โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ โปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

(Program for Efficient Portfolio with No Short Selling)

ชื่อนิสิต นายธนกฤต เตชะเทียมจันทร์ 5933521323

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

นายธนกฤต เตชะเทียมจันทร์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

Program for Efficient Portfolio with no short selling

Mr. Thanakrit Tachatiemchan

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	โปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
โดย	นายธนกฤต เตชะเทียมจันทร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ อินทิยศ)

ธนกฤต เตชะเทียมจันทร์ : โปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน : ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี, 39 หน้า

ในโครงงานฉบับนี้ ผู้จัดทำได้ให้บทพิสูจน์ที่รัดกุมเกี่ยวกับการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย โดยสำหรับการลงทุนในสินทรัพย์ n สินทรัพย์ กำหนดให้ $E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n)$ เป็นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ $1, 2, \ldots, n$ ตามลำดับ และ $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน R ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\lambda_j \geq 0$ และ $\lambda_j c_j = 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, n$ และ

2)
$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}$$

หลังจากที่เราได้เรียบเรียงทฤษฎีบทข้างต้นแล้วนั้นผู้จัดทำได้เขียนโปรแกรมโดยภาษาไพธอนเพื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทดังกล่าวในการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายให้มีความสะดวกมากยิ่งขึ้น พร้อมทั้งสาธิตการใช้โปรแกรมกับการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต นาย ธนกฤต เตชะเทียมจันทร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน Krisana Neammanee

ปีการศึกษา 2562

Thanakrit Tachatiemchan : Program for Efficient Portfolio with No Short Selling. Advisor : Kritsana Neammanee, 39 pages.

In this project we give a rigorous proof for efficient portfolio management with no short selling. For investment in n assets, let $E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n)$ be an expected return for investment in asset $1^{st}, 2^{nd}, \ldots, n^{th}$, respectively and $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ be a covariance matrix. Then, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ is an efficient portfolio with no short selling and expected return R if and only if there exist $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ and $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ which satisfy the following conditions.

1) $\lambda_j \geq 0$ and $\lambda_j c_j = 0$ for all $j = 1, 2, \ldots, n$

2) $$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}$$

After that, we apply our result numerically by using python language in order to find an efficient portfolio with no short selling, conveniently. Finally, we give an example of usability of that program for investment in the Stock Exchange of Thailand (SET).

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature นาย ธนกฤต เตชะเทียมจันทร์

Field of study: Mathematics Advisor's Signature Kritsana Neammanee

Academic year: 2562

กิตติกรรมประกาศ

เป็นที่ทราบกันดีว่าประเทศไทยอยู่ในสภาวะอัตราดอกเบี้ยเงินฝากต่ำกว่าอัตราเงินเฟ้อ นั่นจึงส่งผลให้เงินที่เราฝากในธนาคารนั้นมีมูลค่าลดลงเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป เพื่อป้องกันสถานการณ์ข้างต้นการลงทุนจึงเป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ แต่ทว่าการลงทุนโดยไม่ได้ศึกษาข้อมูลการลงทุนที่นักลงทุนสนใจนั้นอาจก่อให้เกิดความเสียหายเป็นจำนวนมากได้ และความเสียหายนั้นจะทวีความรุนแรงมากขึ้นเมื่อนักลงทุนเป็นผู้ที่ไม่มีรายได้ประจำ เช่น ผู้ที่เกษียณอายุแล้ว เป็นต้น ผู้จัดทำโครงงานได้ตระหนักถึงปัญหาดังกล่าว จึงได้จัดทำโครงงานฉบับนี้เพื่อศึกษาการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย พร้อมทั้งเขียนโปรแกรมสำการหาพอร์ตดังกล่าวเพื่อความสะดวกในการใช้งานมากยิ่งขึ้น

สุดท้ายนี้ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าโครงงานฉบับนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่มาศึกษาในอนาคต และขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี ที่ได้ให้คำเสนอแนะและแนวทางต่าง ๆ ให้กับโครงงานฉบับนี้ และนายคุณานนต์ ทิศรอด ที่ได้ให้ความช่วยเหลือในการหาข้อมูลอัตราเงินปันผลและราคาปิดของหลักทรัพย์ รวมไปถึงนิสิตภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ได้ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์จึงทำให้โครงงานฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ผู้จัดทำโครงงาน

สารบัญ

สารบัญรูปภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1

บทนำ

ในปัจจุบันนักลงทุนมีทางเลือกในการลงทุนที่หลากหลายไม่ว่าจะเป็นการลงทุนในตราสารทุน ตราสารหนี้ หรือแม้แต่ ตราสารอนุพันธ์ เป็นต้น ซึ่งสิ่งที่จะใช้ประเมินว่าการลงทุนประเภทต่าง ๆเหมาะสมที่จะลงทุนหรือไม่นั้น คือ ความเสี่ยง และ อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง โดยถ้าเรากำหนดให้ R เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุน เราจะเรียก $E(R)$ ว่า **อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง (expected rate of return)** และ $\sqrt{Var(R)}$ ว่า **ความเสี่ยง (risk)** ของการลงทุน

สำหรับการลงทุนใน n สินทรัพย์ ซึ่งมีสัดส่วนการลงทุนในสินทรัพย์ที่ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ คือ w_i จะได้ว่า $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$ ซึ่งเราจะเรียก $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ว่า **พอร์ต (portfolio)** และ ถ้ากำหนดให้ R_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ เราจะได้ว่า

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \ldots + w_nR_n$$

คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน ซึ่งมี

$$E(R_p) = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + \ldots + w_nE(R_n)$$

เป็นผลตอบแทนที่คาดหวังของพอร์ต และความเสี่ยงของพอร์ต คือ

$$\sqrt{Var(R_p)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_iw_j}$$

เมื่อ σ_{ij} คือ ความแปรปรวนร่วมของ R_i และ R_j

อย่างไรก็ตามไม่ว่านักลงทุนจะลงทุนในสินทรัพย์ประเภทใด ก็ยังคงมีเป้าหมายหลักในการลงทุนแบบเดียวกัน คือ ได้รับผลตอบแทนตามที่ต้องการโดยมีความเสี่ยงในการลงทุนต่ำที่สุด ซึ่งสิ่งที่จะช่วยนักลงทุนจัดการกับความเสี่ยงและผลตอบแทนของการลงทุนได้ คือ การจัดพอร์ต โดยเราจะเรียกพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดและให้ผลตอบแทนตามที่เราต้องการว่า **พอร์ตที่มีประสิทธิภาพ (efficient Portfolio)**

ในปี 1952 นักเศรษฐศาสตร์ชาวอเมริกันนามว่า Harry Markowitz ได้นำเสนองานวิจัยในชื่อ “Portfolio Selection” ([7]) ซึ่งนำเสนอวิธีการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพสำหรับการลงทุนใน 3 สินทรัพย์ โดยการพิจารณาจากกราฟความเสี่ยงและกราฟผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ต้องการนำมาจัดพอร์ต และงานวิจัยดังกล่าวได้กลายเป็นจุดเริ่มต้นของ **ทฤษฎีการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ (efficient portfolio theorem)** อีกทั้งยังส่งผลให้ Markowitz ได้รับรางวัลโนเบล สาขาเศรษฐศาสตร์ในปี 1990 ซึ่งเป็นเวลา 38 ปี

หลังจากได้ตีพิมพ์งานวิจัยดังกล่าว และในเวลาต่อมาได้มีการขยายทฤษฎีการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพให้สามารถใช้ได้กับการจัดพอร์ตการลงทุนที่ลงทุนใน n สินทรัพย์ได้ ([6],หน้า 135-138)

จากทฤษฎีบทการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพสำหรับ n สินทรัพย์ นั้นมีโอกาสที่จะได้สัดส่วนการลงทุนที่ติดลบ ($w_i \le 0$ เมื่อ $1 \le i \le n$) ซึ่งหมายความว่าพอร์ตดังกล่าวมีการยืมขาย (short sell) สินทรัพย์ ซึ่งเป็นการยืมสินทรัพย์จากผู้อื่นมาขายและจะต้องซื้อมาคืนในภายหลัง แต่ในปัจจุบันสินทรัพย์โดยส่วนมากไม่สามารถทำการยืมขายได้ ยกตัวอย่างเช่น หลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ซึ่งมีหลักทรัพย์ที่สามารถยืมขายได้จำนวน 311 บริษัท ([1]) จากหลักทรัพย์ที่จดทะเบียนทั้งหมด 795 บริษัท ([2]) นั่นคือ มีจำนวนหลักทรัพย์ที่ยืมขายได้น้อยกว่าร้อยละ 50 ของหลักทรัพย์ที่จดทะเบียนทั้งหมด เป็นต้น นอกจากนี้ขั้นตอนการยืมขายสินทรัพย์นั้นค่อนข้างซับซ้อน จึงทำให้พอร์ตที่มีการยืมขายสินทรัพย์ไม่เหมาะสมต่อการลงทุนในระยะยาว

เพื่อที่จะแก้ปัญหาดังกล่าวจึงได้มีการมีการพัฒนาทฤษฎีสำหรับการจัด **พอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย (no short selling efficient portfolio)** ซึ่งเป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพและไม่มีการยืมขายสินทรัพย์ ($w_i \ge 0$ ทุก $i = 1, 2, \dots, n$) โดยพอร์ตดังกล่าวสามารถเขียนเป็นตัวแบบได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_iw_j \\
\text{โดยที่} \quad & w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1 \\
& E(R_1)w_1 + E(R_2)w_2 + \cdots + E(R_n)w_n = R \\
& w_i \ge 0 \;\; \text{ทุก} \;\; i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

ข้อสังเกต $\text{min}(R_1, R_2, \dots, R_n) \le R \le \text{max}(R_1, R_2, \dots, R_n)$

ในโครงงานฉบับนี้เราจะเรียบเรียงบทพิสูจน์สำหรับการหาผลเฉลยของตัวแบบที่ (1.1) ซึ่งเป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย และเรานำทฤษฎีบทดังกล่าวมาเขียนเป็นโปรแกรม พร้อมทั้งประยุกต์ใช้กับการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยมีรายละเอียดดังนี้

บทที่ 2 พอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

ในบทนี้เราจะเรียบเรียงบทพิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของผลเฉลยของตัวแบบที่ (1.1) ซึ่งได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.1 สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์ กำหนดให้ $E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n)$ เป็นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ $1, 2, \ldots, n$ ตามลำดับ และมี $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะเป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน R ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\lambda_j \geq 0$ และ $\lambda_j c_j = 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

