\middle|1 \le j \le \frac{c}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right)\middle|\frac{c+2}{2} \le j \le c\right\}$

$\cup \left\{g\left(v_{2i}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } \frac{p-1+4c}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$

$= \left\{\left((a-1)c+1\right) - 2j - (4i-1)c\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1-4c}{4c}\right\}$

$\cup \left\{\left((a-1)c+1\right) - 2j - \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c\middle|1 \le j \le \frac{c}{2}\right\}$

$\cup \left\{2\left((a-1)c+1\right) - 2j - \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c\middle|\frac{c+2}{2} \le j \le c\right\}$

$\cup \left\{2\left((a-1)c+1\right) - 2j - (4i-1)c\middle|1 \le j \le c \text{ และ } \frac{p-1+4c}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$

$= \{5c+1-2j|1 \le j \le c\} \cup \{9c+1-2j|1 \le j \le c\} \cup \{13c+1-2j|1 \le j \le c\}$

$\cup \ldots \cup \{(a-4)c+1-2j|1 \le j \le c\} \cup \left\{c+1-2j\middle|1 \le j \le \frac{c}{2}\right\} \cup \left\{ac+2-2j\middle|\frac{c+2}{2} \le j \le c\right\}$

$\cup \{5c+2-2j|1 \le j \le c\} \cup \{9c+2-2j|1 \le j \le c\} \cup \{13c+2-2j|1 \le j \le c\}$

$\cup \ldots \cup \{(a-4)c+2-2j|1 \le j \le c\}$

$= \{3c+1, 3c+3, 3c+5, \ldots, 5c-1\} \cup \{7c+1, 7c+3, 7c+5, \ldots, 9c-1\}$

$\cup \{11c+1, 11c+3, 11c+5, \ldots, 13c-1\}$

$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+1, (a-6)c+3, (a-6)c+5, \ldots, (a-4)c-1\} \cup \{1, 3, 5, \ldots, c-1\}$

$\cup \{(a-2)c+2, (a-2)c+4, (a-2)c+6, \ldots, (a-1)c\}$

$\cup \{3c+2, 3c+4, 3c+6, \ldots, 5c\} \cup \{7c+2, 7c+4, 7c+6, \ldots, 9c\}$

$\cup \{11c+2, 11c+4, 11c+6, \ldots, 13c\}$

$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+2, (a-6)c+4, (a-6)c+6, \ldots, (a-4)c\}$

$= A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \cup B_{21} \cup B_{22} \cup C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23} \cup \ldots \cup C_{2c}$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \subseteq [3c+1, (a-4)c-1]$

สมาชิกใน B_{21} เป็นจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง $c-1$

สมาชิกแต่ละตัวใน B_{22} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $B_{31} \subseteq [(a-2)c+2, (a-1)c]$

สมาชิกแต่ละตัวใน $C_{21}, C_{22}, C_{23}, \ldots, C_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23} \cup \ldots \cup C_{2c} \subseteq [3c+2, (a-4)c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \le i \le \frac{p-1-4c}{4c}$ และ $1 \le j \le c$ แล้ว $2j + (4i+1)c \le 2c + \left(4\left(\frac{p-1-4c}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p - c - 1 < p$ และ

ถ้า $\frac{p-1}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c} - 2$ และ $1 \le j \le c$ แล้ว $2j + (4i-1)c > 2 + \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p + c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.3.1 และ 2.3.2 จะได้ว่า

$\left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1}{2c} - 2\right\}$

$= \left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1-4c}{4c}\right\} \cup \left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } \frac{p-1}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c} - 2\right\}$

$= \left\{2j + (4i+1)c\middle|1 \le j \le c \text{ และ } 1 \le i \le \frac{p-1-4c}{4c}\right\}$

$\cup \left\{2j + (4i+1)c - ((a-1)c+1)\middle|1 \le j \le c \text{ และ } \frac{p-1}{4c} \le i \le \frac{p-1}{2c} - 2\right\}$

