โครงการ
การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ	ผลของความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร Effect of round-off error on calculation of limits of function of one-variable.
ชื่อนิสิต	นายปัญจพล สมิทธิเวชรงค์ 593 35322 23
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลของความผิดพลาดจากการปัดเศษ
ต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

นาย ปัญจพล สมิทธิเวชรงค์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

Effect of round-off error

on calculation of limits of function of one-variable.

Mr. Punjapol Samittwechrong

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน ผลของความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

โดย นายปัญจพล สมิทธิเวชรงค์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย)

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

นายปัญจพล สมิทธิเวชรงค์ : ผลของความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร (Effect of round-off error on calculation of limits of function of one-variable.)
อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย, 48 หน้า.

โครงงานนี้ ศึกษาเกี่ยวกับผลจากความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน และแนวทางในการใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการประมาณค่าลิมิตภายใต้ความแม่นยำที่กำหนดให้ โดยการควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษให้ได้อย่างเหมาะสม สำหรับฟังก์ชัน 1 ตัวแปรที่มีค่าลิมิตเป็นจำนวนจริง โดยการคำนวณจะทำผ่านโปรแกรมแมทแลบ

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ปัญจพล สมิทธิเวชรงค์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
ปีการศึกษา 2562

#5933532223 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : ROUND-OFF ERROR / LIMITS / FUNCTION OF ONE-VARIABLE

PUNJAPOL SAMITTIWECHRONG : EFFECT OF ROUND-OFF ERROR ON CALCULATION OF LIMITS OF FUNCTION OF ONE-VARIABLE.

ADVISOR : ASSOC. PROF. KHAMRON MEKCHAY, Ph.D., 48 pp.

This research aims to study the effects of round-off error on the limit calculation of functions and to find a way for using a computer to help in estimation of the limit under a given accuracy by a suitable control of round-off error. The study is only for a function of one variable that has a limit as a real number. The computation is performed under MatLab program.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature ปุญจพล สมิทธิเวชรงค์

Field of Study : Math. Advisor's Signature

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัย เรื่อง ผลของความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินการวิจัยจึงใคร่ขอขอบพระคุณในความช่วยเหลือต่างๆ ดังต่อไปนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย ที่กรุณารับผู้ดำเนินการเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษาต่างๆ ตั้งแต่ขั้นตอนวิธีการดำเนินงาน คอยติดตามความก้าวหน้าอยู่ตลอดเวลา ดูแลเอาใจใส่ ให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับปัญหา ชี้ให้เห็นข้อผิดพลาดต่างๆ อย่างละเอียด แก้ไขปรับปรุงโครงงานให้มีความถูกต้อง และให้ความช่วยเหลือหลายสิ่งหลายอย่าง ตั้งแต่การเริ่มต้นทำโครงงาน จนกระทั่งโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และรองศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา ที่กรุณามาเป็นกรรมการสอบโครงงานในครั้งนี้ และยังให้ข้อเสนอแนะและแนวคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง รวมทั้งชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่างๆ เพื่อนำไปแก้ไขโครงงานให้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ในการใช้วิธีเชิงตัวเลขผ่านคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาค่าของปัญหานั้นๆ ค่าที่หาได้จะมีความผิดพลาดเกิดขึ้น เพราะโดยหลักการแล้ว ค่าที่นำมาใช้ในการคำนวณส่วนมากเป็นเพียงค่าประมาณของค่าจริงที่ต้องการ อย่างเช่นการที่เราไม่สามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ที่มีจำนวนอนันต์พจน์ได้ จึงต้องประมาณค่านั้นด้วยผลบวกจำนวนจำกัดพจน์แรก แล้วส่วนปลายของอนุกรมนั้นที่ตัดทิ้งก็จะกลายเป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ซึ่งเรียกว่า *ค่าความผิดพลาดจากการตัดปลาย* (truncation error) หรือ การที่เรามีจำนวนอตรรกยะที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ เราไม่สามารถเขียนทศนิยมออกมาได้หมดทุกตำแหน่ง โดยเราจะเขียนค่าประมาณถึงเพียงทศนิยมที่ต้องการ เช่น ถ้าต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่งก็จะตัดทศนิยมตั้งแต่ตำแหน่งที่ 5 ทิ้งไป หรือปัดเศษของทศนิยมตัวถัดไปขึ้นมาที่ตำแหน่งที่ 4 อีก 1 ซึ่งจะเกิดค่าความผิดพลาดขึ้นมา เรียกว่า *ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ* (round-off error)

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน เราสามารถทำได้หลากหลายวิธี เช่น การแทนค่าตัวเลขลงในฟังก์ชันโดยตรง หรือ ใช้วิธีการและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาช่วย เช่น การแยกตัวประกอบ ทฤษฎีบทของโลปิตาล เป็นต้น หรือ อาจจะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณหาค่าได้ เช่น MathCad, Mathematica, และ Matlab เป็นต้น ซึ่งในบางครั้งในกรณีที่ฟังก์ชันมีความซับซ้อนมาก โปรแกรมที่ใช้ก็อาจจะไม่สามารถหาค่าที่ถูกต้องได้ รวมทั้งการแทนค่าตัวเลขให้ใกล้กับจุดที่จะหาค่าลิมิตโดยใช้โปรแกรมคำนวณ ส่วนมากก็จะมีความผิดพลาดที่เกิดมาจากความผิดพลาดจากการปัดเศษ ดังนั้นการหาค่าของลิมิตโดยการแทนตัวเลขใกล้จุดที่ต้องการหาค่าลิมิต จึงเป็นตัวอย่างของปัญหาเกี่ยวกับความผิดพลาด ที่อาจจะเกิดขึ้นมาจากการปัดเศษ

ในการศึกษา เราสนใจที่จะศึกษาถึงแนวทางในการใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาค่าลิมิตจากการแทนค่า โดยพิจารณาเกี่ยวกับค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ โดยเรามีสมมติฐานที่ว่า ถ้าเราสามารถควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษให้เหมาะสม ก็อาจจะทำให้เราสามารถคำนวณค่าลิมิตได้ภายใต้ความแม่นยำที่เราต้องการได้

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาเกี่ยวกับผลของค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร ที่ค่าลิมิตเป็นจำนวนจริง
2. เพื่อศึกษาถึงแนวทางในการใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการประมาณค่าลิมิตภายใต้แม่นยำภายใต้ที่ต้องการ

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

1. ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ศึกษาเฉพาะฟังก์ชัน 1 ตัวแปร ที่ค่าลิมิตเป็นจำนวนจริง โดยการคำนวณค่าประมาณที่มีความผิดพลาดจากการปัดเศษมาเกี่ยวข้อง
2. ในการคำนวณจำดำเนินการด้วยคอมพิวเตอร์ โดยใช้โปรแกรม MATLAB

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ในด้านความรู้และประสบการณ์ต่อตัวนิสิตเอง
   - 1.1 ฝึกฝนการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้วยวิธีการต่างๆ
   - 1.2 ทดลองใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ
2. ความรู้ ความเข้าใจที่นำไปสู่การแก้ไขปัญหา
   - 2.1 ควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษได้อย่างเหมาะสม ทำให้สามารถคำนวณค่าลิมิตได้ ภายใต้ความแม่นยำที่กำหนดให้
   - 2.2 เป็นแนวทางสำหรับบุคคลที่สนใจในการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมหรือนำไปพัฒนาต่อสำหรับปัญหาอื่นๆ ที่ต้องการความแม่นยำสูง ที่อาจจะมีปัญหาที่เกิดขึ้นจากการปัดเศษ

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

บทนิยาม ให้ E เป็นสับเซตของจำนวนจริง R และ เราจะกล่าวว่า a เป็น *จุดลิมิต* (Limit point) ของ E ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆจำนวนจริงบวก δ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า $((a-\delta, a+\delta)-\{a\}) \cap E \neq \emptyset$

บทนิยาม ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ D เป็นสับเซตของ R และ a เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า *f(x)* มี ลิมิต (limit) เป็นจำนวนจริง L ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆจำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$

ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน เราสามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งตามปกติเรามักนิยมใช้การแทนค่าตัวเลขลงในฟังก์ชันโดยตรง เพื่อดูว่าลิมิตเข้าใกล้ค่าใด หรืออาจจะใช้การจัดรูป การแยกตัวประกอบ แต่ในบางครั้งค่าของฟังก์ชันก็อยู่ในรูปแบบที่ไม่สามารถจัดรูปหรือแยกตัวประกอบได้ เราสามารถใช้กฎของโลปิตาลในการหาค่าลิมิตออกมาได้ ซึ่งมีทั้งสิ้นหลายรูปแบบ เช่น หากสมการอยู่ในรูปของ 0/0 หรือ ∞/∞ หรือ เราก็สามารถทำการหาอนุพันธ์ไปเรื่อยจนกว่าจะได้คำตอบของลิมิต ด้วยการหาอนุพันธ์ของตัวเศษและตัวส่วน

หมายเหตุ ในโครงงานนี้เราจะพิจารณาเฉพาะในกรณีที่ค่าลิมิตเป็นจำนวนจริง L เท่านั้น
อีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้การหาค่าลิมิต ซึ่งสามารถทำโดยในเชิงสัญลักษณ์ หรือการแทนค่าด้วยตัวเลขที่ใกล้เคียงกับจุดลิมิต