2) $$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}$$

บทที่ 3 โปรแกรมจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

เนื่องจากการใช้ทฤษฎีบทที่ 1.1 ในการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย จะเริ่มจากการพิจารณาเงื่อนไข $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ซึ่งจะพิจารณา 2 กรณี คือ กรณีที่ $\lambda_i = 0$ หรือ กรณีที่ $c_i = 0$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วนำเงื่อนไขในแต่ละกรณีไปพิจารณาหา $c_1, c_2, \ldots, c_n, \mu_1, \mu_2$ และ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ในเงื่อนไขข้อที่ 2) ซึ่งจะเห็นได้ว่าต้องแบ่งกรณีทั้งหมด 2^n กรณี เป็นการไม่สะดวกสำหรับการจัดพอร์ตที่มีสินทรัพย์เป็นจำนวนมาก ตัวอย่างเช่น ถ้าพอร์ตมี 10 สินทรัพย์ จะต้องแบ่งกรณีทั้งหมด $2^{10} = 1024$ กรณี ทำให้เสียเวลาในการคำนวณเป็นอย่างมาก

ดังนั้นในบทนี้เราจะนำแนวคิดของทฤษฎีบทที่ 1.1 มาเขียนโปรแกรม เพื่อทำให้การจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายนั้นง่ายและสะดวกต่อการใช้งานมากยิ่งขึ้น

บทที่ 4 เกษียณสุขใจ

ในบทนี้เราจะสาธิตการใช้โปรแกรมจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายจากบทที่ 3 มาจัดพอร์ตหุ้นของบริษัทที่จดทะเบียนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยเป็นจำนวน 3 พอร์ต ที่ให้อัตราเงินปันผล ณ วันที่จัดพอร์ตเป็น 5%, 6% และ 7% ตามลำดับ ซึ่งได้ผลลัพธ์ ดังตารางต่อไปนี้

หุ้น	สัดส่วนการลงทุน		
	พอร์ตที่ 1 (5%)	**พอร์ตที่ 2 (6%)**	**พอร์ตที่ 3 (7%)**
DELTA	0.1100	0.2745	0.2843
KKP	0	0	0.5558
KTB	0.4037	0.2479	0.0460
LH	0	0.0807	0.1139
RATCH	0.1569	0	0
SCB	0.2378	0	0
SCC	0.0183	0.3839	0
TCAP	0.0732	0.0076	0
ความเสี่ยง (%)	0.1622	0.0649	0.3500

ตารางที่ 1.1 ตัวอย่างพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 5%, 6% และ 7%

หลังจากนั้นเราจะนำพอร์ตทั้ง 3 พอร์ต มาลงทุนเป็นระยะเวลา 10 ปี ตั้งแต่ พ.ศ. 2551 ถึง พ.ศ. 2560 โดยอัตราเงินปันผลและส่วนต่างมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาด (capital gain) ของพอร์ตที่จัดโดยโปรแกรมจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย แสดงดังตารางต่อไปนี้

ปี	พอร์ตที่ 1 (5%)		พอร์ตที่ 2 (6%)		พอร์ตที่ 3 (7%)	
	อัตราเงินปันผล (%)	Capital Gain (%)	อัตราเงินปันผล (%)	Capital Gain (%)	อัตราเงินปันผล (%)	Capital Gain (%)
2551	3.74	-45.42	5.46	-53.03	7.35	-56.47
2552	4.10	0.22	3.89	-1.77	5.63	-5.79
2553	4.41	14.86	4.84	15.60	6.18	11.98
2554	5.23	8.24	5.95	6.10	7.24	1.90
2555	7.90	13.96	6.38	12.19	4.79	10.05
2556	6.73	8.44	6.82	8.56	7.15	5.59
2557	9.88	12.04	10.27	12.95	7.45	9.96
2558	8.71	7.67	9.34	10.92	8.96	8.60
2559	8.11	8.09	9.42	10.46	11.37	10.51
2560	8.64	7.22	10.08	9.05	17.20	10.71

ตารางที่ 1.2 ผลตอบแทนของพอร์ตจากตาราง 1.1 ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551 ถึง พ.ศ. 2560

บทที่ 2

การจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์ กำหนดให้ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ $1, 2, \ldots, n$ ตามลำดับ สำหรับพอร์ต $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะได้ว่า

$$R_p = R_1x_1 + R_2x_2 + \cdots + R_nx_n$$

เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของพอร์ต โดยเราจะเรียก

$$\sqrt{Var(R_p)}$$

เมื่อ

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j$$

โดยที่ $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ ว่า ความเสี่ยงของพอร์ต แล้วจะได้ว่า พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดสามารถเขียนเป็นตัวแบบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \\ \text{โดยที่} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

บ่อยครั้งที่พอร์ตที่มีความเสียงต่ำสุดนั้นไม่สามารถให้ผลตอบแทนตามที่นักลงทุนต้องการ เราจึงสนใจพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งคือพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดและให้อัตราผลตอบแทนตามที่นักลงทุนต้องการ ดังนั้นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพที่ให้อัตราผลตอบแทน R สามารถเขียนเป็นตัวแบบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \\ \text{โดยที่} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ & E(R_1)x_1 + E(R_2)x_2 + \cdots + E(R_n)x_n = R \end{aligned} \tag{2.2}$$

โดยทั่วไปพอร์ตที่มีประสิทธิภาพอาจมีสัดส่วนการลงทุนเป็นลบ ซึ่งเป็นการยืมสินทรัพย์ที่เราไม่ได้เป็นเจ้าของ ณ เวลานั้น มาขายและซื้อมาคืนเจ้าของในภายหลัง แต่ขั้นตอนการยืมขายนั้นค่อนข้างยุ่งยากและซับซ้อนไม่เหมาะกับการลงทุนในระยะยาว ดังนั้นเราจึงสนใจพอร์ตที่ให้ค่าสัดส่วนการลงทุนที่มีค่าไม่เป็นลบที่เรียกว่าพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย ซึ่งพอร์ตดังกล่าวที่ให้อัตราผลตอบแทน R เขียนเป็นตัวแบบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \\ \text{โดยที่} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ & E(R_1)x_1 + E(R_2)x_2 + \cdots + E(R_n)x_n = R \\ & x_i \geq 0 \text{ ทุก } i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.3}$$

ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีการหาพอร์ตการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุดทั้ง 3 แบบ ซึ่งก็คือ พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด, พอร์ตที่มีประสิทธิภาพ และพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

2.1 พอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการใช้ความรู้ทางพีชคณิตเชิงเส้นและแคลคูลัสมาใช้ในการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

บทนิยามที่ 2.1.1 กำหนดให้ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว เราจะกล่าวว่า A มีสมบัติ **บวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite)** ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \geq 0 \text{ ทุก } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ถ้าเรากำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มและ $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ แล้ว เราจะเรียก $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ ว่า **เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covariance matrix)** และเนื่องจาก $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$ ทำให้ได้ว่า $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

บทตั้ง 2.1.1 เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมมีสมบัติบวกกึ่งแน่นอน

วิธีทำ ให้ $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $X_1, X_2, \dots, X_n$ และ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \;=\; Var\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iX_i\Big) \;\geq\; 0$$

เพราะฉะนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมมีสมบัติบวกกึ่งแน่นอน □

กำหนดให้ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีสมบัติบวกกึ่งแน่นอนขนาด $n \times n$ และ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง n ตัวแปร ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

ในการหาเวกเตอร์ $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ที่ทำให้ $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ มีค่าต่ำที่สุด ภายใต้เงื่อนไข

$$h_i(c_1, c_2, \dots, c_n) = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

โดยที่ $h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

สามารถเขียนเป็นตัวแบบได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \\ \text{โดยที่} \quad & h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i \;\; (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \tag{2.4}$$

ในการหาผลเฉลยของตัวแบบ (2.4) นั้น [5] ได้ให้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1.2 ([5], หน้า 39) กำหนดให้ $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ มีสมบัติ $h_i(c_1, c_2, \dots, c_n) = a_i$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$ เราจะได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ จะเป็นผลเฉลยของ (2.4) ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $(c_1, c_2, \dots, c_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ผู้ที่สนใจการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น สามารถศึกษาได้จาก [5] หน้าที่ 28 - 39 และต่อไปเราจะนำทฤษฎีบทที่ 2.1.2 มาประยุกต์ใช้ในการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด และพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

ทฤษฎีบทที่ 2.1.3 สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์ กำหนดให้ $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะเป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\mu_1 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \mu_1)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นพอร์ต นั่นคือ

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 \tag{2.6}$$

เราจะสังเกตได้ว่าตัวแบบ (2.1) สอดคล้องกับตัวแบบ (2.4) เมื่อ

$$h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

และข้อจำกัด คือ $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$
จากบทตั้งที่ 2.1.1 เราทราบแล้วว่า $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ มีสมบัติบวกกึ่งแน่นอน
โดยทฤษฎีบทที่ 2.1.2 จะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นผลเฉลยของ (2.1) ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\mu_1 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \mu_1)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

เราจะเห็นว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะสอดคล้อง (2.6) และ (2.7) ก็ต่อเมื่อ สอดคล้อง (2.5) ดังนั้นข้อสรุปของทฤษฎีบทที่ 2.1.3 จึงเป็นจริง $\square$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.4 สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์ กำหนดให้ $E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n)$ เป็นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ $1, 2, \ldots, n$ ตามลำดับ และมี $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะเป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพที่ให้อัตราผลตอบแทน R ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \mu_1, \mu_2)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 & E(R_1) \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 & E(R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 & E(R_n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ R \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ให้อัตราผลตอบแทน R นั่นคือ

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 \tag{2.9}$$

$$E(R_1)c_1 + E(R_2)c_2 + \cdots + E(R_n)c_n = R \tag{2.10}$$

เราจะสังเกตได้ว่าตัวแบบ (2.2) สอดคล้องกับตัวแบบ (2.4) เมื่อ

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= E(R_1)x_1 + E(R_2)x_2 + \ldots + E(R_n)x_n \end{aligned}$$

โดยมีข้อจำกัด คือ $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ และ $h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = R$

จากบทตั้งที่ 2.1.1 เราทราบว่า $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ มีสมบัติบวกกึ่งแน่นอน

โดยทฤษฎีบทที่ 2.1.2 จะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นผลเฉลยของ (2.2) ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \mu_1, \mu_2)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & E(R_1) \\ 1 & E(R_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & E(R_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 & E(R_1) \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 & E(R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 & E(R_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