$= \{5c + 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \{9c + 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \{13c + 2j | 1 \leq j \leq c\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-4)c + 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \{c + 2j - 1 | 1 \leq j \leq c\} \cup \{5c + 2j - 1 | 1 \leq j \leq c\}$
$\cup \{9c + 2j - 1 | 1 \leq j \leq c\} \cup \ldots \cup \{(a-8)c + 2j - 1) | 1 \leq j \leq c\}$
$= \{5c + 2, 5c + 4, 5c + 8, \ldots, 7c\} \cup \{9c + 2, 9c + 4, 9c + 6, \ldots, 11c\}$
$\cup \{13c + 2, 13c + 4, 13c + 8, \ldots, 15c\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-4)c + 2, (a-4)c + 4, (a-4)c + 6, \ldots, (a-2)c\}$
$\cup \{c + 1, c + 3, c + 5, \ldots, 3c - 1\} \cup \{5c + 1, 5c + 3, 5c + 5, \ldots, 7c - 1\}$
$\cup \{9c + 1, 9c + 3, 9c + 5, \ldots, 11c - 1\}$
$\cup \ldots \cup \{(a-8)c + 1, (a-8)c + 3, (a-8)c + 5, \ldots, (a-6)c - 1\}$
$= A_{31} \cup A_{32} \cup A_{33} \cup \ldots \cup A_{3c} \cup B_{31} \cup B_{32} \cup B_{33} \cup \ldots \cup B_{3c}$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{31}, A_{32}, A_{33}, \ldots, A_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_{31} \cup A_{32} \cup A_{33} \cup \ldots \cup A_{3c} \subseteq [5c + 2, (a-2)c]$

สมาชิกแต่ละตัวใน $B_{31}, B_{32}, B_{33}, \ldots, B_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $B_{31} \cup B_{32} \cup B_{33} \cup \ldots \cup B_{3c} \subseteq [c + 1, (a-6)c - 1]$

ต่อมาโดย 2.4 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}-1}\right) \middle| 1 \leq j \leq c\right\} = \{(a-1)c + 1 + 2j - 3c - 2 | 1 \leq j \leq c\}$$
$$= \{(a-4)c + 1, (a-4)c + 3, (a-4)c + 5, \ldots, (a-2)c - 1\}$$
$$= A_4$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_4 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 4 \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_4 \subseteq [(a-4)c + 1, (a-2)c - 1]$

ต่อมาโดย 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right) \middle| 1 \leq j \leq c\right\}$$
$$= \left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right) \middle| 1 \leq j \leq \tfrac{c+2}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v^{j}_{\frac{p-1}{c}}\right) \middle| \tfrac{c+4}{2} \leq j \leq c\right\}$$
$$= \left\{c + 2 - 2j \middle| 1 \leq j \leq \tfrac{c+2}{2}\right\} \cup \left\{((a-1)c + 1) + c + 2 - 2j \middle| \tfrac{c+4}{2} \leq j \leq c\right\}$$
$$= \{0, 2, 4, \ldots, c\} \cup \{(a-2)c + 3, (a-2)c + 5, (a-2)c + 7, \ldots, (a-1)c - 1\}$$
$$= A_{51} \cup A_{52}$$

จะเห็นว่าสมาชิกใน A_{51} เป็นจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง c

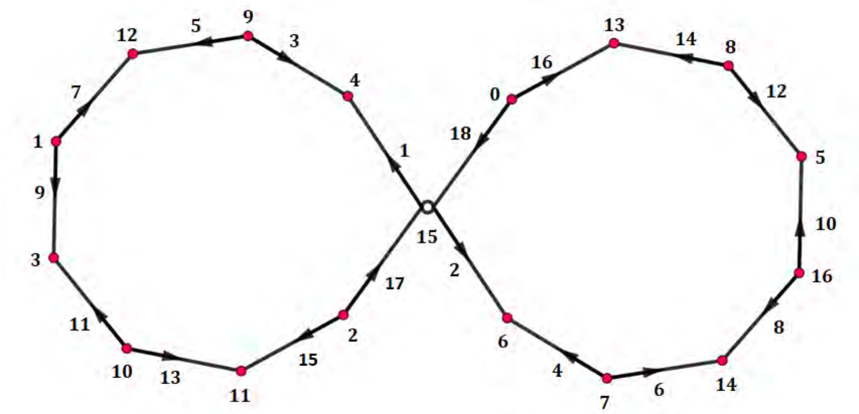
สมาชิกแต่ละตัวใน A_{52} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{52} \subseteq [(a-2)c + 3, (a-1)c - 1]$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{((a-1)c + 1) - c\} = \{(a-2)c + 1\} = A_6$