การหาค่าลิมิต ในเชิงสัญลักษณ์ (symbolic) สามารถทำได้ด้วยโปรแกรมต่างๆ เช่น Mathematica, Matlab เป็นต้น ส่วนการประมาณค่าลิมิตโดยการแทนค่า สามารถทำได้โดยใช้เครื่องคำนวณทั่วไป เช่นเครื่องคิดเลข หรือ คอมพิวเตอร์ เป็นต้น

สำหรับในโครงงานนี้จะศึกษาการประมาณค่าลิมิตโดยการแทนค่าใกล้เคียงจุดลิมิต ผ่านการคำนวณโดยใช้โปรแกรมแมทแลบ (MatLab) เป็นเครื่อง เนื่องจากมีความสามารถในการเขียนเป็นโปรแกรมชุดคำสั่งสำหรับการคำนวณ และ สามารถกำหนดความแม่นยำในการคำนวณได้ด้วย ทำให้สามารถนำมาศึกษาเกี่ยวกับความผิดพลาดที่เกิดจากการปัดเศษสำหรับการประมาณค่าของลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

โปรแกรมแมทแลบ

ข้อมูลของส่วนนี้นำมาจากหนังสือชื่อพื้นฐานแมทแลบ [3]

เป็นโปรแกรมทางด้านการคำนวณที่ใช้งานได้ง่าย มีความสามารถในการทำงานที่หลากหลาย ซึ่งชื่อโปรแกรม MATLAB นั้นย่อมาจาก Matrix Laboratory โดยที่ Cleve Moler ศาสตราจารย์ทางด้านคณิตศาสตร์ได้เริ่มต้นพัฒนาขึ้นตั้งแต่สมัยทศวรรษที่ 1970 และมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักเรียนของเขาสามารถเรียกใช้ชุดคำสั่งจาก LINPACK (ชุดคำสั่งสำหรับแก้ปัญหาทางพีชคณิต) และชุดคำสั่ง EISPACK (ชุดคำสั่งสำหรับแก้ปัญหาค่าคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์) ได้โดยไม่ต้องมีความรู้ในเรื่องการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ทำให้หลังจากนั้นโปรแกรมแมทแลบก็ได้รับความนิยมและแพร่กระจายไปตามมหาวิทยาลัยต่างๆ

โปรแกรมแมทแลบที่ใช้กันทุกวันนี้ มีความสามารถหลากหลาย ตั้งแต่การคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อน ไปจนถึงการประยุกต์ใช้ ในแบบต่างๆ อย่างเช่นการประมวลผลภาพและสัญญาณ การออกแบบการควบคุม หรือการสร้างแบบจำลองการทำงานของกลไก พร้อมภาพเคลื่อนไหวได้ เป็นต้น

เราสามารถใช้แมทแลบคำนวณปัญหาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไป คล้ายกับการใช้เครื่องคิดเลขช่วยคำนวณ เป็นความสารถพื้นฐานอย่างหนึ่งของโปรแกรมแมทแลบ เช่น การบวก ลบ คูณ และหาร โดยลำดับการคำนวณในโปรแกรมแมทแลบก็เป็นไปตามมาตรฐานการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไป

นอกจากนี้แมทแลบสามารถบันทึกตัวแปรและชุดคำสั่งต่างๆ รวมกันไว้ในไฟล์ ทำให้เราเรียกค่าตัวแปรเหล่านั้นกลับมาใช้งานได้อีกผ่านไฟล์ที่เราบันทึกไว้โดยไม่ต้องพิมพ์คำสั่งเพื่อกำหนดค่าตัวแปรนั้นซ้ำอีก โดยการบันทึกคำสั่งลงไฟล์ในลักษณะนี้เรียกว่า สคริปต์ไฟล์ อันเป็นรูปแบบหนึ่งของการเขียนโปรแกรมด้วยแมทแลบ

ตัวอย่างการหาค่าลิมิตในเชิงสัญลักษณ์ผ่านโปรแกรมแมทแลบ

1. $\lim_{x\to 1}(\frac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1})$

   = $\lim_{x\to 1}(\frac{(x-1)(x^2-x+2)}{x-1})$

   = $\lim_{x\to 1}(x^2-x+2)$

   = 2

   ถ้าใช้คำสั่งลิมิตในแมทแลบ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
>> syms x
f=(x^3-2*x^2+3*x-2)/(x-1);
>> limit(f,1)
ans = 2
```

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

= $\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1}$ (โดยการใช้กฎของโลปิตาลในรูป 0/0)

= $\frac{\pi\cos(\pi)}{1}$

= $-\pi$

ถ้าใช้คำสั่งลิมิตในแมทแลบ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
>> syms x

f=sin(pi*x)./(x-1);

>> limit(f,1)

ans = pi
```

3. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

= $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

= $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1+x}}$ (โดยการใช้กฎของโลปิตาลในรูป 0/0)

= $e^{\frac{1}{1+0}}$

= e

ถ้าใช้คำสั่งลิมิตในแมทแลบ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
>> syms x

f=(1+x)^(1/x);

>> limit(f,0)