เนื่องจาก $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะสอดคล้อง (2.9)-(2.11) ก็ต่อเมื่อ สอดคล้อง (2.8)

ดังนั้นข้อสรุปของทฤษฎีบทที่ 2.1.4 จึงเป็นจริง $\square$

ตัวอย่าง 2.1.2 ในการลงทุน 3 ทางเลือก ให้ $E(R_1) = 2\%$, $E(R_2) = 0.2\%$, $E(R_3) = 1\%$ และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\sum$ กำหนดโดย

$$\sum = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 \\ -0.6 & -0.75 & 9 \end{bmatrix}$$

1. จงหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำที่สุด
2. จงหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพที่ให้อัตราผลตอบแทน $R = 2\%$

วิธีทำ

1. จงหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำที่สุด

พิจารณาสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แทนค่าตามที่โจทย์กำหนดไว้ข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 1 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

แก้สมการที่ (2.12) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 1 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0187 \\ 0.9254 \\ 0.0933 \\ -0.1567 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $c_1 = -0.0187$, $c_2 = 0.9254$, $c_3 = 0.0933$ และ $\mu_1 = -0.1567$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.1.3 จะได้ว่า พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำที่สุด คือ $(-0.0187, 0.9254, 0.0933)$

2. จงหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพที่ให้อัตราผลตอบแทน $R = 2\%$

พิจารณาสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 1 & E(R_1) \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 1 & E(R_2) \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 1 & E(R_3) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E(R_1) & E(R_2) & E(R_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ R \end{bmatrix}$$

แทนค่าตามที่โจทย์กำหนดไว้ข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 1 & 0.2 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

แก้สมการ (2.13) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 1 & 0.2 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9512 \\ -0.0611 \\ 0.1099 \\ -0.0590 \\ -0.4055 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $c_1 = 0.9512$, $c_2 = -0.0611$, $c_3 = 0.1099$, $\mu_1 = -0.0590$, $\mu_2 = -0.4055$
โดยทฤษฎีบทที่ 2.1.4 จะได้ว่า พอร์ตที่มีประสิทธิภาพที่ให้อัตราผลตอบแทน 2% คือ
$(0.9512, -0.0611, 0.1099)$ □

2.2 พอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

จากตัวอย่างที่ 2.1.2 จะเห็นได้ว่าพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพอาจจะให้สัดส่วนการลงทุนที่ติดลบได้ซึ่งหมายถึงการยืมขายสินทรัพย์ เนื่องจากการยืมขายลินทรัพย์มีขั้นตอนที่ซับซ้อน ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

กำหนดให้ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีสมบัติบวกกึ่งแน่นอนขนาด $n \times n$ และ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง n ตัวแปร ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

ในการหาเวกเตอร์ $c \in \mathbb{R}^n$ ที่ทำให้ $f(c)$ มีค่าต่ำที่สุด ภายใต้เงื่อนไข

$$h_i(c) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ และ } g_j(c) \le b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

เมื่อ $h_i(x) = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n \ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

$g_j(x) = c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \cdots + c_{jn}x_n \ \ (j = 1, 2, \cdots, l)$

สามารถเขียนเป็นตัวแบบได้ดังต่อไปนี้

ในการหาผลเฉลยของตัวแบบ (2.14) นั้น Dostal Z. (2009) ได้ให้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2.1 ([5], หน้า 58) สำหรับ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ซึ่ง $h_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = a_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $g_j(c_1, c_2, \ldots, c_n) \leq b_j$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, m$ แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นผลเฉลยของ (2.14) ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\lambda_j \geq 0$ และ $\lambda_j \cdot (g_j(c_1, c_2, \ldots, c_n) - b_j) = 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, l$

2) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{l1} & b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{l2} & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{ln} & b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_l \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ผู้ที่สนใจและต้องการศึกษาเพิ่มเติม สามารถศึกษาได้จาก [5] หน้าที่ 58 และต่อไปเราจะนำทฤษฎีบทที่ 2.2.1 มาประยุกต์ใช้ในการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

ทฤษฎีบทที่ 2.2.2 สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์ กำหนดให้ $E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n)$ เป็นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ $1, 2, \ldots, n$ ตามลำดับ และมี $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะเป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน R ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\lambda_j \geq 0$ และ $\lambda_j \cdot c_j = 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

2) $$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ พอร์ตการลงทุนที่ให้อัตราผลตอบแทน R และไม่มีการยืมขาย นั่นคือ

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 \tag{2.14}$$

$$E(R_1)c_1 + E(R_2)c_2 + \cdots + E(R_n)c_n = R \tag{2.15}$$

$$c_i \geq 0 \text{ ทุก } i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.16}$$

เราจะสังเกตได้ว่าตัวแบบ (2.3) สอดคล้องกับตัวแบบ (2.14) เมื่อ

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= E(R_1)x_1 + E(R_2)x_2 + \ldots + E(R_n)x_n \\ g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= -x_j \text{ ทุก } j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

โดยมีข้อจำกัด คือ $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, $h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = R$ และ $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, n$ และจากบทตั้งที่ 2.1.1 เราทราบว่า $(\sigma_{ij})_{n\times n}$ มีสมบัติบวกกึ่งแน่นอน ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 2.2.1 จะได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ จะเป็นผลเฉลยของ (2.3) ก็ต่อเมื่อ สามารถหา $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\lambda_j \geq 0$ และ $\lambda_j \cdot c_j = 0$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

2) $$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & E(R_1) & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & E(R_n) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_l \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากเงื่อนไขข้อที่ 2) สามารถจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

เนื่องจาก $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ สอดคล้อง (2.15) - (2.18)
เพราะฉะนั้น ข้อสรุปของทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จึงเป็นจริง □

ตัวอย่าง 2.2.1 ในการลงทุน 3 สินทรัพย์ ให้ $E(R_1) = 2\%$, $E(R_2) = 0.2\%$, $E(R_3) = 1\%$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\sum$ กำหนดโดย

$$\sum = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 \\ -0.6 & -0.75 & 9 \end{bmatrix}$$

จงหาพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลผลตอบแทน $R = 2\%$

วิธีทำ พิจารณาสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & -1 & 0 & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & 0 & -1 & 0 & E(R_2) & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & 0 & 0 & -1 & E(R_3) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & E(R_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}$$

แทนค่าตามที่โจทย์กำหนดไว้ข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 0 & -1 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

กรณีที่ 1: $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$

เพราะฉะนั้น $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$

แทนค่า $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า สมการไม่มีคำตอบ

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

ที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 2: $c_1 > 0, c_2 = 0, c_3 = 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_1 = 0$

แทนค่า $c_2 = c_3 = \lambda_1 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & -1 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.6 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า สมการไม่มีคำตอบ

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย ที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 3: $c_1 = 0, c_2 > 0, c_3 = 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_2 = 0$

แทนค่า $c_1 = c_3 = \lambda_2 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0.25 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.75 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก สมการไม่มีคำตอบ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 4: $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 > 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_3 = 0$

แทนค่า $c_1 = c_2 = \lambda_3 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} -0.6 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -0.75 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก สมการไม่มีคำตอบ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 5: $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 = 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

แทนค่า $c_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.6 & -0.75 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แก้สมการจะได้ว่า $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $\lambda_3 = -1.1833$, $\mu_1 = -0.4167$ และ $\mu_2 = -0.1667$

เนื่องจาก $\lambda_3 < 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 6: $c_1 > 0, c_2 = 0, c_3 > 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

แทนค่า $c_2 = \lambda_1 = \lambda_3 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.6 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & -0.75 & -1 & 0.2 & 1 \\ -0.6 & 9 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แก้สมการจะได้ว่า $c_1 = 1,\ c_3 = 0,\ \lambda_2 = 2.13,\ \mu_1 = -1.6$ และ $\mu_2 = 2.2$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า $(1, 0, 0)$ เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 7: $c_1 = 0, c_2 > 0, c_3 > 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

แทนค่า $c_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0.25 & -0.6 & -1 & 2 & 1 \\ 0.25 & -0.75 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.75 & 9 & 0 & 1 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แก้สมการจะได้ว่า $c_2 = -1.25,\ c_3 = 2.25,\ \lambda_1 = -51.8344,\ \mu_1 = -28.9844$ และ $\mu_2 = 7.7969$

เนื่องจาก $c_2, \lambda_1 < 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

กรณีที่ 8: $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$

เนื่องจาก $\lambda_i \cdot c_i = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

แทนค่า $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ในสมการ (2.19) และจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & 2 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 0.2 & 1 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แก้สมการจะได้ว่า $c_1 = 0.9511,\ \ c_2 = -0.0611,\ \ c_3 = 0.1099,\ \ \mu_1 = -0.4055$

และ $\mu_2 = -0.0590$ และเนื่องจาก $c_2 < 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 จะได้ว่า (c_1, c_2, c_3) สำหรับกรณีนี้ไม่เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 2%

จากกรณีทั้งหมดสามารถสรุปได้ว่า $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0)$ เป็นพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้ผลตอบแทน 2% $\square$

จากตัวอย่างที่ 2.1.2 และ 2.2.1 จะเห็นได้ว่าพอร์ตมีประสิทธิภาพและพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย ต่างให้อัตราผลตอบแทน 2% เท่ากัน แต่ในทางปฏิบัติแล้วพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายมีความเหมาะสมกับการลงทุนระยะยาวมากกว่าพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพซึ่งบ่อยครั้งจะได้พอร์ตที่มีการยืมขายสินทรัพย์

บทที่ 3

โปรแกรมจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

จากตัวอย่างที่ 2.2.1 เราสามารถสรุปเป็นขั้นตอนการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายได้เป็น 3 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างสมการเมทริกซ์ในทฤษฎีบทที่ 2.2.2 เงื่อนไขข้อที่ 2) นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

จะสังเกตได้ว่าสมการที่ (3.1) คือสมการที่อยู่ในรูป

$$[A : B]x = b$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+2)\times n} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+2)\times(n+2)} \quad x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}_{(2n+2)\times 1} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}_{(n+2)\times 1}$$

ขั้นตอนที่ 2 เนื่องจากเราต้องการพอร์ตการลงทุนที่ไม่มีการยืมขายจึงได้ว่า $c_j \geq 0$ นั่นคือ $c_j = 0$ หรือ $c_j > 0$ สำหรับ $j = 1,2,\dots,n$ ซึ่งทำให้ได้ว่าเราจะต้องแบ่งกรณีทั้งหมด 2^n กรณี และจากเงื่อนไขข้อที่ 1) ของทฤษฎีบทที่ 2.2.2 ทำให้ได้ว่าในกรณีที่ $c_j > 0$ จะได้ว่า $\lambda_j = 0$ ซึ่งเราจะสังเกตได้ว่าในแต่ละกรณีเราจะทราบค่าตัวแปร $c_j = 0$ หรือ $\lambda_j = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่งเสมอ ทำให้เราทราบค่าตัวแปรในสมการที่ (3.1) จำนวน n ตัวแปร ดังนั้นจะเหลือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในสมการที่ (3.1) จำนวน $n + 2$ ตัวแปร