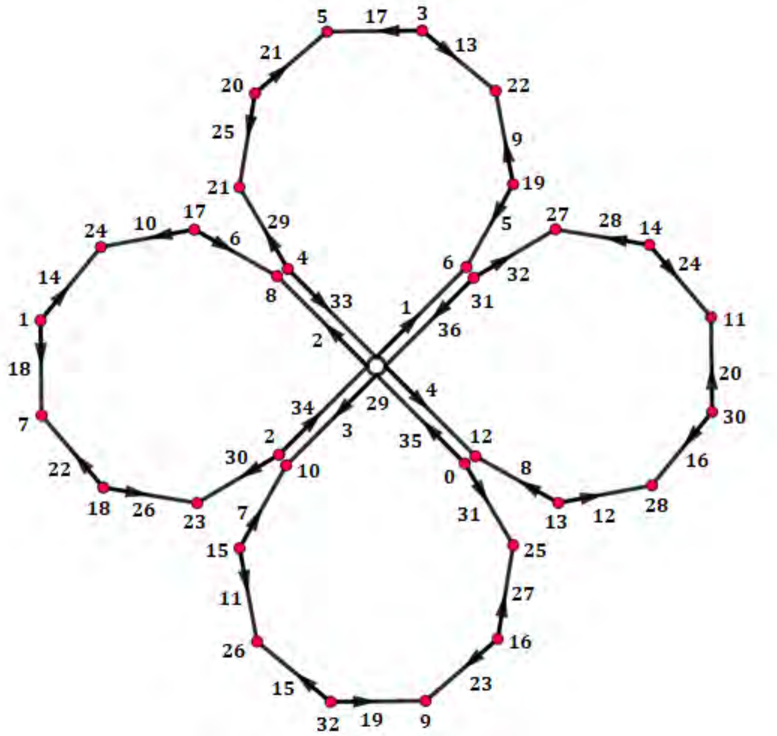
เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใด ๆ จากบรรดา $A_1, A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{2c}, B_{21}, B_{22}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, \ldots, C_{2c}$, $A_{31}, A_{32}, A_{33}, \ldots, A_{3c}, B_{31}, B_{32}, B_{33}, \ldots, B_{3c}, A_4, A_{51}, A_{52}$ และ A_6 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $A_{51} \cup B_{21} \cup B_{31} \cup A_1 \cup A_{21} \cup C_{21} \cup B_{32} \cup A_{31} \cup A_{22} \cup C_{22} \cup B_{33} \cup A_{32} \cup A_{23} \cup C_{23} \cup \ldots \cup B_{3c} \cup A_{2c} \cup C_{2c} \cup A_4 \cup A_{3c} \cup A_6 \cup B_{22} \cup A_{52} = \{0, 1, 2, \ldots, (a-1)c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0, 1, 2, \ldots, (a-1)c\}$



ภาพที่ 2.10 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(2 \times 9)$



ภาพที่ 2.11 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(4 \times 9)$

3.8 กรณี $a \geq 7$, $\frac{a-3}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ c เป็นจำนวนเต็มคี่ สังเกตว่า $\frac{p-1}{2c} - 2 = \frac{a-5}{2} \geq 1$, $\frac{p-1}{2c} - 1 = \frac{a-3}{2} \geq 2$, $\frac{p-1}{c} - 1 = a - 2 \geq 3$ และ $p - 1 = (a-1)c$ ดังนั้น

จาก 2.1.3 จะได้ว่า

$\{g(v_1^j) | 1 \leq j \leq c\} = \{2j + c | 1 \leq j \leq c\} = \{c+2, c+4, c+6 \ldots, 3c\} = A_1$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_1 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_1 \subseteq [c+2, 3c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1-4c}{4c}\right) - 1\right)c$

$= p - 1 - 3c < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1}{4c}$ และ $1 \leq j \leq \frac{c+1}{2}$ แล้ว $2j + (4i-1)c \leq c + \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c = p - 1 < p$ และ