ans = exp(1)
```

สำหรับการประมาณค่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 ผ่านการคำนวณโดยตรง ในกรณีนี้เราจะคำนวณค่าของลิมิต โดยการแทนค่าลงในฟังก์ชันด้วยตัวเลขที่ใกล้เคียงกับ x_0 กล่าวคือ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \approx f(x_0+\varepsilon_k)$$

โดยที่ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$ สำหรับ $k = 1,2,3,\ldots$ เป็นจำนวนบวกที่ค่าน้อย

ดังนั้น ในทางทฤษฎี จะได้ว่า เมื่อลิมิตมีค่า

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_0+\varepsilon_k)$$

ทั้งนี้ สำหรับการคำนวณผ่านเครื่องคำนวณ เช่น เครื่องคิดเลข หรือ คอมพิวเตอร์ ค่าประมาณที่ได้จาก $f(x_0+\varepsilon_k)$ อาจจะไม่ตรงหรือใกล้เคียงกับค่าของลิมิตได้ เนื่องจากค่าของตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณ

ในเครื่องคำนวณหรือคอมพิวเตอร์ จะมีความผิดพลาดจากการปัดเศษเกิดขึ้นได้ในขั้นตอนการคำนวณ เนื่องจากตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณ จะอยู่รูปของจุดลอยตัวทศนิยม (decimal floating-point) ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่างการประมาณค่าลิมิตโดยการแทนค่าโดยตรง

1. $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}\right)$

ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

จะได้

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	1.9100
10^{-2}	1.9901
10^{-3}	1.9990
10^{-4}	1.9999
10^{-5}	2.0000

ตารางที่ 2.1

2. $\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

.ให้ k = 1,2,3,4,5 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

จะได้

ε_k	f($1+\varepsilon_k$)
10^{-1}	-3.0902
10^{-2}	-3.1411
10^{-3}	-3.1416
10^{-4}	-3.1416
10^{-5}	-3.1416

ตารางที่ 2.2

3. $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

จะได้

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	2.5937
10^{-2}	2.7048
10^{-3}	2.7169
10^{-4}	2.7181
10^{-5}	2.7183
10^{-6}	2.7183
10^{-7}	2.7183
10^{-8}	2.7183
10^{-9}	2.7183
10^{-10}	2.7183

ตารางที่ 2.3

สำหรับตัวอย่างที่มีปัญหาจากการประมาณค่าลิมิตแบบนี้ จะแสดงในหัวข้อต่อไป ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับความผิดพลาดจากการปัดเศษ ที่เกิดจากการแทนตัวเลขด้วยรูปของจุดลอยตัวทศนิยมในเครื่องคำนวณ

2.2 ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ (round-off error)

สำหรับค่าของตัวเลขที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ เราไม่สามารถเขียนทศนิยมออกมาได้หมดทุกตำแหน่ง โดยเราสามารถเขียนค่าประมาณได้ถึงเพียงทศนิยมตำแหน่งที่ต้องการ เช่น ถ้าต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่งก็จะตัดทศนิยมตั้งแต่ตำแหน่งที่ 5 ทิ้งไป หรือปัดเศษของทศนิยมตัวถัดไปขึ้นมาที่ตำแหน่งที่ 4 อีก 1 ซึ่งจะเกิดค่าความผิดพลาดขึ้นมาอีกชนิดหนึ่ง คือ ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ

ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ คือ ค่าผิดพลาดที่เกิดจากการแทนจำนวนหนึ่งด้วยรูปแบบจุดลอยตัวของตัวมันเอง โดยปรกติเราจะใช้ค่าผิดพลาดสัมบูรณ์และค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ในการวัดค่าความผิดพลาดนี้

บทนิยาม ให้ x^* เป็นค่าประมาณของ x เราจะเรียก $|x - x^*|$ ว่า ค่าผิดพลาดสัมบูรณ์ (absolute error) และเรียก $\frac{|x-x^*|}{|x|}$ เมื่อ $x \neq 0$ ว่า ค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ (relative error)

ตัวอย่าง

$$\frac{1}{6} = 0.1666 \ldots$$

รูปแบบจุดลอยตัวของ $\frac{1}{6}$ ซึ่งใช้การปัดเศษเลขโดด 4 ตัว คือ

$$\mathrm{dfp}(\frac{1}{6}) = \mathrm{dfp}(0.1666 \ldots) = 0.1667$$

ค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์ $\left|\frac{1}{6} - \mathrm{dfp}(\frac{1}{6})\right| = 0.33 \ldots x10^{-4}$

ค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ $\frac{\left|\frac{1}{6}-\mathrm{dfp}(\frac{1}{6})\right|}{\left|\frac{1}{6}\right|} = 0.2x10^{-3}$

ตัวอย่างของความผิดพลาดจากการปัดเศษที่เกิดจากการคำนวณ

รากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ หาได้โดยใช้สูตรกำลังสอง คือ $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ และ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ดังนั้น รากโดยประมาณของสมการ $x^2 + 62.1x + 1 = 0$ คือ

$$x_1 = -0.01610723 \text{ และ } x_2 = -62.0839$$

ถ้าใช้การปัดเศษเลขโดด 4 ตัวในการคำนวณหา x_1 และ x_2 จะเห็นว่าในสมการนี้ b^2 มีค่าใหญ่กว่า 4ac มาก จึงทำให้ $\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$ มีค่าใกล้เคียงกับ b มาก เพราะฉะนั้นตัวเศษในการคำนวณเพื่อหาค่า x_1 จึงเกี่ยวข้องกับการลบกันของจำนวนที่เกือบเท่ากันคือ b และ $\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$ เนื่องจาก

$$\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}} = \sqrt{62.1^2 - 4(1)(1)} = 62.06$$

จะได้ว่า

$$x_1^* = \frac{-62.1 + 62.06}{2} = -0.02$$

ซึ่งเป็นค่าประมาณที่แย่ของ x_1 เพราะมีค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ที่ใหญ่ คือ

$$\left|\frac{-0.01610723 - (-0.02)}{-0.01610723}\right| \approx 0.241$$

ขณะเดียวกัน ในการคำนวณหาค่า x_2 จะเกี่ยวข้องกับการบวกกันของจำนวนที่เกือบเท่ากันคือ $\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$ กับ b ซึ่งไม่ก่อให้เกิดปัญหาแต่อย่างใด เนื่องจาก

$$x_2^* = \frac{-62.1 - 62.06}{2} = -62.1$$

ซึ่งมีค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์เล็ก คือ

$$\left|\frac{-62.0839 - (-62.1)}{-62.0839}\right| \approx 2.59 \times 10^{-4}$$

ตัวอย่างการคำนวณหาค่าลิมิต ที่มีผลมาจากค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}$$

(โดยการใช้กฎของโลปิตาลในรูป 0/0 หลายครั้ง)

= $-\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{e}}$

≈ -0.7357588823

ตารางการคำนวณ

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	-0.80295894637672349247736747201998
10^{-2}	-0.74250079556313886008922509063268
10^{-3}	-0.73643330228717329699605897985748
10^{-4}	-0.73582632502917644234941008107853
10^{-5}	-0.7357665908340210725313568218553
10^{-6}	-0.73563851971932825435374070366379
10^{-7}	-0.74445217244678529855406168280751
10^{-8}	-0.33209696059362742159848380651965
10^{-9}	0.0044732218880642144950843253070616
10^{-10}	0.00044488786513011813585419251815267
10^{-11}	0.000044464589043174554481695909258221
10^{-12}	0.0000000041379154269697737807332031624227
10^{-13}	-0.00000000000460448748199166413472764539071
10^{-14}	-0.000000000000460448748224964238073732801091
10^{-15}	0.000000000000000315703026130059408559139630

ตารางที่ 2.4

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า เมื่อ ε_k มีค่าน้อยๆ ค่าประมาณของค่าลิมิตไม่ได้ลู่เข้าค่าลิมิต ตามที่ควรจะเป็นในทางทฤษฎี เป็นผลมาจากค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ จึงทำให้ค่าประมาณที่ได้ไม่ใกล้เคียงกับจากค่าลิมิตที่ควรจะเป็น เนื่องจากการคำนวณเชิงตัวเลขมีความคลาดเคลื่อนในระหว่างดำเนินการ และยิ่งค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษมีค่ามาก ค่าประมาณที่ได้ก็จะยิ่งมีความคลาดเคลื่อนมากขึ้นตามไปด้วย

2.3 ค่าความแม่นยำ (precission) ในการคำนวณ

ความแม่นยำ หรือ ความเที่ยงตรง หมายถึง ค่าที่บ่งบอกถึงความสามารถในการอ่านค่าหรือแสดงค่าที่วัดได้ใกล้เคียงค่าที่แท้จริงจริงของเครื่องมือวัด โดยการคำนวณหาค่าความถูกต้อง/ความแม่นยำในการประมาณค่าสามารถพิจารณาได้จากการที่ค่าประมาณมีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งใดหรือพิจารณาจากเลขนัยสำคัญตามบทนิยามนี้

บทนิยาม เราจะกล่าวว่าจำนวน x^* ประมาณค่า x ได้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ m เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้

$$|x - x^*| < 0.5 \times 10^{-m}$$

และ x^* ประมาณค่า x ได้เลขนัยสำคัญ n ตัว ถ้า n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่มากที่สุดที่ทำให้

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < 5 \times 10^{-n}$$

ตัวอย่าง

จากตัวอย่างก่อนหน้า ถ้าประมาณค่า $\frac{1}{6}$ ด้วย 0.1667

จะได้ค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เป็น $\left|\frac{1}{6} - 0.1667\right| = 0.33 \ldots x10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$

ค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ $\frac{\left|\frac{1}{6} - 0.1667\right|}{\left|\frac{1}{6}\right|} = 0.2x10^{-3} < 5 \times 10^{-4}$

ดังนั้น เราจะได้ว่า 0.1667 ประมาณค่า $\frac{1}{6}$ ได้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 และประมาณ $\frac{1}{6}$ ค่าได้เลขนัยสำคัญ 4 ตัว

ส่วนมากแล้วการสูญเสียความแม่นยำในการคำนวณ อันเนื่องมาจากค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษนั้นจะเกิดขึ้นมาจาก

(1) การลบกันของค่าที่ใกล้เคียงกันมากๆ

(2) การคูณด้วยจำนวนที่มีขนาดใหญ่มากๆ

(3) การหารด้วยจำนวนที่มีขนาดเล็กมากๆ

โดยปรกติ การคำนวณที่ใช้เลขโดดจำนวนน้อยๆ (ทำให้ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษมีค่ามาก) จะทำให้เห็นปัญหาของการสูญเสียความแม่นยำในการคำนวณได้เร็วขึ้น แต่ในความเป็นจริงการคำนวณในเครื่องคอมพิวเตอร์แบบปรกติจะใช้เลขโดดได้มาก (ประมาณ 16 ตัว ที่เป็นแบบ double precision) กว่าการทำโดยตรงดังที่เห็นในตัวอย่างก่อนหน้านี้ ทำให้ปัญหาที่เกิดขึ้นในตัวอย่างที่ผ่านมาจึงมีโอกาสเกิดขึ้นได้น้อย หรืออาจจะยืดเวลาออกไปนานกว่าปัญหานั้นจะแสดงออกมา ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่า การคำนวณที่ใช้ในคอมพิวเตอร์ส่วนมากมักจะมีความละเอียดเพียงพอที่ปัญหาของการสูญเสียความแม่นยำในการคำนวณจะไม่ส่งผลกระทบมากนัก แต่อาจจะมีบ้างในบางปัญหาของการคำนวณ ที่การเลือกใช้จำนวนเลขโดดมากๆมีความจำเป็นต่อความแม่นยำในการการคำนวณ เช่น ปัญหาการหาค่าลิมิตของบางฟังก์ชัน ที่เราพิจารณาในโครงงานนี้

2.4 การคำนวณภายใต้ความแม่นยำ n digits ด้วยโปรแกรมแมทแลบ

2.4.1 คำสั่งที่เกี่ยวข้อง

เราจะใช้งาน 2 คำสั่ง คือ คำสั่ง digits และคำสั่ง vpa ควบคู่กันไปในการคำนวณเชิงตัวเลขภายใต้ความแม่นยำที่ต้องการ

digits คือ การตั้งค่าความแม่นยำของตัวเลขตำแหน่งทศนิยม เป็นการกำหนดความถูกต้องเที่ยงตรงในการคำนวณเชิงตัวเลขของตัวแปร โดย digits จะแสดงการตั้งค่าในปัจจุบันของตัวเลขผ่านทางคำสั่ง digits(D) สำหรับการคำนวณต่อ ๆ มา ซึ่ง D เป็นจำนวนเต็มหรือเครื่องหมายที่ใช้แสดงจำนวนเต็ม

vpa ย่อมาจาก Variable precision arithmetic เป็นคำสั่งที่ใช้ในการคำนวณค่าตัวเลขในสมการให้ออกมาอยู่ในรูปทศนิยม โดยใช้คำสั่ง vpa(S) = R ใช้วัดค่าเชิงตัวเลขของแต่ละองค์ประกอบของ S ที่ใช้ความแม่นยำของตัวแปรทศนิยมในจุดลอยตัวด้วยความถูกต้องตัวเลข D ตำแหน่ง โดยที่ D คือค่าที่ตั้งไว้ในปัจจุบันของ digits และได้ผลลัพธ์ R เป็นเชิงสัญลักษณ์ (symbolic) ซึ่งเราสามารถใช้คำสั่ง vpa(S, D) โดยใช้ตัวเลขจำนวนเต็ม D แทนการตั้งค่าในปัจจุบันของ digits
ในโปรแกรมแมทแลบ จริง ๆ แล้วจากคำสั่ง digits(D) ในการคำนวณแต่ละครั้งจะใช้จำนวนตัวเลขโดดเท่ากับ D+8 ตัว แต่ตอนแสดงผลลัพธ์จะแสดงออกมา D ตัว โดยที่ส่วน 8 ตัวที่ไม่แสดงออกมาเรียกว่า guard digits

ในการเก็บตัวเลขโดยใช้เลขโดด K ตัวในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะอยู่ในรูป $\pm 0.\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2 \dots \mathrm{d}_\mathrm{K} \times 10^\mathrm{n}$ เมื่อ d_i เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $1 \le \mathrm{d}_1 \le 9$ และ $0 \le \mathrm{d}_\mathrm{i} \le 9$ สำหรับ i = 2, 3,...,K เราเรียกจำนวนที่มีเลขนัยสำคัญ K ตัวในรูปแบบนี้ว่า จำนวนที่ใช้ในเครื่องที่มีทศนิยม K ตำแหน่ง (K-digit decimal machine number)

ตัวอย่างการใช้คำสั่ง digits และ vpa

1. ค่า π

   >> digits(8);

   >> x=pi;

   >> vpa(x)

   ans =

   3.1415927

2. ค่า e

   >> digits(16);

   >> y=exp(2);

   >> vpa(y)

   ans =

   7.38905609893065

ตัวอย่างการคำนวณการหาค่าลิมิต เมื่อกำหนดจำนวน digits

1. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}\right)$

   ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

   ใช้คำสั่งในแมทแลบดังต่อไปนี้ (ในตัวอย่างนี้ ใช้เลขโดด K =10+8=18 ตัว)

   >> f=inline('((x.^3)-2*(x.^2)+3*x-2)./(x-1)');

   k=1:10;

   n=length(k);

   x=1+10.^(-k); (กรณีหาลิมิตทางขวา)

digits(10);

y=f(vpa(x))

ε_k	$f(1+\varepsilon_k)$
10^{-1}	2.11
10^{-2}	2.0101
10^{-3}	2.001001
10^{-4}	2.00010001
10^{-5}	2.00001
10^{-6}	2.000001
10^{-7}	2.0000001
10^{-8}	2.00000001
10^{-9}	2.0
10^{-10}	2.0

ตารางที่ 2.5

2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

ใช้คำสั่งในแมทแลบดังต่อไปนี้ (ในตัวอย่างนี้ ใช้เลขโดด k =10+8=18 ตัว)