สำหรับกรณีทั่วไป นั่นคือ $c_{i_1} = c_{i_2} = \cdots = c_{i_k} = 0$ โดยที่ $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ และ $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2} = \cdots = \lambda_{j_{n-k}} = 0$ โดยที่ $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k}$ และ $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}\} = \emptyset$ แล้วเราจะได้ว่า

$$[A:B]x = b$$

จะเปลี่ยนรูปเป็นสมการ

$$[A_{i_1 i_2 \dots i_k} : B_{j_1 j_2 \dots j_{n-k}}] x_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{n-k}} = b \tag{3.2}$$

เมื่อ $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ คือ เมทริกซ์ A ซึ่งถูกตัดหลักที่ $i_1, i_2, \dots, i_k$ ออก

$B_{j_1 j_2 \dots j_{n-k}}$ คือ เมทริกซ์ B ซึ่งถูกตัดหลักที่ $j_1, j_2, \dots, j_{n-k}$ ออก

$x_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{n-k}}$ คือ เวกเตอร์ x ซึ่งถูกตัดตัวแปร $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ และ $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{n-k}}$ ออก

เราจะเห็นได้ว่าระบบสมการ (3.2) นั้นจะมี n สมการ และ n ตัวแปร ซึ่งทำให้เหาผลเฉลยได้สะดวกยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น จากตัวอย่างที่ 2.2.1 ในกรณีที่ $c_1 = c_3 = \lambda_2 = 0$ จะได้ว่าสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 0 & -1 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.6 & -0.75 & 9 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะเปลี่ยนรูปเป็นสมการ

$$\begin{bmatrix} 0.25 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \\ -0.75 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละกรณีเราจะแก้สมการ $[A_{i_1 i_2 \dots i_k} : B_{j_1 j_2 \dots j_{n-k}}] x_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{n-k}} = b$ จากขั้นตอนที่ 2 เพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และ ตรวจสอบว่า $c_j \geq 0$ และ $\lambda_j \geq 0$ ทุก $j = 1,2,\dots,n$ หรือไม่

จากขั้นตอนการหาพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายข้างต้น เราจะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อ $\boldsymbol{n}$ มีค่ามากขึ้น เราจะต้องแบ่งกรณีมากขึ้นซึ่งทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณเป็นอย่างยิ่ง เพื่อที่จะแก้ปัญหาดังกล่าว ในบทนี้เราจะเขียนโปรแกรมหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายตามขั้นตอนทั้ง 3 ขั้นตอน ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

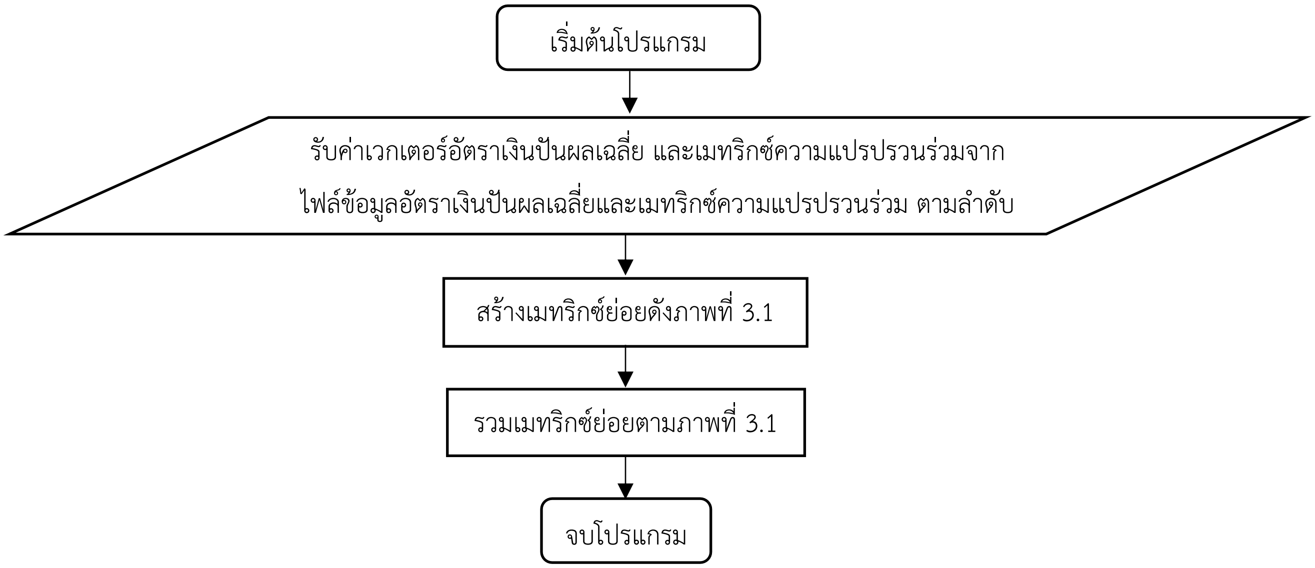
3.1 โปรแกรมสร้างเมทริกซ์ $[\boldsymbol{A}: \boldsymbol{B}]$

ในหัวข้อนี้เราจะเขียนโปรแกรมสำหรับสร้างเมทริกซ์ $[A: B]$ เพื่อที่จะนำไปใช้หาพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายต่อไป โดยแนวคิดในการสร้างเมทริกซ์ $[A: B]$ คือ เราจะสร้างเมทริกซ์ย่อยจำนวน 8 เมทริกซ์ ดังภาพที่ 3.1 แล้วนำมาเรียงต่อกัน โดยตอนเริ่มต้นเราจะรับค่าเวกเตอร์อัตราเงินปันผลเฉลี่ยและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจากไฟล์ข้อมูล

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \dots & -1 & E(R_n) & 1 \\ \hline E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ภาพที่ 3.1 ส่วนประกอบของเมทริกซ์ย่อยในการสร้างเมทริกซ์ $[A{:}\,B]$

แนวคิดในการสร้างเมทริกซ์ข้างต้นสามารถนำมาเขียนเป็นผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 3.2 แผนผังแสดงการสร้างเมทริกซ์ $[A{:}\,B]$

จากแผนผังดังภาพที่ 3.1 สามารถนำมาเขียนโค้ดได้ดังต่อไปนี้

1) อ่านค่าเวกเตอร์อัตราเงินปันผลเฉลี่ย และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจากไฟล์ข้อมูลอัตราเงินปันผลแล้วเก็บค่าเป็นตัวแปร E และ C ตามลำดับ

```
#Import Covariance Matrix
df_1 = pd.read_excel (r'C:\Users\Krit\Desktop\updating report\data\Covariance.xlsx')

#Import average Return vector
df_2 = pd.read_excel (r'C:\Users\Krit\Desktop\updating report\data\Expected_Return.xlsx')

#Changing dataframe to List
E = []
C = []

for i in np.array(df_1):
     n = []
    for j in i[1:]:
        n.append(j)
    C.append(n)

for i in np.array(df_2):
     n = []
    for j in i[1:]:
        n.append(j)
    E.append(n)
```

2) สร้างเมทริกซ์ $[A{:}\,B]$

```
A1 = np.eye(len(C))*-1
A2 = np.append(C,A1,axis = 1)
A3 = np.append(A2,E,axis = 1)
A4 = np.append(A3,np.ones((len(C),1),dtype = int),axis = 1)
A5 = np.array([np.append(E.reshape((1,len(C))),np.zeros(len(C)+2,dtype = float))])
A6 = np.append(A4,A5,axis=0)
A7 = np.array([np.append(np.ones((1,len(C)),dtype = float),np.zeros(len(C)+2,dtype = float))])
A_B = np.append(A6, A7, axis=0)
```

จากโค้ดข้างต้นเราจะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ $[A{:}\,B]$ ซึ่งถูกจะนำไปใช้ในการแก้สมการหาพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายต่อไป ยกตัวอย่างเช่น

สำหรับการลงทุน 3 สินทรัพย์ กำหนดให้ $E(R_1) = 2\%,\ E(R_2) = 0.2\%,\ E(R_3) = 1\%$ และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\sum$ กำหนดโดย

$$\sum = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 \\ -0.6 & -0.75 & 9 \end{bmatrix}$$

ผลลัพธ์จากโค้ดข้างต้น คือ

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0.25 & -0.6 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 \\ -0.6 & -0.75 & 9 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0.2 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 0.2 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

ต่อไปเราจะนำเมทริกซ์ $[A{:}\,B]$ มาพิจารณาตามกรณีต่าง ๆ ซึ่งจากสมการ (3.2) เราจะสังเกตได้ว่าในแต่ละกรณีจะให้ค่าของเวกเตอร์ $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{n-k})$ ต่างกัน นั่นทำให้ได้ว่าเราสามารถพิจารณาค่าของเวกเตอร์ดังกล่าวแทนการแจงกรณีในแต่ละกรณีได้ ดังนั้นในหัวข้อถัดไปเราจะเขียนโปรแกรมซึ่งสร้าง เวกเตอร์ $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{n-k})$ สำหรับแต่ละกรณี เพื่อที่จะนำไปตัดหลักเมทริกซ์ $[A{:}\,B]$ ต่อไป

3.2 โปรแกรมสร้างเวกเตอร์ $(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \dots, \boldsymbol{i_k}, \boldsymbol{j_1}, \boldsymbol{j_2}, \dots, \boldsymbol{j_{n-k}})$ สำหรับตัดหลักของเมทริกซ์ $[\boldsymbol{A}: \boldsymbol{B}]$

ในหัวข้อนี้เราจะเขียนโปรแกรมสำหรับสร้างเวกเตอร์ $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{n-k})$ เพื่อที่จะนำไปตัดหลักของเมทริกซ์ $[A: B]$ ก่อนที่จะนำไปแก้สมการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายในโปรแกรมถัดไป

เพื่อให้ง่ายต่อการเขียนโปรแกรมสำหรับกรณีทั่วไปเราจะพิจารณาค่าของเวกเตอร์ทั้งหมดในกรณีที่ n มีค่าเท่ากับ 2 และ 3 ดังต่อไปนี้