ถ้า $i = \frac{p-1}{4c}$ และ $\frac{c+3}{2} \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c \geq c + 2 + \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c = p + 1 > p$ และ

ถ้า $\frac{p-1+4c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c > 2 + \left(4\left(\frac{p-1+4c}{4c}\right) - 1\right)c$

$= p + 3c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.2.1 และ 2.2.2 จะได้ว่า

$$\left\{g\left(v_{2i}^{j}\right) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$$

$$= \left\{g\left(v_{2i}^{j}\right) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}\right\} \cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right) \middle| 1 \leq j \leq \frac{c+1}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{2c}}^{j}\right) \middle| \frac{c+3}{2} \leq j \leq c\right\} \cup \left\{g\left(v_{2i}^{j}\right) \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1+4c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$$

$$= \left\{\left((a-1)c+1\right) - 2j - (4i-1)c \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}\right\}$$

$$\cup \left\{\left((a-1)c+1\right) - 2j - \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c \middle| 1 \leq j \leq \frac{c+1}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{2\left((a-1)c+1\right) - 2j - \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) - 1\right)c \middle| \frac{c+3}{2} \leq j \leq c\right\}$$

$$\cup \left\{2\left((a-1)c+1\right) - 2j - (4i-1)c \middle| 1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1+4c}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 1\right\}$$

$$= \{5c + 1 - 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \{9c + 1 - 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \{13c + 1 - 2j | 1 \leq j \leq c\}$$

$$\cup \ldots \cup \{(a-4)c + 1 - 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \left\{c + 1 - 2j \middle| 1 \leq j \leq \frac{c+1}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{ac + 2 - 2j \middle| \frac{c+3}{2} \leq j \leq c\right\} \cup \{(a-4)c + 2 - 2j | 1 \leq j \leq c\}$$

$$\cup \{(a-8)c + 2 - 2j | 1 \leq j \leq c\}$$

$$\cup \{(a-12) + 2 - 2j | 1 \leq j \leq c\} \cup \ldots \cup \{5c + 2 - 2j | 1 \leq j \leq c\}$$

$$= \{3c+1, 3c+3, 3c+5, \ldots, 5c-1\} \cup \{7c+1, 7c+3, 7c+5, \ldots, 9c-1\}$$

$$\cup \{11c+1, 11c+3, 11c+5, \ldots, 13c-1\}$$

$$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+1, (a-6)c+3, (a-6)c+5, \ldots, (a-4)c-1\} \cup \{0, 2, 4, \ldots, c-1\}$$

$$\cup \{(a-2)c+2, (a-2)c+4, (a-2)c+6, \ldots, (a-1)c-1\}$$

$$\cup \{3c+2, 3c+4, 3c+6, \ldots, 5c\} \cup \{7c+2, 7c+4, 7c+6, \ldots, 9c\}$$

$$\cup \{11c+2, 11c+4, 11c+6, \ldots, 13c\}$$

$$\cup \ldots \cup \{(a-6)c+2, (a-6)c+4, (a-6)c+6, \ldots, (a-4)c\}$$

$$= A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \cup B_{21} \cup B_{22} \cup C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23} \cup \ldots \cup C_{2c}$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{2c} \subseteq [3c+1, (a-4)c-1]$

สมาชิกใน B_{21} เป็นจำนวนเต็มคู่ตั้งแต่ 0 ถึง $c-1$

สมาชิกแต่ละตัวใน B_{22} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $B_{31} \subseteq [(a-2)c+2, (a-1)c-1]$

สมาชิกแต่ละตัวใน $C_{21}, C_{22}, C_{23}, \ldots, C_{2c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23} \cup \ldots \cup C_{2c} \subseteq [3c+2, (a-4)c]$

ต่อมาสังเกตว่า

ถ้า $1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i+1)c \leq 2c + \left(4\left(\frac{p-1-4c}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p - c - 1 < p$ และ

ถ้า $\frac{p-1}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 2$ และ $1 \leq j \leq c$ แล้ว $2j + (4i-1)c > 2 + \left(4\left(\frac{p-1}{4c}\right) + 1\right)c$