```
>> f=inline('sin(pi*x)./(1-x)');
k=1:10;
n=length(k);
x=1+(10.^(-k));
digits(10);
y=f(vpa(x))
```

ε_k	$f(1+\varepsilon_k)$
10^{-1}	-3.090169944
10^{-2}	-3.141075908
10^{-3}	-3.141587486
10^{-4}	-3.141592602
10^{-5}	-3.141592653
10^{-6}	-3.141592654
10^{-7}	-3.141592654
10^{-8}	-3.141592654
10^{-9}	-3.141592659
10^{-10}	-3.141592653

ตารางที่ 2.6

3. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

ใช้คำสั่งในแมทแลบดังต่อไปนี้ (ในตัวอย่างนี้ ใช้เลขโดด K =10+8=18 ตัว)

```
>> clear all
f=inline('(1+x).^(1./x)');
k=1:10;
n=length(k);
x=10.^(-k);
digits(10);
y=f(vpa(x))
```

จะได้

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	2.59374246
10^{-2}	2.704813829
10^{-3}	2.716923932
10^{-4}	2.718145927
10^{-5}	2.718268237
10^{-6}	2.718280469
10^{-7}	2.718281693
10^{-8}	2.718281815
10^{-9}	2.718281827
10^{-10}	2.718281828 $\approx e$

ตารางที่ 2.7

2.4.2 ความแม่นยำของค่าประมาณของลิมิต

ความแม่นยำที่ได้จากการประมาณค่าของลิมิต ซึ่งในที่นี้จะพิจาณาความแม่นยำของการประมาณค่าโดยใช้ความแม่นยำของทศนิยม n ตำแหน่ง (ซึ่งก็คือ absolute error)

ในการวัดค่าความแม่นยำของการประมาณค่า $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ที่มีค่าลิมิตเป็นจำนวนจริง จะใช้ความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่งเป็นตัวกำหนด นั่นคือ เราจะกล่าวว่า การประมาณนั้นถูกต้องหรือยอมรับได้ ถ้าความแม่นยำนั้นมีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ n แต่เนื่องจากเราจะไม่รู้ค่าลิมิตจริงของฟังก์ชัน ในกรณีที่ลำดับของ $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k})$ มีแนวโน้มในการลู่เข้า เราจะใช้ผลต่างระหว่าง $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k})$ และ $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_{\mathrm{k}-1})$ แทนค่าความผิดพลาดสำหรับการทดสอบความแม่นยำของค่าลิมิต นั่นคือ

$$\mathrm{Error}(k) = |\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_{\mathrm{k}-1})|$$

ซึ่งเราจะใช้สิ่งนี้ในการวัดความแม่นยำของการหาค่าลิมิต

2.4.3 การทดสอบการลู่เข้าของลำดับ $f(x_0+\varepsilon_k)$ เมื่อ k=1,2,3,... ไปยังค่าลิมิต L

ในทางทฤษฎี ในกรณีที่ไม่มีการปัดเศษ $\lim_{k\to\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k}) = \mathrm{L}$ เราจะประมาณหาค่า L ภายใต้ความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง ด้วยการใช้ค่า er_k กำหนดดังนี้

1. ในกรณีที่ไม่รู้ค่าลิมิตของฟังก์ชัน $er_k = |\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_{\mathrm{k}-1})|$
2. ในกรณีที่รู้ค่าลิมิตของฟังก์ชันอยู่แล้ว $er_k = |\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k}) - \mathrm{L}|$

ในการทดสอบการลู่เข้าสำหรับการคำนวณ เราจะพิจารณาจากค่า er_k ที่ลดลงอย่างต่อเนื่อง จนถึงในกรณีที่มี k ที่ทำให้ $er_k < 0.5\times10^{-n}$ แล้วเราจะกล่าวว่า ค่า $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_\mathrm{k})$ คือ ค่าประมาณของ L ที่มีความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง ตามที่กำหนดให้มา

ในทำนองเดียงกัน เราสามารถพิจารณาการลู่เข้าโดยการใช้กราฟ log มาช่วยดังนี้ ถ้าค่า $log10(er_k) < -n$ ณ ตำแหน่งที่ k_0 แล้วจะได้ว่า $\mathrm{L} \approx \mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\varepsilon_{k_0})$ มีความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง

ในกรณีที่ ค่าของ er_k นั้นลดลงตามลำดับจาก k=1 จนถึง $\mathrm{k}=\mathrm{k}_\mathrm{x}$ เท่านั้น แต่ว่าค่า $er_k > 0.5\times10^{-n}$ ยังไม่ได้ความแม่นยำตามที่ต้องการ ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่าค่าประมาณ $f(x_0+\varepsilon_k)$ ยังไม่ลู่เข้าสู่ L ที่ความแม่นยำทศนิยม n

ตัวอย่าง ลิมิตลู่เข้าความแม่นยำทศนิยม 5 ตำแหน่ง

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{5^x-1}$$

ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

ใช้คำสั่งในแมทแลบดังนี้ (โดยใช้เลขโดด K =8+8=16 ตัว)

```
>> f=inline('(1+x).^(1./x)');
k=1:10;
n=length(k);
x=10.^(-k);
digits(8);
y=f(vpa(x));
```

จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	0.66500903
10^{-2}	0.68086103
10^{-3}	0.68243183
10^{-4}	0.68258876
10^{-5}	0.68260445
10^{-6}	0.68260602

10^{-7}	0.68260618
10^{-8}	0.68260619
10^{-9}	0.68260621
10^{-10}	0.68260658

ตารางที่ 2.8

ในการหาค่า er_k เราจะใช้คำสั่งต่อไปในแมทแลบ

```
>> er=abs(y(2:m)-y(1:m-1));
```

แต่เนื่องจากส่วนใหญ่แล้วค่า er_k มักมีค่าน้อย เราจึงใช้ค่าของ $\log10(\mathrm{er_k})$ แทน โดย

k	$\log10(\mathrm{er_k})$
1	-1.7999159
2	-2.8038791
3	-3.8042978
4	-4.8043401
5	-5.8043419
6	-6.8037289
7	-7.784375
8	-7.860234
9	-6.4240035

ตารางที่ 2.9

ดังนั้น เนื่องจากไม่ค่า $\log10(\mathrm{er_k}) < -5$ แล้ว $\mathrm{L} \approx \mathrm{f}(\mathrm{x_0} + \varepsilon_{k_0}) = 0.68260602$ มีความแม่นยำทศนิยม 5 ตำแหน่ง คือ 0.68261

ตัวอย่าง ลิมิตไม่ลู่เข้าความแม่นยำทศนิยม 5 ตำแหน่ง

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$$

ให้ k = 1,2,...,10 และ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$

ใช้คำสั่งในแมทแลบเหมือนตัวอย่างก่อนหน้า (โดยใช้เลขโดด K =8+8=16 ตัว)