กรณี $n = 2$: เราต้องตัดหลักของเมทริกซ์ $[A: B]$ ออก 2 หลัก โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้าตัดหลัก i^{th} ในเมทริกซ์ A จะไม่ตัดหลักที่ i^{th} ในเมทริกซ์ B ดังนั้นจึงมีเวกเตอร์สำหรับตัดหลักจำนวน 4 เวกเตอร์ ดังนี้

กรณีที่ 1 $c_1 = 0, c_2 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(1,2)$

กรณีที่ 2 $c_1 = 0, \lambda_2 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(1,4)$

กรณีที่ 3 $\lambda_1 = 0, c_2 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(2,3)$

กรณีที่ 4 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(3,4)$

เราจะสังเกตได้ว่าเวกเตอร์ในแต่ละกรณีมีกระบวนการสร้าง ดังนี้

หลักเมทริกซ์ A		หลักเมทริกซ์ B		เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก
1	2	1	2	
✓	✓	×	×	$(1,2)$
✓	×	×	✓	$(1,4)$
×	✓	✓	×	$(2,3)$
×	×	✓	✓	$(3,4)$

เมื่อ ✓ หมายถึง ตัดคอลัมน์ และ × หมายถึง ไม่ตัดคอลัมน์

กรณี $n = 3$: เราต้องตัดหลักของเมทริกซ์ $[A: B]$ ออก 3 หลัก โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้าตัดหลัก i^{th} ในเมทริกซ์ A จะไม่ตัดหลักที่ i^{th} ในเมทริกซ์ B ดังนั้นจึงมีเวกเตอร์สำหรับตัดหลักจำนวน 8 เวกเตอร์ ดังนี้

กรณีที่ 1 $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(1,2,3)$

กรณีที่ 2 $\lambda_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(2,3,4)$

กรณีที่ 3 $c_1 = 0, \lambda_2 = 0, c_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(1,3,5)$

กรณีที่ 4 $c_1 = 0, c_2 = 0, \lambda_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(1,2,6)$

กรณีที่ 5 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, c_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(3,4,5)$

กรณีที่ 6 $\lambda_1 = 0, c_2 = 0, \lambda_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(2,4,6)$

กรณีที่ 7 $c_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(1,5,6)$

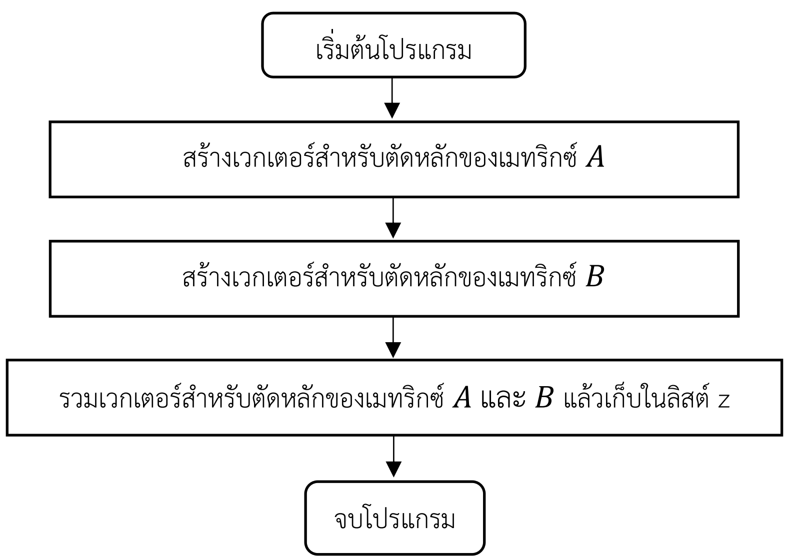
กรณีที่ 8 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$: เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก คือ $(4,5,6)$

เราจะสังเกตได้ว่าเวกเตอร์ดังกล่าวมีกระบวนการสร้างดังนี้

หลักเมทริกซ์ A			หลักเมทริกซ์ B			เวกเตอร์สำหรับตัดหลัก
1	2	3	1	2	3	
✓	✓	✓	×	×	×	$(1,2,3)$
✓	✓	×	×	×	✓	$(1,2,6)$
✓	×	✓	×	✓	×	$(1,5,3)$
×	✓	✓	✓	×	×	$(4,2,3)$
✓	×	×	×	✓	✓	$(1,5,6)$
×	✓	×	✓	×	✓	$(2,4,6)$
×	×	✓	✓	✓	×	$(3,4,5)$
×	×	×	✓	✓	✓	$(4,5,6)$

เมื่อ ✓ หมายถึง ตัดหลัก และ × หมายถึง ไม่ตัดหลัก

จากตัวอย่างกระบวนการสร้างเวกเตอร์ดังกล่าวนำมาเขียนเป็นแผนผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังนี้



ภาพที่ 3.3 แผนผังแสดงการหาเวกเตอร์ย่อยซึ่งเก็บค่าหมายเลขหลัก (column) ที่ต้องตัดออกของเมทริกซ์ $[A:B]$

จากแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรมข้างต้นเรานำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

1) สร้างลิสต์ D = [0,1, ..., n-1]

```
# Build Index Vecter for cut columns of Coefficience Matrix Before Solving.
index = []
D = []
E1=[]
E2=[]

for i in range(0,len(Covariance)):
    D.append(i)
```

2) สร้างลิสต์ขนาด i (i = 0, 1, ..., n-1) จากตัวเลข 0,1, ... , n-1 แล้วเก็บในลิสต์ E1

```
def ff(n):
    return combinations(D,n)

for i in range(0,len(Covariance)+1,1):
    for j in ff(i):
        n = []
        for k in j:
            n.append(k)
        E1.append(n)
```

3) บวกสมาชิกของ E1[j] (j = 2^n-1, 2^n-2, ..., 0) ด้วย n แล้วเก็บในลิสต์ E2

```
for i in range(len(E1)-1,-1,-1):
    y = [j+len(Covariance) for j in E1[i]]
    E2.append(y)
```

4) รวม E1[k] และ E2[k] (k = 0, 1, ..., 2^n-1) แล้วเก็บในลิสต์ z

```
for i in range(0,len(E2),1):
    z = E1[i]+E2[i]
```

จากโค้ดข้างต้นเราจะได้ผลลัพธ์เป็นลิสต์ของเวกเตอร์ซึ่งเก็บหมายเลขหลักสำหรับตัดหลักของเมทริกซ์ $[A: B]$ ในกรณีต่าง ๆ ยกตัวอย่างเช่น

กรณี $n = 2$ จะได้ลิสต์ของเวกเตอร์ คือ $[(0,1), (1,2), (0,4), (3,4)]$

กรณี $n = 3$ จะได้เวกเตอร์ตัดหลัก คือ$[(0,1,2),(1,2,3),(0,2,4),(0,1,5),(2,3,4),(1,3,5),(0,4,5),(3,4,5)]$

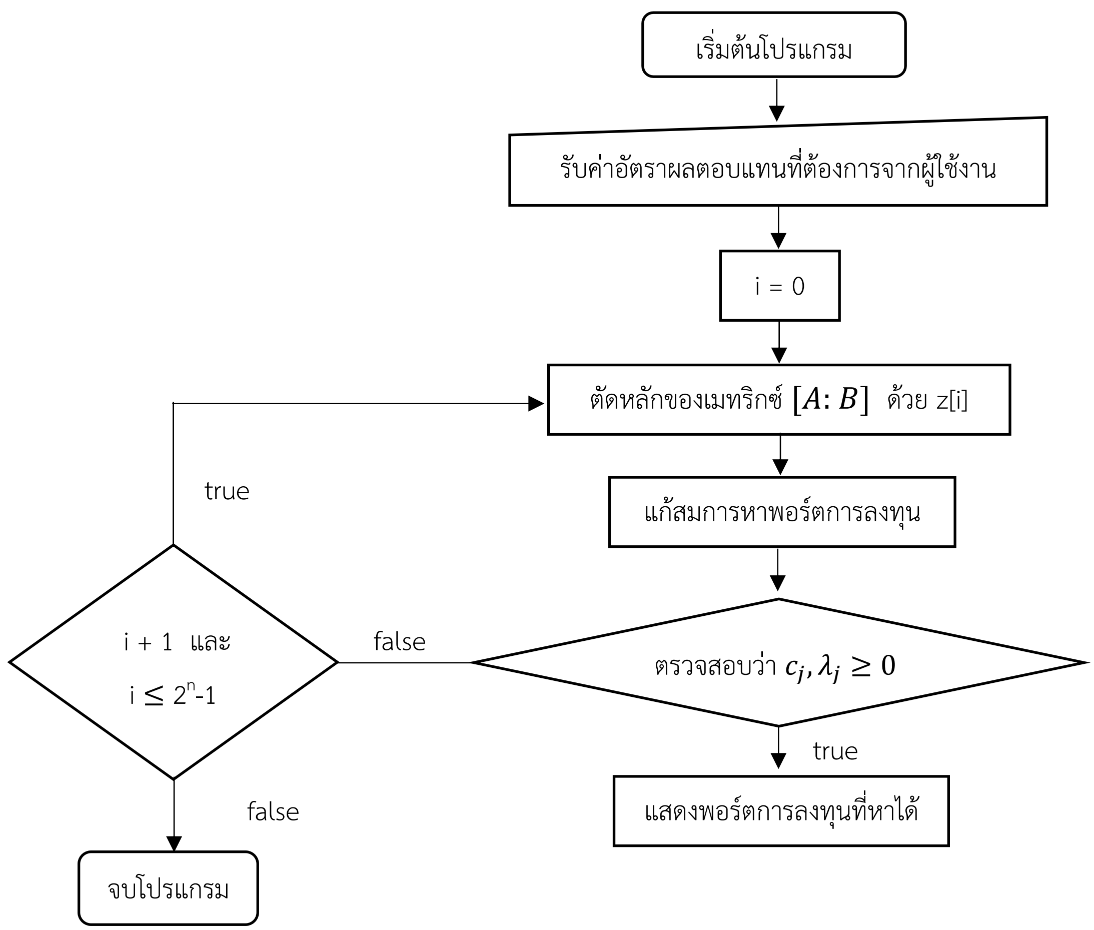
จากเวกเตอร์ที่เก็บค่าหมายเลขหลักในตัวอย่างจะเห็นได้ว่ามีหมายเลขหลักที่มีค่าเท่ากับ 0 เนื่องจากหมายเลขหลักของเมทริกซ์ในภาษา Python นั้นเริ่มต้นที่ 0

ต่อไปเราจะนำลิสต์ของเวกเตอร์ในหัวข้อนี้ไปตัดหลักเมทริกซ์ $[A: B]$ ที่ได้จากหัวข้อ 3.1 และแก้สมการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

3.3 โปรแกรมสำหรับแก้สมการหาพอร์ต

ในหัวข้อนี้เรานำลิสต์ของเวกเตอร์ในหัวข้อ 3.2 มาตัดหลักเมทริกซ์ $[A: B]$ ที่ได้จาก 3.1 และแก้สมการ (3.2) พร้อมตรวจสอบว่า $c_j \geq 0$ และ $\lambda_j \geq 0$ ทุก $j = 1,2,\dots,n$

แผนผังการทำงานของโปรแกรมสามารถแสดงได้ดังนี้



ภาพที่ 3.4 แผนผังแสดงการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

จากแผนผังการทำงานของโปรแกรมข้างต้นนำมาเขียนเป็นโค้ดได้ดังนี้

```
for i in range(0,len(z),1):
    Cov_3 = np.delete(A_B.transpose(),np.array(z),0)
    det = np.linalg.det(Cov_3.transpose())
    Solution = np.zeros(len(Covariance))
    if det != 0:
        sol = np.linalg.solve(Cov_3.transpose(), RHS)
    n=0
    for i in range(0,len(Covariance)):
          if sol[i]> 0:
            n=n+1
    if n == len(Covariance):
        for i in range(0,2*len(Covariance)):
             index.append(i)
        for i in z:
            index.remove(i)
        for i in range(0,len(Covariance)):
            if index[i]<len(Covariance):
                 Solution[index[i]]= sol[i]
```

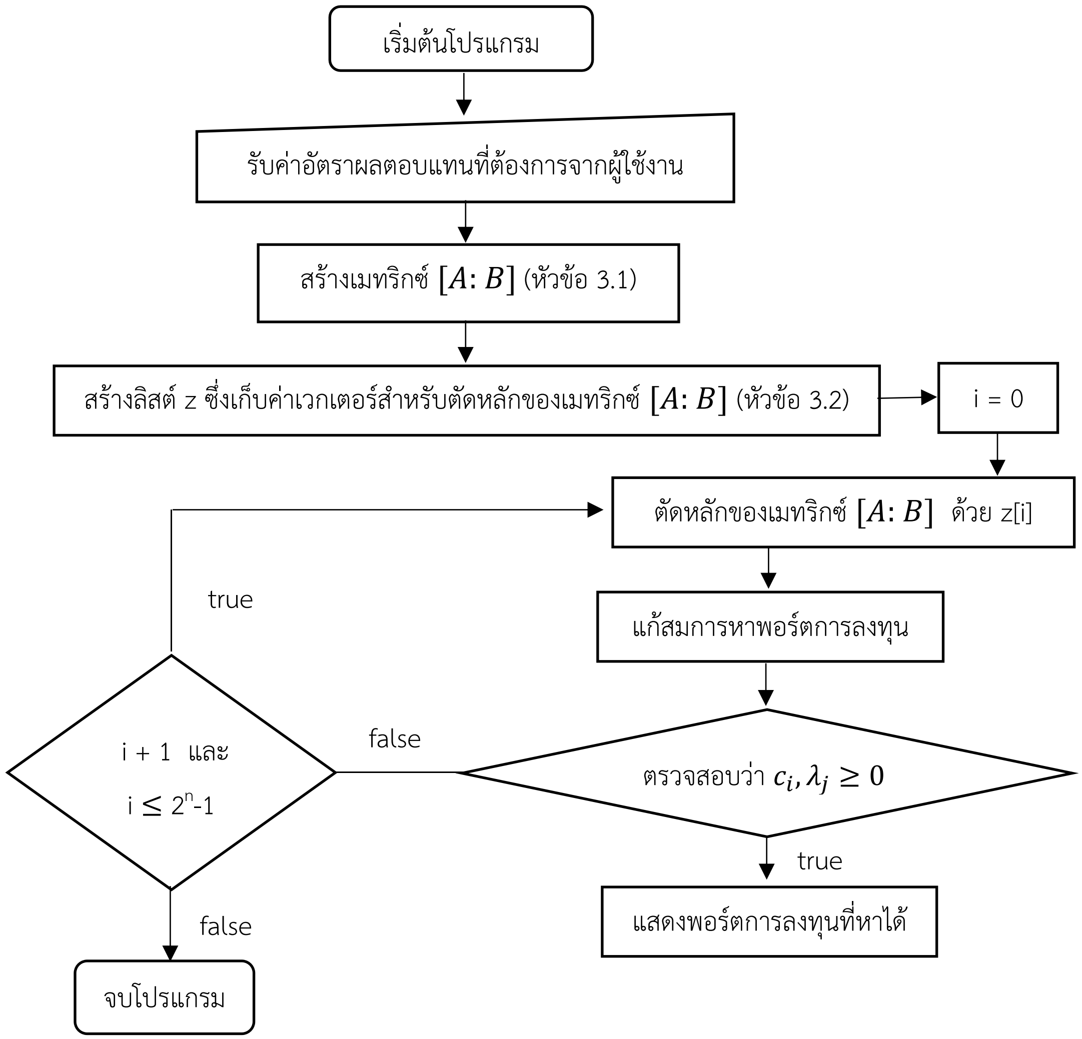
ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมในหัวข้อนี้ คือ พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดโดยไม่มีการยืมขายและให้อัตราผลตอบแทนตามที่เราต้องการ (ขึ้นกับผลตอบแทนที่กรอกลงไป) ยกตัวอย่างเช่น

สำหรับการลงทุน 3 สินทรัพย์ กำหนดให้ $E(R_1) = 2\%,\ E(R_2) = 0.2\%,\ E(R_3) = 1\%$ และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\sum$ กำหนดโดย

$$\sum = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.6 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 \\ -0.6 & -0.75 & 9 \end{bmatrix}$$

ถ้าหากเราต้องการผลตอบแทน 2% ผลลัพธ์จากโค้ดข้างต้น คือ **(1,0,0)** ซึ่งคือพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้ผลตอบแทน 2% ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับตัวอย่าง 2.2.1

จากหัวข้อที่ (3.1) ถึง (3.3) เราสามารถเขียนผังการทำงานของโปรแกรมทั้งหมด ได้ดังต่อไปนี้



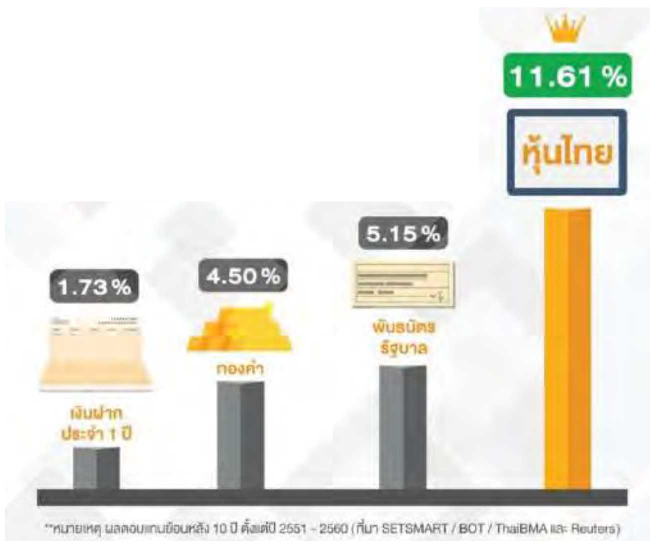
ภาพที่ 3.5 แผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรม (3.1) – (3.3)

บทที่ 4

เกษียณสุขใจ

สหประชาชาติได้ระบุว่า ประเทศใดที่มีสัดส่วนประชากรที่มีอายุ 60 ปีขึ้นไป ในสัดส่วนเกินร้อยละ 10 ของประชากรทั้งประเทศ จะถือว่าประเทศนั้นก้าวเข้าสู่ **สังคมผู้สูงอายุ (Aging Society)** และจะเป็น **สังคมผู้สูงอายุเต็มรูปแบบ (Aged Society)** เมื่อสัดส่วนดังกล่าวเกินร้อยละ 20 ของประชากรทั้งประเทศ สำหรับประเทศไทยนั้นคาดการณ์ว่าจะเข้าสู่สังคมผู้สูงอายุเต็มรูปแบบภายใน 2564

สำหรับผู้เกษียณการหารายได้ให้เพียงพอต่อค่าใช้จ่ายหลังเกษียณนั้นย่อมมีความสำคัญไม่แพ้กับการดูแลสุขภาพ ดังนั้นการลงทุนเพื่อนำรายได้มาใช้ในยามหลังเกษียณจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง



ภาพที่ 4.1 ผลตอบแทนการลงทุนประเภทต่างๆ

ที่มาตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย [3]

จากภาพที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าการลงทุนระยาวในหุ้นนั้นให้ผลตอบแทนเฉลี่ยที่สูงกว่าการลงทุนในสินทรัพย์ประเภทอื่น ๆ ซึ่งทำให้ความเสี่ยงในการลงทุนประเภทนี้สูงตามไปด้วย ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะประยุกต์โปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายมาลดความเสี่ยงในการลงทุนในหุ้น และสามารถให้เงินปันผลที่สม่ำเสมอและเพียงพอต่อค่าใช้จ่ายสำหรับผู้เกษียณในชีวิตประจำวันได้

4.1 เกณฑ์ในการคัดเลือกหุ้นสำหรับการจัดพอร์ต

ในหัวข้อนี้เราจะคัดเลือกหุ้นโดยใช้ข้อมูลระหว่าง พ.ศ. 2545-2550 เพื่อใช้ในการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย ซึ่งประกอบด้วยเกณฑ์ ([4], หน้า 2-3) ดังต่อไปนี้

(1) มีอัตราเงินปันผล (Dividend Yield) เฉลี่ยระหว่าง พ.ศ. 2545-2550 เกิน 3% ต่อปี และมีมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาด (Market Capitalization) เฉลี่ยเกิน 50,000 ล้านบาท ซึ่งมีหุ้นผ่านเกณฑ์นี้ทั้งหมด 17 บริษัท สามารถแบ่งตามหมวดอุตสาหกรรม ได้ดังตารางต่อไปนี้

อุตสาหกรรมอาหาร	อสังหาริมทรัพย์และก่อสร้าง	บริการ	เทคโนโลยี	ทรัพยากร	การเงิน
CPF	SCC LH	BTS	ADVANC DELTA INTUCH	BANPU EGCO PTT PTTEP RATCH	BBL KKP KTB SCB TCAP

ตารางที่ 4.1 แสดงรายชื่อหุ้นที่คัดเลือกด้วยอัตราเงินปันผลเฉลี่ยและมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาด

(2) หุ้นแต่ละบริษัทมีระดับบรรษัทภิบาลในระดับ 4-5 ซึ่งหุ้นที่ผ่านเกณฑ์ข้อ (1) ทั้ง 17 บริษัท มีระดับบรรษัทภิบาลระดับ 4-5 ทั้งหมด

(3) หุ้นแต่ละบริษัทมีอัตราส่วนราคาหุ้นกับกำไรต่อหุ้น (P/E) เฉลี่ยไม่เกิน 15 ซึ่งหุ้นที่ผ่านเกณฑ์ข้อ (1) และ (2) จำนวน 13 บริษัทที่สอดคล้องกับเกณฑ์ข้างต้น สามารถแบ่งตามหมวดอุตสาหกรรม ได้ดังตารางต่อไปนี้

อุตสาหกรรมอาหาร	อสังหาริมทรัพย์และก่อสร้าง	บริการ	เทคโนโลยี	ทรัพยากร	การเงิน
CPF	SCC LH	BTS	ADVANC DELTA INTUCH	BANPU EGCO PTT PTTEP RATCH	BBL KKP KTB SCB TCAP

ตารางที่ 4.2 แสดงรายชื่อหุ้นที่ผ่านการคัดเลือกด้วยเกณฑ์ข้อ (1) - (3)

โดยข้อมูลอัตราเงินปันผลของหุ้นทั้ง 13 บริษัท ระหว่าง พ.ศ. 2545 - 2550 แสดงดังตารางต่อไปนี้

หุ้น	อัตราส่วนเงินปันผลตอบแทน (%)					
	2545	2546	2547	2548	2549	2550
KKP	5.87	6.42	6.43	7.52	8.19	7.69
KTB	4.58	3.13	5.22	4.27	4.2	5.05
SCB	2.84	4.21	4.53	4.95	5.59	3.68
TCAP	4.3	6.23	6.02	6.13	6.71	5.48
PTT	5.92	3.44	4.61	4.99	4.39	3.78
RATCH	5.52	5.06	4.61	5.88	4.65	4.59
INTUCH	4.58	5.11	6.43	7.52	8.19	7.69
CPF	8.84	5.06	6.08	4.37	9.43	4.13
EGCO	6.72	2.78	2.73	3.7	8.49	3.57
SCC	3.92	4.86	5.67	6.63	6.42	6.88
BANPU	6.33	3.24	2.62	4.2	6.87	1.87
LH	0.88	3.98	9.88	7.02	7.57	4.16
DELTA	11.93	10.57	5.85	6.49	6.89	5.96

ตารางที่ 4.3 ข้อมูลอัตราเงินปันผลระหว่าง พ.ศ. 2545 – 2550

ขั้นตอนต่อไปเราจะนำหุ้นทั้ง 13 บริษัทมาจัดพอร์ตโดยใช้โปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายจากหัวข้อ 3.3

4.2 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

เพื่อความเข้าใจในการทำงานของโปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะจัดพอร์ตการลงทุนจากหุ้น 13 หุ้น ด้วยโปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 5%, 6% และ 7% โดยใช้ข้อมูลอัตราเงินปันผลตอบแทนตั้งแต่ปี 2545 – 2550 จากตารางที่ 4.3

พอร์ตที่ได้จากโปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราเงินปันผล 5%, 6% และ 7% แสดงดังตารางต่อไปนี้

หุ้น	สัดส่วนการลงทุน		
	พอร์ต 1 (5%)	**พอร์ต 2 (6%)**	**พอร์ต 3 (7%)**
BANPU	0	0	0
CPF	0	0	0
DELTA	0.1100	0.2745	0.2843
EGCO	0	0	0
INTUCH	0	0	0
KKP	0	0	0.5558
KTB	0.4037	0.2479	0.0460
PTT	0	0	0
LH	0	0.0807	0.1139
RATCH	0.1569	0	0
SCB	0.2378	0	0
SCC	0.0183	0.3893	0
TCAP	0.0732	0.0076	0
ความเสี่ยง (%)	0.1622	0.0649	0.35

ตารางที่ 4.4 พอร์ตที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายที่ให้อัตราผลตอบแทน 5%, 6% และ 7%

หมายเหตุ: อัตราเงินปันผลเฉลี่ยและความเสี่ยง คือ อัตราเงินปันผลเฉลี่ยและความเสี่ยงของพอร์ต ณ วันที่จัดพอร์ต (31 ธันวาคม 2550) ตามลำดับ

ต่อไปเราจะนำพอร์ตดังตาราง 4.4 ซื้อหุ้น ณ วันที่ 31 ธันวาคม 2550 และเปรียบเทียบอัตราเงินปันผลและส่วนต่างมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาด (Capital Gain) ณ วันที่ 31 ธันวาคม ของแต่ละปี ระหว่าง พ.ศ. 2551 - 2560 โดยข้อมูลราคาปิดและอัตราเงินปันผล แสดงดังตารางต่อไปนี้

หุ้น	ราคาปิด (บาท) ณ วันที่ 31 ธันวาคม										
	2550	2551	2552	2553	2554	2555	2556	2557	2558	2559	2560
KKP	28.25	10.2	25.5	39	32	48.5	37.25	39.5	36.25	59	79.25
KTB	9.5	3.8	9.85	17	14.9	19.6	16.5	22.7	16.7	17.7	19.2
SCB	86.5	48.25	86.75	103.5	116.5	181.5	143.5	182	119.5	152.5	150
TCAP	14.6	7.05	22.1	36	26.75	37.75	32.25	31.75	36.5	44	56.25
PTT	376	175	246	320	318	332	264	324	244	372	440
RATCH	45.74	42.75	36.21	36.25	44	59.75	49	58.75	47.5	50	54.25
INTUCH	26.25	15.6	27.5	29.25	43	69	62.75	78.75	52	49.75	56.25
CPF	4.6	3.18	11.4	24.7	33	33.75	32	27.25	18.3	29.5	24
EGCO	112	68.5	79.21	103.5	96.25	151	122.5	167.5	151.5	199	216
SCC	232	103	235	341	313	440	400	448	460	496	484
BANPU	30.21	17.22	43.51	59.82	41.24	31.12	22.85	18.81	12.08	19.2	19.5
LH	7.5	3.76	6.3	6.45	6.15	9.75	8.95	9.05	9.45	9.8	10.5
DELTA	21.8	12.2	18.6	35	21.7	32	33.5	70.5	76.5	81.5	73.25

ตารางที่ 4.5 ข้อมูลราคาปิดของหุ้น ณ วันที่ 28 – 31 ธันวาคม ตั้งแต่ปี 2551 ถึง 2560

หุ้น	อัตราเงินปันผล (%)ณ วันที่ 31 ธันวาคม									
	2551	2552	2553	2554	2555	2556	2557	2558	2559	2560
KKP	22.49	6.86	4.74	7.11	3.77	5.77	5.44	5.08	5.08	7.57
KTB	7.89	4.47	2.31	3.42	2.53	4.41	3.88	5.39	4.29	4.48
SCB	22.49	6.86	4.74	7.11	3.77	5.77	5.44	5.08	5.08	7.57
TCAP	12.92	4.13	2.64	4.49	3.18	4.6	5.04	4.54	4.09	3.56
PTT	6.54	3.24	2.84	3.21	3.91	4.25	4.32	4.51	2.69	3.64
RATCH	4.61	6.24	5.96	5.11	3.72	4.63	3.86	4.78	4.54	4.33

INTUCH	1.92	8.72	6.21	15.72	7.87	5.58	5.57	8.44	9.31	8.18
CPF	2.82	1.71	2.96	2.98	3.4	3.44	2.02	4.1	2.54	3.56
EGCO	6.89	6.31	6.07	5.45	3.48	4.5	3.73	4.13	3.14	3.01
SCC	12.62	2.34	2.79	4.31	2.61	3.75	2.79	3.15	3.23	3.93
BANPU	6.82	2.99	2.67	5.33	6.75	6.13	6.38	9.93	3.91	2.82
LH	10.64	5.71	4.03	5.69	5.44	4.47	4.41	6.88	7.14	6.67
DELTA	13.11	5.91	4.29	7	3.75	4.49	3.83	3.92	3.8	4.1

ตารางที่ 4.6 ข้อมูลอัตราส่วนเงินปันผลต่อปีของหุ้น ตั้งแต่ปี 2551 ถึง 2560

เมื่อนำพอร์ตในตารางที่ 4.4 ไปลงทุนซื้อหุ้นในปลายปี 2550 จะได้อัตราเงินปันผลและ Capital Gain ตั้งแต่ปี 2551 ถึง 2560 แสดงดังตารางที่ 4.7

ปี	**พอร์ตที่ 1**		**พอร์ตที่ 2**		**พอร์ตที่ 3**	
	อัตราเงินปันผล (%)	**Capital Gain (%)**	**อัตราเงินปันผล (%)**	**Capital Gain (%)**	**อัตราเงินปันผล (%)**	**Capital Gain (%)**
2551	3.74	-45.42	5.46	-53.03	7.35	-56.47
2552	4.10	0.22	3.89	-1.77	5.63	-5.79
2553	4.41	14.86	4.84	15.60	6.18	11.98
2554	5.23	8.24	5.95	6.10	7.24	1.90
2555	7.90	13.96	6.38	12.19	4.79	10.05
2556	6.73	8.44	6.82	8.56	7.15	5.59
2557	9.88	12.04	10.27	12.95	7.45	9.96
2558	8.71	7.67	9.34	10.92	8.96	8.60
2559	8.11	8.09	9.42	10.46	11.37	10.51
2560	8.64	7.22	10.08	9.05	17.20	10.71

ตารางที่ 4.7 แสดงอัตราเงินปันผลและ Capital Gain ของแต่ละพอร์ต ณ วันที่ 31 ธันวาคม ระหว่าง พ.ศ. 2551 - 2560

หมายเหตุ มูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาด (Capital Gain) คำนวณแบบทบต้นต่อปี

จากตารางที่ 4.7 เมื่อเราลงทุนในหุ้นด้วยพอร์ตจากตาราง 4.4 ณ ต้นปี 2551 พบว่าหลังจากเวลาผ่านไป 1 ปี อัตราเงินปันผลทั้ง 3 พอร์ต มากกว่า 3% ทั้งหมด แต่ทว่าในส่วนของมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาดของทั้ง 3 พอร์ต นั้นกลับหายไปกว่า 50% ซึ่งเป็นผลมาจากการตกลงของราคาหุ้นอันเนื่องมาจากความกังวลเกี่ยวกับวิกฤติสินเชื่อด้วยคุณภาพ (subprime mortgage crisis) หรือรู้จักกันโดยทั่วไปในชื่อวิกฤติแฮมเบอร์เกอร์

อย่างไรก็ตาม ณ สิ้นปี 2552 มูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาดของทั้ง 3 พอร์ต เพิ่มขึ้นจากสิ้นปี 2551 เกือบ 50% แต่อัตราเงินปันผลยังคงมีระดับใกล้เคียงปี 2551 และหลังจากนั้นจนถึงปี 2560 จะเห็นได้ว่าอัตราเงินปันผลของทั้ง 3 พอร์ต มากกว่า 8% และมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาจาดของแต่ละพอร์ตเพิ่มขึ้นมากกว่า 100% จากมูลค่าหลักทรัพย์ตามราคาตลาดของทั้ง 3 พอร์ต ณ ต้นปี 2551

เอกสารอ้างอิง

[1] ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. รายชื่อหลักทรัพย์ที่ขายชอร์ตได้. (2563). [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก https://www.set.or.th/th/company/companylist.html. (วันที่ค้นข้อมูล : 20 กุมภาพันธ์ 2563).

[2] ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. รายชื่อบริษัทจดทะเบียนในตลาดหลักทรัพย์. (2563). [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก https://www.set.or.th/th/ company/companylist.html. (วันที่ค้นข้อมูล : 20 กุมภาพันธ์ 2563).

[3] ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. ผลตอบแทนหุ้นไทย 10 ปี เฉลี่ย 11.61% สูงกว่าสินทรัพย์อื่น. (2561). [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก https://www.hoonsmart.com/archives/18399 (วันที่ค้นข้อมูล : 15 มกราคม 2563).

[4] คุณานนต์ ทิศรอด. *การจัดพอร์ตแบบ 10-10-10 (10-10-10 Portfoliomanagement)*. โครงการ “การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์”. 2018.

[5] Dostal Z., OPTIMAL QUADLATIC PROGRAMING ALGORITHM. New York: Springer-Science + Business Media, 2009.

[6] Francis, J. C., Kim, D., *Modern Portfolio Theory*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.

[7] Markowitz H., *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1., 1952, pp. 77-91.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	โปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Program for no short selling efficient portfolio
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี
ผู้ดำเนินการ	นาย ธนกฤต เตชะเทียมจันทร์ เลขประจำตัวนิสิต 5933521323
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หลักการและเหตุผล

ในปัจจุบันนักลงทุนมีทางเลือกในการลงทุนที่หลากหลายไม่ว่าจะเป็นการลงทุนใน ตราสารทุน ตราสารหนี้ หรือแม้แต่กองทุนประเภทต่างๆ ซึ่งสิ่งที่จะใช้ประเมินเบื้องต้นว่าตราสารประเภทต่างๆควรจะลงทุนหรือไม่นั้น คือ ความเสี่ยง และ อัตราผลตอบแทน โดยในทางคณิตศาสตร์เราสามารถใช้ความรู้ทางความน่าจะเป็นและสถิติเบื้องต้นมานิยามความเสี่ยง และอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของการลงทุน ได้ดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1 ให้ R เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุนเราจะเรียก $E(R)$ ว่า **อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง (expected rate of return)** และ $\sqrt{Var(R)}$ ว่า **ความเสี่ยง (risk)** ของการลงทุน

สำหรับการลงทุนใน n สินทรัพย์ โดยมีสัดส่วนการลงทุนในสินทรัพย์ที่ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ต่อการลงทุนทั้งหมด คือ w_i $(w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1)$ เราจะเรียก $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ว่า **พอร์ตการลงทุน (portfolio)** และถ้าให้ R_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม R_p เมื่อ

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_n R_n$$

คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน โดยที่อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของพอร์ตการลงทุน คือ

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \ldots + w_n E(R_n)$$

และความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน คือ $\sqrt{Var(R_p)}$ โดยที่

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j \text{ เมื่อ } \sigma_{ij} \text{ คือ ความแปรปรวนร่วมของ } R_i \text{ และ } R_j$$

อย่างไรก็ตามไม่ว่านักลงทุนจะลงทุนในตราสารหรือกองทุนประเภทใดก็ยังคงมีจุดประสงค์หลักของการลงทุนแบบเดียวกัน คือ ได้รับผลตอบแทนตามที่ต้องการโดยมีความเสี่ยงในการลงทุนต่ำที่สุด ซึ่งสิ่งที่จะช่วยสนองความต้องการนักลงทุนดังกล่าวได้ก็คือ การจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ

ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ (efficient portfolio theory) เป็นทฤษฎีเกี่ยวกับการหาพอร์ตการลงทุนที่ให้ผลตอบแทนตามที่ต้องการซึ่งมีความเสี่ยงต่ำที่สุด โดยเราจะเรียกพอร์ตการลงทุนที่มีคุณสมบัติดังกล่าวว่า **พอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ (efficient portfolio)**

ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพถูกนำเสนอเป็นครั้งแรกในงานวิจัยที่ชื่อว่า "Portfolio Selection" ปี 1952 โดย Harry Markowitz [1] ซึ่งนำเสนอวิธีการหาพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ โดยการพิจารณาจากกราฟความเสี่ยงและกราฟผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ต้องการนำมาจัดพอร์ตการลงทุน แต่ข้อจำกัดของการใช้กราฟ คือ เราสามารถพิจารณาได้เพียง 2 มิติ ส่งผลให้เราสามารถจัดพอร์ตการลงทุนได้ไม่เกิน 3 สินทรัพย์ ซึ่งในเวลาต่อมา ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพได้ถูกขยาย ให้สามารถใช้ได้กับการจัดพอร์ตการลงทุนที่ลงทุนใน n สินทรัพย์ โดยมีทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 (ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ, [2], หน้า 135-138)
ให้ R_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ และ σ_{ij} เป็นความแปรปรวนร่วมของ R_i และ R_j แล้วจะได้ว่า $(w_1, \ldots, w_n)$ จะเป็นพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพที่ให้ผลตอบแทน R ก็ต่อเมื่อ มี w_{n+1}, w_{n+2} ซึ่ง $(w_1, w_2, \ldots, w_{n+2})$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 & E(R_1) \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 & E(R_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 & E(R_n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ -w_{n+1} \\ -w_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ R \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบทข้างต้นมีความเป็นไปได้ที่จะมี $w_i \leq 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ นั่นคือ พอร์ตการลงทุนดังกล่าวอนุญาตให้ **ยืมขาย (short sell)** สินทรัพย์ซึ่งเป็นการยืมสินทรัพย์เพื่อนำมาขายโดยที่ไม่ได้มีสินทรัพย์อยู่ในครอบครอง ณ เวลานั้น แต่ทว่าในปัจจุบันการยืมขายสินทรัพย์นั้นมีกระบวนการที่ยุ่งยากและซับซ้อน ทำให้ไม่เหมาะสมต่อการลงทุนในระยะยาว ดังนั้นจึงมีการพัฒนาทฤษฎีการการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 (ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย)
ให้ R_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ และ σ_{ij} เป็นความแปรปรวนร่วมของ R_i และ R_j แล้วจะได้ว่า สำหรับ $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ จะเป็นพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายสินทรัพย์ $(0 \leq w_i \leq 1$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n)$ ที่ให้ผลตอบแทน R ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง μ_1, μ_2 และ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $\lambda_i w_i = 0$ และ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

2) $$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 & E(R_1) & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 & E(R_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{2n} & \ldots & \sigma_n^2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & E(R_n) & 1 \\ E(R_1) & E(R_2) & \cdots & E(R_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \\ 1 \end{bmatrix}$$

การใช้ทฤษฎีข้างต้นในการหาพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขายนั้น จะเริ่มจากพิจารณาเงื่อนไขที่ 1) ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ $\lambda_i = 0$ และ กรณีที่ $w_i = 0$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วนำเงื่อนไขในแต่ละกรณีไปพิจารณาหา $w_1, w_2, \ldots, w_n, \mu_1, \mu_2$ และ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ในเงื่อนไขข้อที่ 2) ซึ่งเห็นได้ว่าจะต้องแบ่งกรณีทั้งหมด 2^n กรณี จึงทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณเป็นอย่างยิ่ง เมื่อพอร์ตการลงทุนมีหลักทรัพย์เป็นจำนวนมาก ยกตัวอย่างเช่น ถ้าพอร์ตการลงทุนมี 10 สินทรัพย์ จะต้องแบ่งกรณีทั้งหมด $2^{10} = 1024$ กรณี เพื่อที่จะแก้ปัญหาดังกล่าว ในโครงงานนี้เราจะสร้างโปรแกรมในการหา

พอร์ตการลงทุนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อที่ 1) และ 2) เพื่อช่วยคำนวณพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

วัตถุประสงค์

1. พิสูจน์ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
2. เขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

ขอบเขตของโครงงาน

1. พิสูจน์ทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์
2. เขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย สำหรับการลงทุน n สินทรัพย์

วิธีการดำเนินงาน

ก. แผนการศึกษา

	ปี 2562					ปี 2563				
การดำเนินงาน	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1. ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	■									
2. พิสูจน์ทฤษฎีบทการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย		■								
3. เขียนข้อเสนอโครงงาน			■							
4. เขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย				■	■	■	■			
5. ทดสอบโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย								■		
6. จัดทำรูปเล่มโครงงาน									■	■

ข. ระยะเวลาที่ศึกษา : วันที่ 13 สิงหาคม 2562 - วันที่ 20 พฤษภาคม 2563

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ก. ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

1. ได้ประยุกต์ใช้ความรู้ทางด้านแคลคูลัสเกี่ยวกับการหาคำตอบของปัญหาค่าสุดขีดมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
2. ได้นำความรู้ในการเขียนภาษาไพทอนมาใช้ในการเขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
3. ได้เรียนรู้กระบวนการทบทวนงานวิจัยที่มีมาก่อนและทักษะการเขียนโครงงาน

ข. ประโยชน์ที่ได้จากโครงงาน

1. ได้บทพิสูจน์ที่สมบูรณ์ของทฤษฎีบทการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย
2. ได้โปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยไม่มีการยืมขาย

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. โปรแกรม Spyder สำหรับเขียนภาษาไพทอน

งบประมาณ

รายการ	จำนวน	ราคา (บาท)
กระดาษ A4	2	240
ค่าจัดทำรายงาน	4	200
หนังสือและวารสารที่เกี่ยวข้อง	2	4,560
รวม		5,000