$= p + c + 1 > p$

ดังนั้นโดย 2.3.1 และ 2.3.2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 2\right\} \\
&= \left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}\right\} \cup \left\{g\left(v_{2i+1}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 2\right\} \\
&= \left\{2j + (4i+1)c\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } 1 \leq i \leq \frac{p-1-4c}{4c}\right\} \\
&\quad \cup \left\{2j + (4i+1)c - ((a-1)c+1)\middle|1 \leq j \leq c \text{ และ } \frac{p-1}{4c} \leq i \leq \frac{p-1}{2c} - 2\right\} \\
&= \{5c + 2j|1 \leq j \leq c\} \cup \{9c + 2j|1 \leq j \leq c\} \cup \{13c + 2j|1 \leq j \leq c\} \\
&\quad \cup \ldots \cup \{(a-4)c + 2j|1 \leq j \leq c\} \cup \{c + 2j - 1|1 \leq j \leq c\} \cup \{5c + 2j - 1|1 \leq j \leq c\} \\
&\quad \cup \{9c + 2j - 1|1 \leq j \leq c\} \cup \ldots \cup \{(a-8)c + 2j - 1)|1 \leq j \leq c\} \\
&= \{5c+2, 5c+4, 5c+8, \ldots, 7c\} \cup \{9c+2, 9c+4, 9c+6, \ldots, 11c\} \\
&\quad \cup \{13c+2, 13c+4, 13c+8, \ldots, 15c\} \\
&\quad \cup \ldots \cup \{(a-4)c+2, (a-4)c+4, (a-4)c+6, \ldots, (a-2)c\} \\
&\quad \cup \{c+1, c+3, c+5, \ldots, 3c-1\} \cup \{5c+1, 5c+3, 5c+5, \ldots, 7c-1\} \\
&\quad \cup \{9c+1, 9c+3, 9c+5, \ldots, 11c-1\} \\
&\quad \cup \ldots \cup \{(a-8)c+1, (a-8)c+3, (a-8)c+5, \ldots, (a-6)c-1\} \\
&= A_{31} \cup A_{32} \cup A_{33} \cup \ldots \cup A_{3c} \cup B_{31} \cup B_{32} \cup B_{33} \cup \ldots \cup B_{3c}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_{31}, A_{32}, A_{33}, \ldots, A_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $A_{31} \cup A_{32} \cup A_{33} \cup \ldots \cup A_{3c} \subseteq [5c+2, (a-2)c]$

สมาชิกแต่ละตัวใน $B_{31}, B_{32}, B_{33}, \ldots, B_{3c}$ อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $B_{31} \cup B_{32} \cup B_{33} \cup \ldots \cup B_{3c} \subseteq [c+1, (a-6)c-1]$

ต่อมาโดย 2.4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left\{g\left(v_{\frac{p-1}{c}-1}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c\right\} &= \{(a-1)c + 1 + 2j - 3c - 2|1 \leq j \leq c\} \\
&= \{(a-4)c+1, (a-4)c+3, (a-4)c+5, \ldots, (a-2)c-1\} \\
&= A_4
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน A_4 อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 4 \equiv 3 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_4 \subseteq [(a-4)c+1, (a-2)c-1]$

ต่อมาโดย 2.5.1 และ 2.5.2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left\{g\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq c\right\} \\
&= \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right)\middle|1 \leq j \leq \frac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{g\left(v_{\frac{p-1}{c}}^{j}\right)\middle|\frac{c+3}{2} \leq j \leq c\right\} \\
&= \left\{c + 2 - 2j\middle|1 \leq j \leq \frac{c+1}{2}\right\} \cup \left\{((a-1)c+1) + c + 2 - 2j\middle|\frac{c+3}{2} \leq j \leq c\right\}
\end{aligned}
$$

$= \{1, 3, 5, \dots, c\} \cup \{(a-2)c+3, (a-2)c+5, (a-2)c+7, \dots, (a-1)c\}$
$= A_{51} \cup A_{52}$