```
>> f=inline('(1+x).^(1./x)');
k=1:10;
n=length(k);
x=10.^(-k);
digits(8);
y=f(vpa(x));
er=abs(y(2:m)-y(1:m-1));
log10(er)
```

จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\log10(\mathrm{er_k})$
1	-1.2185451
2	-2.2169907
3	-3.2168276
4	-4.2237768
5	-3.8925497
6	-2.054844
7	-0.38472851
8	-0.47292436
9	-2.3948745

ตารางที่ 2.10

จะเห็นว่า ไม่มีค่า $\log10(\mathrm{er_k}) < -5$ สำหรับ k=1,2,3,4 ที่ลดลงตามลำดับ ดังนั้น เราไม่สามารถหาค่าลิมิต $L \approx f(x_0 + \varepsilon_{k_0})$ ที่มีความแม่นยำทศนิยม 5 ตำแหน่งได้

บทที่ 3
ขั้นตอนดำเนินการวิจัย

โครงงานครั้งนี้ เป็นการศึกษาผลของค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการประมาณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร โดยใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณผ่านโปรแกรมแมทแลบ โดยการประมาณค่าของ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ผ่านการคำนวณเชิงตัวเลข $\lim_{x \to x_0} f(x) \approx f(x_0 + \varepsilon_k)$ เมื่อ $\varepsilon_k \approx 10^{-k}$ สำหรับ $k = 1,2,3, \ldots$ ภายใต้เงื่อนไขของความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง

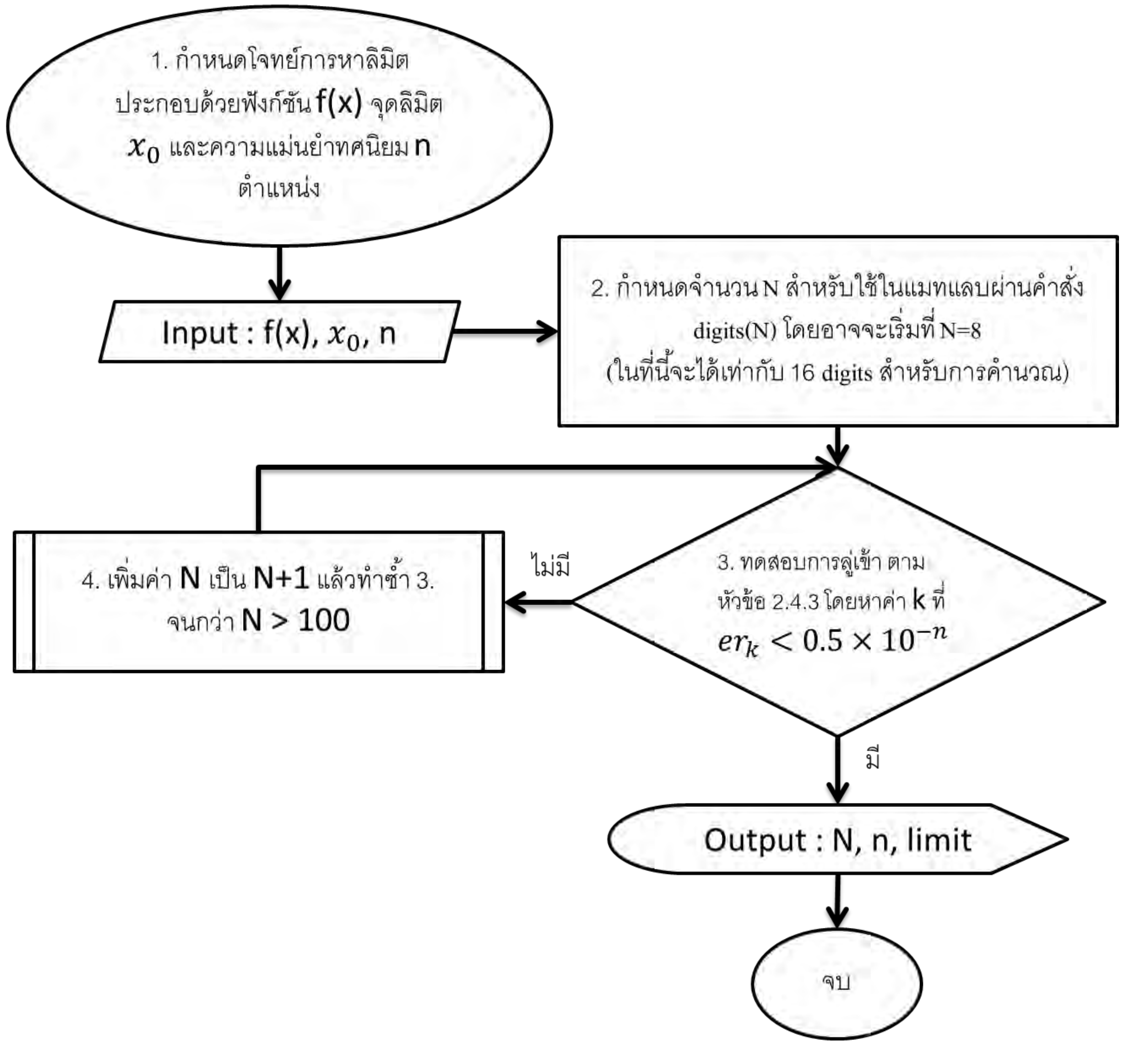
รายละเอียดของขั้นตอนวิธีการศึกษามีดังต่อไปนี้

1. กำหนดโจทย์การหาลิมิต ประกอบด้วย ฟังก์ชัน f(x) จุดลิมิต x_0 และความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง (INPUT: f(x), x0, n)

2. กำหนด จำนวน N สำหรับใช้ในการคำนวณแมทแลบผ่านคำสั่ง digits(N) โดยเริ่มที่ N=8 (ในที่นี้จะได้เท่ากับ 16 digits สำหรับการคำนวณ)

3. ทดสอบการลู่เข้าตามหัวข้อ 2.4.3 หา k ที่ $er_k < 0.5 \times 10^{-n}$ ถ้ามี หยุดการทำงานและได้ค่าประมาณของ L และจำนวน N ที่ใช้ ถ้าไม่มี ทำต่อ 4.

4. เพิ่มค่า N เป็น N+1 แล้วทำซ้ำข้อ 3. จนกว่า N > 100 (เป็นตัวอย่างให้หยุดที่ 100)



ภาพที่ 3.1 ขั้นตอนวิธีการศึกษา

ตัวอย่างการหาค่าลิมิต (กำหนด n=7 กรณีทราบค่าลิมิต L สำหรับการทดสอบ)

เราทราบมาว่า

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ถ้าใช้คำสั่งในแมทแลบ โดยใช้ N = 8+8 = 16 digits ในการคำนวณ

```
>> f=inline('(1+x).^(1./x)');
k=1:10;
m=length(k);
x=10.^(-k);
digits(8);
y=f(vpa(x))
```

จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	2.5937425
10^{-2}	2.7048138
10^{-3}	2.7169239
10^{-4}	2.7181459
10^{-5}	2.7182682
10^{-6}	2.7182805
10^{-7}	2.7182817
10^{-8}	2.7182818
10^{-9}	2.7182821
10^{-10}	2.7182821

ตารางที่ 3.1

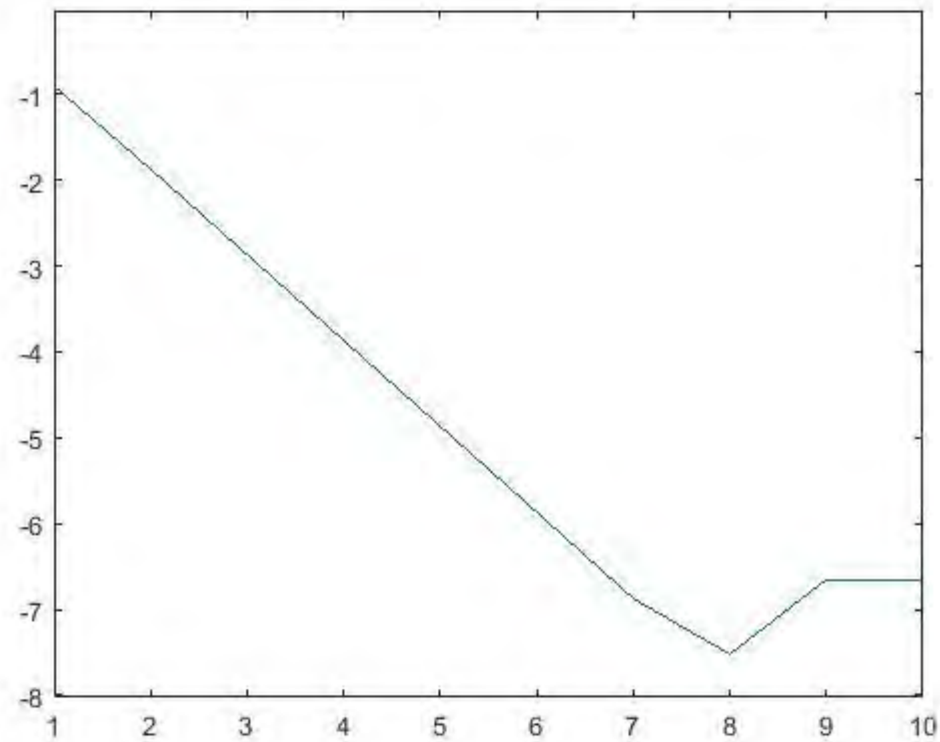
ณ จุดนี้ จะเห็นว่า ค่าประมาณ f($x_0 + \varepsilon_k$) ที่ใกล้เคียงกับ e มากที่สุดคือ f(ε_8)=2.7182818

ในการหาค่า Error เราจะใช้คำสั่งต่อไปในแมทแลบ

```
>> er=abs(y(1:m)-exp(1));
```

เพื่อให้สามารถเห็นภาพได้ชัดเจนยิ่งขึ้น เราจะใช้คำสั่งสร้างกราฟของ er ขึ้นมา แต่เนื่องจากส่วนใหญ่แล้วค่า er_k มักมีค่าน้อย เราจำใช้คำสั่งกราฟของ log10(er) แทน โดยให้แกน x เป็นตำแหน่งลำดับ ส่วนแกน y เป็นค่าของ log10(er)