จะเห็นว่าสมาชิกใน A_{51} เป็นจำนวนเต็มคี่ตั้งแต่ 1 ถึง c

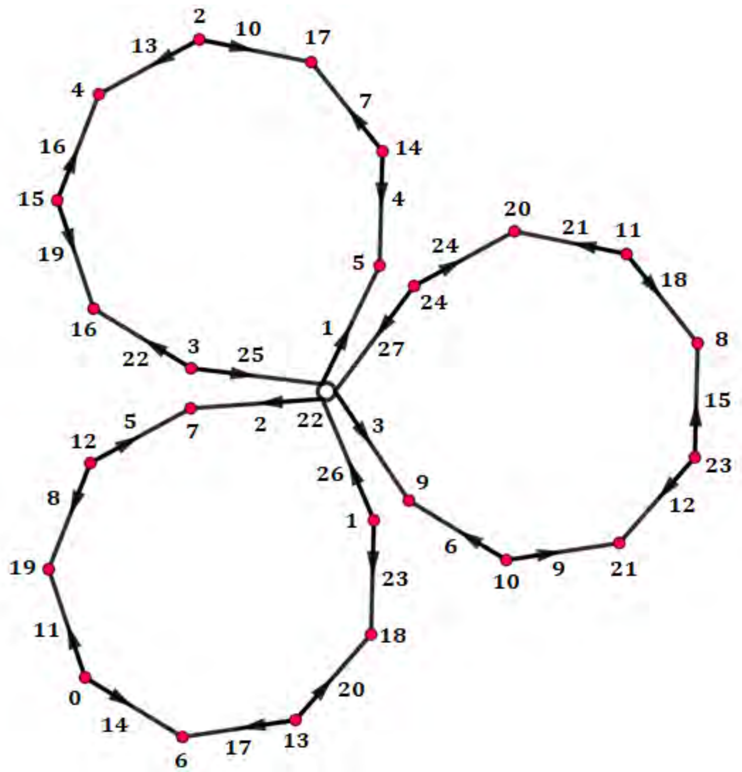
สมาชิกแต่ละตัวใน A_{52} อยู่ในรูป $\alpha c + \beta$ เมื่อ $\alpha = a - 2 \equiv 1 \pmod 4$ β เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $A_{52} \subseteq [(a-2)c+3, (a-1)c-1]$

สุดท้ายจาก 2.6 จะได้ว่า $\{g(w)\} = \{((a-1)c+1) - c\} = \{(a-2)c+1\} = A_6$

เห็นได้ชัดว่า เซต 2 เซตใด ๆ จากบรรดา $A_1, A_{21}, A_{22}, A_{23}, \dots, A_{2c}, B_{21}, B_{22}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, \dots, C_{2c}$, $A_{31}, A_{32}, A_{33}, \dots, A_{3c}, B_{31}, B_{32}, B_{33}, \dots, B_{3c}, A_4, A_{51}, A_{52}$ และ A_6 ไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย

ยิ่งไปกว่านั้น $B_{21} \cup A_{51} \cup B_{31} \cup A_1 \cup A_{21} \cup C_{21} \cup B_{32} \cup A_{31} \cup A_{22} \cup C_{22} \cup B_{33} \cup A_{32} \cup A_{23} \cup C_{23} \cup \dots \cup B_{3c} \cup A_{2c} \cup C_{2c} \cup A_4 \cup A_{3c} \cup A_6 \cup B_{22} \cup A_{52} = \{0, 1, 2, \dots, (a-1)c\}$

ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{0, 1, 2, \dots, (a-1)c\}$



ภาพที่ 2.12 การกำกับอย่างสง่างามบนเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(3 \times 9)$

บทที่ 3

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานนี้ได้กำหนดทิศทางให้กับกราฟที่สร้างโดยการกำหนดให้จุดจุดหนึ่งของวง C_a จำนวน c วงเป็นจุดเดียวกัน ที่เรียกว่า ไดกราฟ $C(c \times a)$ แล้วสร้างการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$ เมื่อ c เป็นจำนวนนับที่ $c \geq 2$ และ a เป็นจำนวนนับที่ $a \geq 3$ และพิสูจน์ว่าการกำกับนี้เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$

สังเกตว่าโครงงานฉบับนี้ศึกษาเพียงกรณีที่ a เป็นจำนวนนับคี่ ด้วยแนวคิดเดียวกันนี้ ผู้ที่สนใจอาจพยายามสร้างการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ $C(c \times a)$ ในกรณีที่ a เป็นจำนวนนับคู่ต่อไปได้

เอกสารอ้างอิง

[1] B. Gayatri and V. Vanitha (2011). Directed edge - graceful labeling of trees, Elixir Appl. Math, 36, 3062-3066.