```
>> plot(log10(er))
```



ภาพที่ 3.2 กราฟ log10(er) ของตัวอย่างบทที่ 3

จากกราฟ สังเกตว่าจุดต่ำสุดของกราฟ log10(er) < -7 ก่อนที่จะพุ่งออก คือ ตำแหน่งที่ 8 หรือหมายความว่า $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \varepsilon_8)$ ให้ค่าได้ใกล้เคียงค่า e มากที่สุด โดย $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \varepsilon_8) = 2.7182818$ เป็นค่าประมาณที่มีความแม่นยำของทศนิยม 7 ตำแหน่ง

จะเห็นว่า ในกรณีที่ k = 9 ค่า er จะเพิ่มขึ้น เนื่องมาจากค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษที่เกิดขึ้นเมื่อเราใช้ digits(8) ดังนั้นถ้าต้องการให้ได้ความแม่นยำที่มากขึ้น (เช่น n = 9) ก็อาจจะต้องเพิ่มค่าตัวเลข D ในคำสั่ง digits(D) ให้มากขึ้น

ความแม่นยำของการประมาณค่าลิมิต

$$er_k = \left|\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_0 + \varepsilon_{k_0}\right) - \mathrm{L}\right|$$

$$= |\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \varepsilon_8) - \mathrm{L}|$$

$$= |2.7182818 - \mathrm{e}|$$

$$= 2.8459 \times 10^{-8} < 0.5 \times 10^{-7}$$

ดังนั้น สำหรับ $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ถ้าเรากำหนดค่า digits(D) = digits(8) แล้วเราจะได้ค่าลิมิตของฟังก์ชันเป็นผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำทศนิยม 7 ตำแหน่ง

ตัวอย่างการหาค่าลิมิต (กรณีไม่ทราบค่า L)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$$

ถ้าใช้คำสั่งในแมทแลบ โดยกำหนดให้ใช้คำสั่ง digits(8)

```
>> clear all
f=inline('x./((1+x).^(1./x)-exp(sym(1)))');
k=1:10;
m=length(k);
x=10.^(-k);
digits(8);
y=f(vpa(x))
```

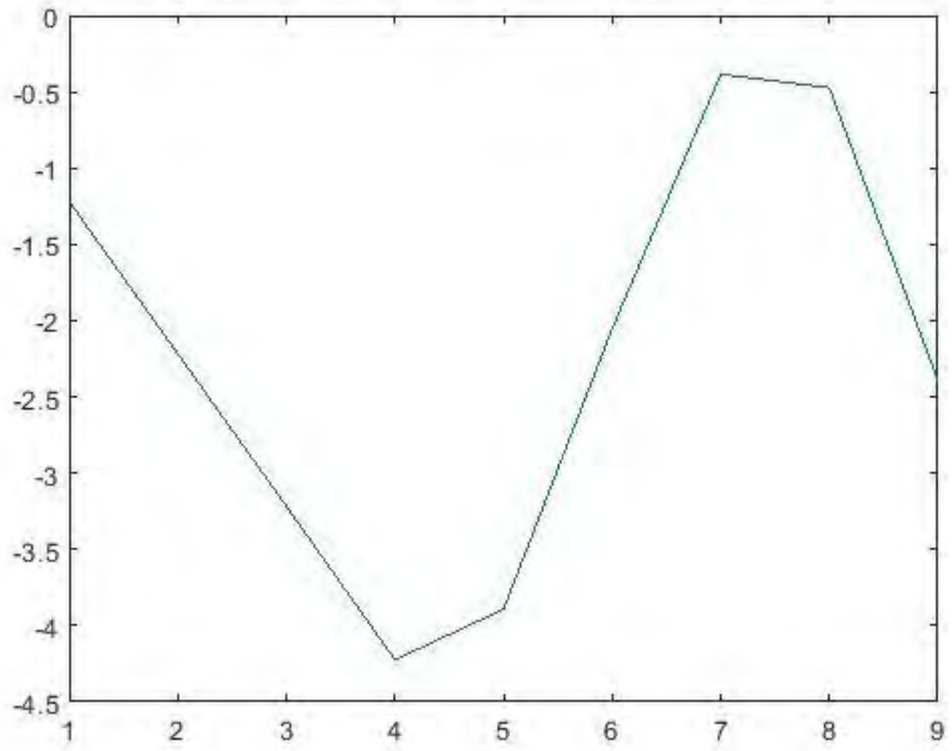
จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ε_k	f(ε_k)
10^{-1}	-0.80295895
10^{-2}	-0.7425008
10^{-3}	-0.7364333
10^{-4}	-0.73582633
10^{-5}	-0.73576659
10^{-6}	-0.73563852
10^{-7}	-0.74445217
10^{-8}	-0.33209697
10^{-9}	0.0044732219
10^{-10}	0.00044488786

ตารางที่ 3.2

ต่อไป เราจะใช้คำสั่ง ต่อไปในการหาค่า Error

```
>> er=abs(y(2:m)-y(1:m-1));
plot(log10(er))
```



ภาพที่ 3.3 กราฟ log10(er) ของตัวอย่างบทที่ 3

จากกราฟ สังเกตว่าจุดต่ำสุดของกราฟ log10(er) ก่อนที่จะพุ่งออก คือ ตำแหน่งที่ 4 หรือก็คือ $k_0 = 4$ ทำให้ ณ ตำแหน่งที่ 4 มีค่า Error น้อยที่สุด
ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$ จึงลู่เข้าสู่ $L \approx f(x_0+\varepsilon_{k_0}) = f(x_0+\varepsilon_4) = f(10^{-4}) = -0.7358$ จากรูปอาจจะกล่าวได้ว่า การประมาณค่าลิมิตนี้มีความแม่นยำทศนิยม 4 ตำแหน่ง ซึ่งจะนำไปเปรียบเทียบกับการคำนวณความแม่นยำจริง ๆ ตามข้างล่างนี้
ความแม่นยำของการหาค่าลิมิต

$$er_k = \left|f(x_0+\varepsilon_{k_0}) - f(x_0+\varepsilon_{k_0-1})\right|$$

$$\approx 8.2488 \times 10^{-4}$$

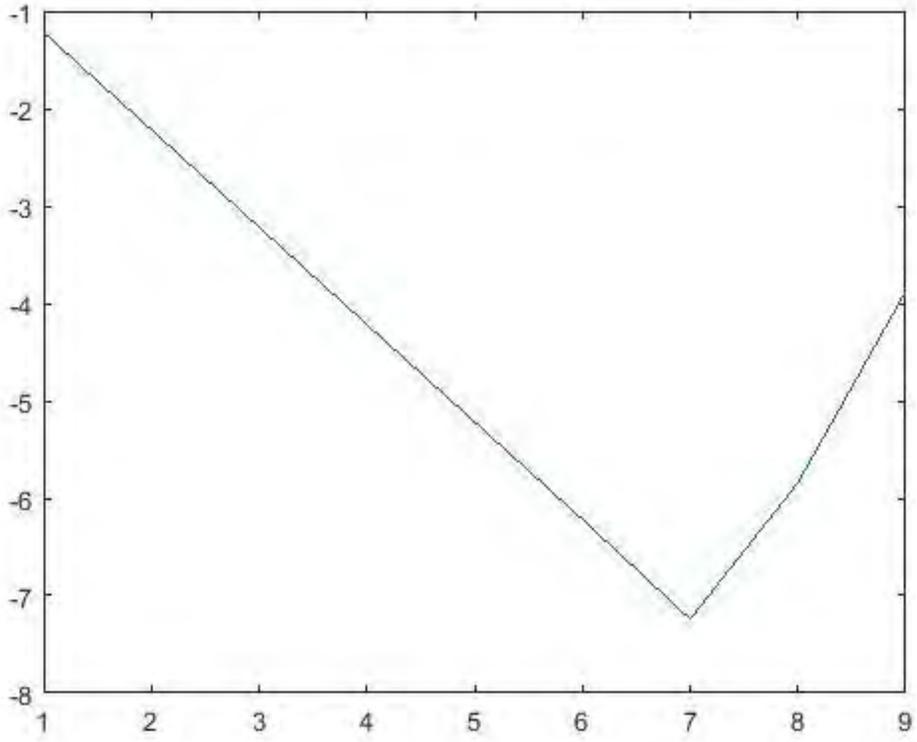
$$= 0.82488 \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-3}$$

ดังนั้น สำหรับ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$ ถ้าเรากำหนดค่า digits(8) แล้วเราจะได้ค่าลิมิตของฟังก์ชันที่มีความแม่นยำทศนิยม 3 ตำแหน่ง ซึ่งแตกต่างกับค่าประมาณที่ได้จากรูป นั่นคือ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e} = -0.735$$

ถ้าเราเปลี่ยน digits(8) เป็น digits(12) แล้วใช้คำสั่งรูปแบบเดิมในแมทแลบ

```
>> f=inline('x./((1+x).^(1./x)-exp(sym(1)))');
k=1:10;
m=length(k);
x=10.^(-k);
digits(16);
y=f(vpa(x));
er=abs(y(2:m)-y(1:m-1));
plot(log10(er))
```



ภาพที่ 3.4 กราฟ log10(er) ของตัวอย่างบทที่ 3

จากกราฟ ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$ ลู่เข้าสู่ $\mathrm{L} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \varepsilon_{\mathrm{k}_0}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \varepsilon_7) = \mathrm{f}(10^{-7}) = -0.7357589$ ซึ่งจากรูปจะได้ว่า มีความแม่นยำประมาณทศนิยม 7 ตำแหน่ง

ความแม่นยำของการหาค่าลิมิต

$er_k = -0.00000082524532391856 22$

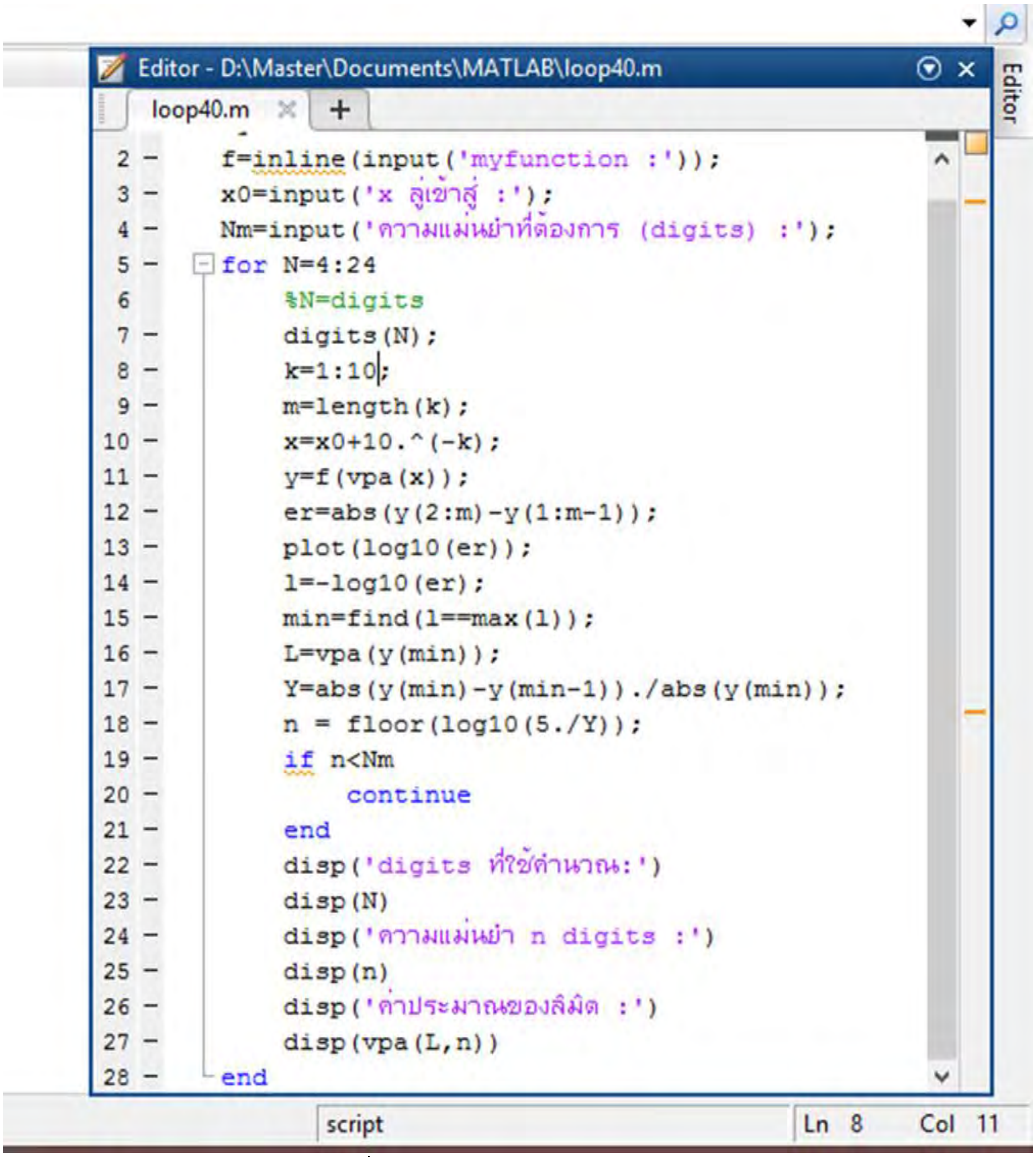
$\approx 0.8252 \times 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}$

ดังนั้น สำหรับ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$ ถ้าเรากำหนดค่า digits(16) แล้วเราจะได้ค่าลิมิตของฟังก์ชันเป็นผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำ 6 digits คือ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e} = -0.735759$

บทที่ 4
ผลการดำเนินการ

4.1 Algorithm แสดงการประมาณค่าลิมิต L ที่มีความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง

การเขียน algorithm แสดงการหาค่า $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ที่มีความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง โดยอันดับแรกต้องกำหนด f(x), x_0 และจำนวนความแม่นยำที่ต้องการ n ตำแหน่ง ไว้เป็นข้อมูลทีต้องใช้ โดยเขียนการเปิด New Script และเขียนโค้ด




```
f=inline(input('myfunction :'));
x0=input('x ลู่เข้าสู่ :');
Nm=input('ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :');
for N=4:24
    %N=digits
    digits(N);
    k=1:10;
    m=length(k);
    x=x0+10.^(-k);
    y=f(vpa(x));
    er=abs(y(2:m)-y(1:m-1));
    plot(log10(er));
    l=-log10(er);
    min=find(l==max(l));
    L=vpa(y(min));
    Y=abs(y(min)-y(min-1))./abs(y(min));
    n = floor(log10(5./Y));
    if n<Nm
        continue
    end
    disp('digits ที่ใช้คำนวณ:')
    disp(N)
    disp('ความแม่นยำ n digits :')
    disp(n)
    disp('ค่าประมาณของลิมิต :')
    disp(vpa(L,n))
end
```

ภาพที่ 4.1 โค้ดสำหรับหาค่า L, N และ n

เมื่อโปรแกรมทำงาน จะสามารถใส่ค่า f(x), x_0 และ n ที่ต้องการเข้าไปในระบบได้ ดังต่อไปนี้

myfunction :

x ลู่เข้าสู่ :

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

และจะได้ผลออกมาในรูปของ

digits ที่ใช้คำนวณ :

ความแม่นยำ n digits :

ค่าประมาณของลิมิต :

จาก algorithm เราให้ N มีค่าตั้งแต่ 8 ถึง 16 และ k มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 10 ซึ่งในกรณีที่ต้องการคำนวณหาค่าลิมิต L ที่มีความแม่นยำมากๆ เราสามารถเพิ่มหรือลดขอบเขตของค่า N เช่น N=4:20 และเพิ่มค่า k ให้มากขึ้น ได้ตามที่ต้องการ เช่น k=1:15

4.2 การทำงานของ algorithm

เราสามารถนำ diagram ที่ได้ไปทดลองกับฟังก์ชันต่างๆที่สนใจ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 1}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

เขียน algorithm ตาม 4.1 โดยกำหนด f(x), x_0 และ n

myfunction : (1+x).^(1./x)

x ลู่เข้าสู่ : 0

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

โดยผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังตัวอย่างในตารางนี้

ความแม่นยำที่ต้องการ (n)	จำนวน digits ที่ใช้ในการคำนวณน้อยสุด (N)	ค่าลิมิต (L)
4	4	2.718
5	5	2.7183
6	6	2.71828
7	7	2.718282
8	8	2.7182821
9	9	2.71828181
10	10	2.718281815

ตารางที่ 4.1

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$

เขียน algorithm ตาม 4.1 โดยกำหนด f(x), x_0 และ n myfunction : x./((1+x).^(1./x)-exp(sym(1)))

x ลู่เข้าสู่ : 0

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

จะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นดังในตารางนี้

ความแม่นยำที่ต้องการ	จำนวน digits ที่ใช้ในการคำนวณน้อยสุด	ค่าลิมิต
4	9	-0.7358
5	12	-0.73576
6	15	-0.735759
7	18	-0.7357589
8	20	-0.73575888
9	23	-0.735758882
10	27	-0.7357588823

ตารางที่ 4.2

3. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

เขียน algorithm ตาม 4.1 โดยกำหนด f(x), $\mathbf{x_0}$ และ n

myfunction : sin(pi*x)./(x-1)

x ลู่เข้าสู่ : 1

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

จะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นดังในตารางนี้

ความแม่นยำที่ต้องการ	จำนวน digits ที่ใช้ในการคำนวณน้อยสุด	ค่าลิมิต
5	4	-3.1416
7	6	-3.141593
8	7	-3.1415927
9	9	-3.14159265
11	11	-3.141592654
13	15	-3.141592654

ตารางที่ 4.3

4. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2+5x-14}{3x^2-4x-4}}$

เขียน algorithm ตาม 4.1 โดยกำหนด f(x), $\mathbf{x_0}$ และ n

myfunction : sqrt((x.^2+5*x-14)./(3*x.^2-4*x-4))

x ลู่เข้าสู่ : 2

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

จะได้ผลลัพธ์เป็นดังในตารางนี้

ความแม่นยำที่ต้องการ	จำนวน digits ที่ใช้ในการคำนวณน้อยสุด	ค่าลิมิต
5	3	1.0607
6	4	1.06066
7	7	1.06066
9	8	1.06066017

ตารางที่ 4.4

5. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}$

เขียน algorithm ตาม 4.1 โดยกำหนด f(x), $\mathbf{x_0}$ และ n

myfunction : (x.^(2./3)-4.^(1./3))./(x-2)

x ลู่เข้าสู่ : 2

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

จะได้ผลลัพธ์เป็น

ความแม่นยำที่ต้องการ	จำนวน digits ที่ใช้ในการคำนวณน้อยสุด	ค่าลิมิต
5	4	0.52913
6	6	0.529134
7	7	0.5291337

ตารางที่ 4.5

6. $\lim\limits_{\mathrm{x} \to 0} (\cos \mathrm{x} - \sin \mathrm{x})^{\frac{1}{\mathrm{x}}}$

เขียน algorithm ตาม 4.1 โดยกำหนด f(x), $\mathbf{x_0}$ และ n

myfunction : (cos(x)-sin(x)).^(1./x)

x ลู่เข้าสู่ : 0

ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :

จะได้ผลลัพธ์เป็น

ความแม่นยำที่ต้องการ	จำนวน digits ที่ใช้ในการคำนวณน้อยสุด	ค่าลิมิต
4	4	0.3677
6	5	0.36788
7	8	0.3678794
8	10	0.36787944
9	11	0.367879443

ตารางที่ 4.6

บทที่ 5
สรุปผล

ในบทนี้จะกล่าวถึงข้อสรุปจากการวิจัยในบทที่ 3 และบทที่ 4 รวมถึงข้อเสนอแนะอื่นๆในการศึกษาเกี่ยวกับผลของค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร และแนวทางในการใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาค่าลิมิตได้อย่างถูกต้อง

5.1 สรุป

ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษมีผลต่อการคำนวณเชิงตัวเลข ทำให้การคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชันเกิดความคลาดเคลื่อนได้ เราสามารถสรุปได้ว่า เราสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งในที่นี้คือโปรแกรมแมทแลบ มาช่วยควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษในการคำนวณหาค่าลิมิตได้ภายใต้ความแม่นยำของจำนวนทศนิยมที่ต้องการ เพื่อใช้ในการประมาณของลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร ที่ค่าลิมิตเป็นจำนวนจริง

ในบทที่ 4 เราได้กำหนดขั้นตอนวิธีการเพื่อใช้หาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้วยแมทแลบโดยการกำหนดค่าความแม่นยำทศนิยม n ตำแหน่ง ที่ต้องการได้ ในการทดลองใช้กับฟังก์ชันต่างๆ ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นค่าลิมิตที่มีความแม่นยำตามต้องการและรู้จำนวน digits ที่ต้องใช้ในการคำนวณ ดังนั้น เราสามารถหาค่าลิมิตได้ ตามขั้นตอนและวิธีการที่กำหนดไว้ สำหรับโปรแกรมแมทแลบ

5.2 ข้อเสนอแนะ

- ศึกษากับฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากกว่านี้
- ทดลองใช้โปรแกรมอื่นในการคำนวณ อย่างเช่น Mathematica

รายการอ้างอิง

1. เอกสารประกอบการเรียน รายวิชา 2301366 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, รองศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สารทวาหา
2. RL Burder and JD Fairs, Numerical Analysis, 3rd ed., PWs Publishers, USA, 1985.
3. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, นิพนธ์ วรรณโสภาคย์, พื้นฐานแมทแลบ MATLAB FUNDAMENTALS, พิมพ์ครั้งที่ 4, โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2560.
4. ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, ยุวรีย์ พันธ์กล้า, Calculus I, พิมพ์ครั้งที่ 4, โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2560.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) ผลของความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร

ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) Effect of round-off error on calculation of limits of function of one-variable.

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย

ผู้ดำเนินการ นายปัญจพล สมิทธิเวชรงค์ เลขประจำตัวนิสิต 5933532223
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในการใช้วิธีเชิงตัวเลขผ่านคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาค่าของปัญหานั้นๆ ค่าที่หาได้จะมีความผิดพลาดเกิดขึ้น เพราะโดยหลักการแล้วค่าที่นำมาใช้ในการคำนวณส่วนมากเป็นเพียงค่าประมาณของค่าจริงที่ต้องการ อย่างเช่นการที่เราไม่สามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ที่มีจำนวนอนันต์พจน์ได้ จึงต้องประมาณค่านั้นด้วยผลบวกจำนวนจำกัดพจน์แรก แล้วส่วนปลายของอนุกรมนั้นที่ตัดทิ้งก็จะกลายเป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ซึ่งเรียกว่า ค่าความผิดพลาดจากการตัดปลาย (Truncation error) หรือ การที่เรามีจำนวนอตรรกยะที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ เราไม่สามารถเขียนทศนิยมออกมาได้หมดทุกตำแหน่ง โดยเราจะเขียนค่าประมาณถึงเพียงทศนิยมที่ต้องการ เช่น ถ้าต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่งก็จะตัดทศนิยมตั้งแต่ตำแหน่งที่ 5 ทิ้งไป หรือปัดเศษของทศนิยมตัวถัดไปขึ้นมาที่ตำแหน่งที่ 4 อีก 1 ซึ่งจะเกิดค่าความผิดพลาดขึ้นมา เรียกว่า ค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ (Round-off error)

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน เราสามารถทำได้หลากหลายวิธี เช่น การแทนค่าตัวเลขลงในฟังก์ชันโดยตรง หรือ ใช้วิธีการและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาช่วย เช่น การแยกตัวประกอบ ทฤษฎีบทของโลปิตาล เป็นต้น หรือ อาจจะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณหาค่าได้ เช่น MatCad, Mathematica, และ Matlab เป็นต้น ซึ่งในบางครั้งในกรณีที่ฟังก์ชันมีความซับซ้อนมาก โปรแกรมที่ใช้ก็อาจจะไม่สามารถหาค่าที่ถูกต้องได้ รวมทั้งการแทนค่าตัวเลขให้ใกล้กับจุดที่จะหาค่าลิมิตโดยใช้โปรแกรมคำนวณ ส่วนมากก็จะมีความผิดพลาดที่เกิดมาจากความผิดพลาดจากการปัดเศษ

ในการศึกษา เราสนใจที่จะศึกษาถึงแนวทางในการใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาค่าลิมิต โดยพิจารณาเกี่ยวกับค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ โดยเรามีสมมติฐานที่ว่า ถ้าเราสามารถควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษให้เหมาะสม ก็อาจจะทำให้เราสามารถคำนวณค่าลิมิตได้ภายใต้ความแม่นยำที่ต้องการ

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาเกี่ยวกับผลของค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษต่อการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร
2. เพื่อศึกษาถึงแนวทางในการใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาค่าลิมิตได้อย่างถูกต้อง

ขอบเขตของโครงงาน

1. ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ศึกษาเฉพาะฟังก์ชัน 1 ตัวแปร โดยพิจารณาเกี่ยวกับค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษ
2. ในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ ใช้โปรแกรม MATLAB

วิธีการดำเนินงาน

ตารางการดำเนินงานโครงงาน

แผนการศึกษา	ระยะเวลาที่ศึกษา							
	พฤษภาคม	มิถุนายน	กรกฎาคม	สิงหาคม	กันยายน	ตุลาคม	พฤศจิกายน	ธันวาคม
1. จัดหาหัวข้อโครงงาน								
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษและการหาค่าลิมิต								
3. หาแนวทางวิธีการในการควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษเพื่อนำมาใช้ในการหาค่าลิมิต								
4. ทดลองใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณหาค่าลิมิต								
5. จัดทำแบบเสนอโครงงาน								

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ในด้านความรู้และประสบการณ์ต่อตัวนิสิตเอง
   1.1 ฝึกฝนการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้วยวิธีการต่างๆ
   1.2 ทดลองใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ
2. ความรู้ ความเข้าใจที่นำไปสู่การแก้ไขปัญหา

1.1 ควบคุมค่าความผิดพลาดจากการปัดเศษได้อย่างเหมาะสม ทำให้สามารถคำนวณค่าลิมิตได้
1.2 เป็นแนวทางสำหรับบุคคลที่สนใจในการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมหรือนำไปพัฒนาต่อ

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. เครื่องคิดเลข
2. โปรแกรม MATLAB

งบประมาณ

1. กระดาษ A4 สำหรับทำรายงาน ประมาณ 1000 บาท
2. ค่าหมึก สำหรับพิมพ์เอกสาร ประมาณ 500 บาท
3. ค่าทำรูปเล่ม/รายงาน (รวมค่าถ่ายเอกสาร) ประมาณ 1000 บาท
4. ยูเอสบีแฟลชไดรฟ์ สำหรับเก็บข้อมูล 500 บาท
5. ฮาร์ดดิสก์ สำหรับเก็บข้อมูล 1500 บาท
6. เมาส์ไร้สาย 500 บาท

เอกสารอ้างอิง

1. เอกสารประกอบการเรียน รายวิชา 2301366 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, รองศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สารทวาหา
2. RL Burder and JD Fairs, Numerical Analysis, 3rd ed., PWs Publishers, USA, 1985.

ภาคผนวก ข
โค้ดสำหรับใช้งานโปรแกรมแมทแลบ

```
syms x

f=inline(input('myfunction :'));

x0=input('x ลู่เข้าสู่ :');

Nm=input('ความแม่นยำที่ต้องการ (digits) :');

for N=4:24

    %N=digits

    digits(N);

    k=1:10;

        m=length(k);

    x=x0+10.^(-k);

    y=f(vpa(x));

    er=abs(y(2:m)-y(1:m-1));

    plot(log10(er));
```

```
    l=-log10(er);
    min=find(l==max(l));
    L=vpa(y(min));
    Y=abs(y(min)-y(min-1))./abs(y(min));
    n = floor(log10(5./Y));
        if n<Nm
       continue
    end
    disp('digits ที่ใช้คำนวณ:')
    disp(N)
    disp('ความแม่นยำ n digits :')
    disp(n)
    disp('ค่าประมาณของลิมิต :')
    disp(vpa(L,n))
end
```

ประวัติผู้เขียน

นายปัญจพล สมิทธิเวชรงค์
นิสิตภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ระดับกำรศึกษำ

- จบการศึกษาประถมศึกษาจากโรงเรียนอรุณประดิษฐ
- จบการศึกษามัธยมศึกษาจากโรงเรียนเบญจมเทพอุทิศ