[2] B. Gayatri and V. Vanitha (2011). Directed edge - graceful labeling of cycle and star related graphs, International Journal of Mathematics and Soft Computing Vol.1, No.1, 89-104.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน(ภาษาไทย)	การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง
ชื่อโครงงาน(ภาษาอังกฤษ)	Directed Edge-Graceful labeling of digraph containing at least 2 cycles
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ	นางสาวนัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว เลขประจำตัวนิสิต 5933525923 สาขา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟที่มีทิศทาง หรือไดกราฟ ที่มี V เป็นเซตของจุดยอดจำนวน p จุด และ E เป็นเซตของเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง หรือเซตของเส้นเชื่อมจำนวน q เส้น *การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง*ของ G คือ ฟังก์ชัน f แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปยัง $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ ที่มีสมบัติว่า $g : V \to \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ กำหนดโดย

$$g(v) = \left(f^{+}(v) - f^{-}(v)\right) \bmod p$$

เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่

$f^{+}(v)$ คือ ผลรวมของจำนวนซึ่งกำกับบนเส้นเชื่อมที่มีทิศพุ่งเข้าหาจุดยอด v และ

$f^{-}(v)$ คือ ผลรวมของจำนวนซึ่งกำกับบนเส้นเชื่อมที่มีทิศพุ่งออกจากจุดยอด v

ในปี ค.ศ. 2011 Gayathri และ Vanitha ได้ศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟต้นไม้ [1] และการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟวงและไดกราฟที่เกี่ยวข้องกับดาว [2] โดยที่การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟ เป็นการวางนัยทั่วไปของการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมของกราฟที่นิยามโดย Lo [3] ทั้งนี้ผลการศึกษาจาก [1] และ [2] มุ่งพิจารณาไดกราฟไม่มีวง และไดกราฟที่มีวงเพียงวงเดียว

ในโครงงานฉบับนี้จะศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง บางไดกราฟ

วัตถุประสงค์

เพื่อหาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง บางไดกราฟ

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาเฉพาะการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง อย่างน้อย 2 ไดกราฟ

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟจากงานวิจัยที่มีอยู่แล้ว
2. กำหนดไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง และสร้างการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟดังกล่าว
3. พิสูจน์ว่าการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่สร้าง เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง
4. สรุปและจัดทำรูปเล่ม

ระยะเวลาที่ศึกษา

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2562 - เมษายน 2563								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟจากงานวิจัยที่มีอยู่แล้ว									
2. กำหนดไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง และสร้างการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟดังกล่าว									
3. พิสูจน์ว่าการกำกับบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่สร้าง เป็นการกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง									
4. สรุปและจัดทำรูปเล่ม									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้การกำกับอย่างสง่างามบนเส้นเชื่อมแสดงทิศทางของไดกราฟที่มีวงอย่างน้อย 2 วง บางไดกราฟ
2. ได้ศึกษาการขยายงานวิจัยทางคณิตศาสตร์

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. คอมพิวเตอร์
2. กระดาษ A4
3. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล
4. Microsoft Word

งบประมาณ

1. กระดาษ A4	1,000	บาท
2. ค่าถ่ายเอกสาร	1,000	บาท
3. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล	1,500	บาท
4. หมึกพิมพ์	1,500	บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] B. Gayatri and V. Vanitha (2011). Directed edge - graceful labeling of trees, Elixir Appl. Math, 36, 3062-3066.

[2] B. Gayatri and V. Vanitha (2011). Directed edge - graceful labeling of cycle and star related graphs, International Journal of Mathematics and Soft Computing Vol.1, No.1, 89-104.

[3] S. Lo (1985). On edge – graceful labelings of graphs, Congr. Numer., 50, 231-241.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวนัตดาวรรณ์ ร่วมแก้ว

รหัสนิสิต 5933525923

สาขา คณิตศาสตร์

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย