โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ	อัตสัณฐานของแผนจานที่ถูกเจาะ Automorphism of Punctured Disc
ชื่อนิสิต	นายพสิษฐ์ เกตุทิม 5933535123
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ สาขาคณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อัตสัณฐานของแผ่นจานที่ถูกเจาะ

นายพสิษฐ์ เกตุทิม

โครงการนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

Automorphism of Punctured Disc

Pasit Kettim

A Project Submitted in Fulfillment of the Requirements
For the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Sciences
Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	อัตสัณฐานของแผ่นจานที่ถูกเจาะ
โดย	พสิษฐ์ เกตุทิม
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	อาจารย์ รศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

ณัฐพันธ์ กิติสิน .... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

พิเชฐ ชาวหา .... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พิเชฐ ชาวหา)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์)

นายพสิษฐ์ เกตุทิม : อัตสัณฐานของแผ่นจานที่ถูกเจาะ (Automorphism of punctured disc)
อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : อาจารย์ รศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน

ในโครงการนี้เรามีความสนใจในอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดถูกลบออกจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

ภาค วิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต พสิษฐ์ เกตุทิม
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก ณัฐพันธ์ กิติสิน
ปีการศึกษา 2562

5933535123: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS ; AUTOMORPHISM / CONFORMAL

PASIT KETTIM: Automorphism of punctured disc.

ADVISOR : NATAPHAN KITISIN

In this project, we are interested in automorphisms of a punctured discs where at most three points are removed from the unit disc.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature พสิษฐ์ เกตุทิม

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature ณัฐพันธ์ กิติสิน

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง “อัตสัณฐานของแผ่นจานที่ถูกเจาะ” สำเร็จไปได้ด้วยดีเพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงใคร่ขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่างๆ ดัง ต่อไปนี้

ขอขอบคุณขอบพระคุณอาจารย์ รศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน ที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษา ชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่างๆ ในการทำโครงงานมาโดยตลอดตั้งแต่เมจนทำให้โครงงานนี้ประสบความสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์ นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำตลอดระยะเวลาที่เข้ามาศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย รวมทั้งเพื่อนๆ ที่คอยให้คำปรึกษาและความช่วยเหลือ

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้ามีความหวังเป็นอย่างยิ่งว่าโครงงานนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้ที่ศึกษาไม่มากก็น้อย และหากมีความผิดพลาดประการใดก็ขออภัยมา ณ ที่นี้

สารบัญ

ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ข

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ประวัติความเป็นมา

การส่งคงแบบเป็นฟังก์ชันที่รักษาค่ามุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นที่ผ่านจุดร่วมกันในโดเมนของฟังก์ชันจากการวิเคราะห์เชิงซ้อน เราทราบว่าถ้า $f: \Omega \to \Omega'$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงแบบ ในกรณีที่ $f: \Omega \to \Omega$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง จะเรียก f เป็นอัตสัณฐานของ Ω ดังนั้นอัตสัณฐานของ Ω จะเป็นฟังก์ชันคงแบบ เป็นที่ทราบกันว่าการส่งอัตตาคงแบบของระนาบเชิงซ้อนจะต้องเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเท่านั้น

นอกจากนี้เราสามารถพิจารณาอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วย โดยการใช้บทแทรกชวาร์ซ ซึ่งจะได้ว่าสำหรับอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยซึ่งระบุ $f(0) = 0$ จะเป็นฟังก์ชันของการหมุนเท่านั้น กล่าวคือ $f(z) \equiv \omega z$ สำหรับค่าคงที่ ω ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย

ในกรณีที่ $f(0) \neq 0$ เราสามารถแสดงว่าฟังก์ชัน f ต้องอยู่ในรูปแบบ $f(z) = \omega\phi_a(z)$ ซึ่งสอดคล้อง $f(0) = b$ และ $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ โดยที่ $|\omega| = 1$ และ $a = b\omega^{-1}$

1.2 วัตถุประสงค์

ศึกษาอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

1.3 ขอบเขตโครงงาน

ในโครงการนี้เรามีความสนใจในอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. การศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้อง

   -ศึกษาบทแทรกชวาร์ซ และ ทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์

   -ศึกษาอัตสัณฐานของระนาบเชิงซ้อนและของแผ่นจานหนึ่งหน่วย

2. โครงการที่เชี่ยวชาญ

-แสดงผลการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน

-นำเสนออัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

3. การดำเนินโครงการ

-ตรวจสอบอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

4. รายงานและพิสูจน์อักษร

5. การนำเสนอโครงการ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจคุณสมบัติของจุดเอกฐานขจัดได้และการส่งคงแบบ
2. อธิบายอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่ถูกเจาะ

บทที่ 2

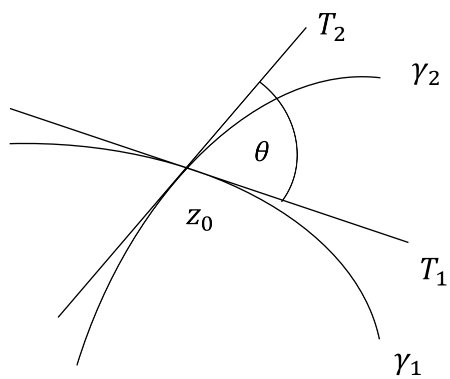
ความรู้เบื้องต้น

2.1 การส่งคงแบบ

การส่งคงแบบ (conformal mapping) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ f ที่คุณสมบัติรักษาค่ามุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นที่ตัดกันในระนาบเชิงซ้อน

นิยามและสมบัติการส่งคงแบบ

กำหนดให้ γ_1และ γ_2 เป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งตัดกันที่จุด z_0 นิยามมุมระหว่างเส้นโค้ง γ_1และ γ_2 เป็นมุมระหว่างเส้นสัมผัส T_1และ T_2 ในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังรูป จะได้ว่ามุมระหว่างเส้นโค้ง γ_1และ γ_2 ที่จุด z_0 เท่ากับ θ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$



2.1.1 รูปมุมระหว่างเส้นโค้ง γ_1และ γ_2ที่ตัดกันที่จุด z_0

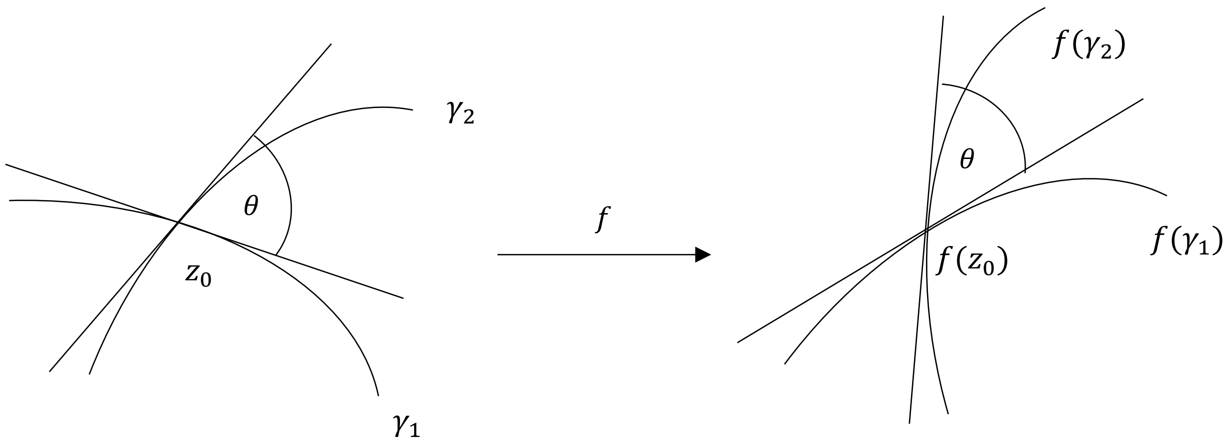
บทนิยาม 2.1.1 กำหนดให้ $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิดและ $f: \Omega \to \mathbb{C}$ และ $z_0 \in \Omega$ เราจะกล่าวว่า f มีสมบัติส่งคงแบบ (conformal) ที่จุด z_0 ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ เส้นโค้งเรียบ γ_1และ γ_2 ใน Ω ซึ่งตัดกันที่จุด z_0 จะได้ว่า

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) = \angle(f(\gamma_1), f(\gamma_2), f(z_0))$$

โดยที่ $f(\gamma_1)$ และ $f(\gamma_2)$ เป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งตัดกันที่จุด $f(z_0)$

เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งคงแบบ (conformal mapping) บน Ω ก็ต่อเมื่อ f เป็นเป็นการส่งคงแบบที่ทุกจุดบน Ω และจะกล่าวว่า f เป็นการส่งอัตตาคงแบบ (conformal self-map) บน Ω ก็ต่อเมื่อ f เป็นการส่งคงแบบจาก Ω ไปยังตัวเอง

จากทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า ถ้า $f: \Omega \to \Omega$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง จะได้ว่า f เป็นการส่งอัตตาคงแบบบน Ω



2.1.2 รูปการส่งมุม θ ผ่านฟังก์ชัน f ซึ่งมีสมบัติการส่งคงแบบที่จุด z_0

2.2 กรุปอัตสัณฐาน

กำหนดให้ $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิด อัตสัณฐาน (automorphism)ของ Ω คือฟังก์ชันวิเคราะห์ $f: \Omega \to \Omega$ ที่มีคุณสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน Ω ซึ่งจากทฤษฎีบทการวิเคราะห์เชิงซ้อนจะได้ว่า อัตสัณฐานบน Ω เป็นการส่งอัตตาคงแบบบน Ω

กรุปอัตสัณฐาน (automorphism group) ของ Ω คือกรุปซึ่งมีสมาชิกเป็นอัตสัณฐานของ Ω ภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Aut(\Omega)$

2.3 ทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์

กำหนดให้ $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิด, $a \in \Omega$ และ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $\Omega \backslash \{a\}$ แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) a เป็นจุดเอกฐานขจัดได้

2) มีฟังก์ชันวิเคราะห์ g บน Ω ซึ่งขยายจาก f

3) มีฟังก์ชันต่อเนื่อง g บน Ω ซึ่งขยายจาก f

4) มีย่าน (neighborhood) ของ a ใน Ω ซึ่ง $|f|$ มีขอบเขต

5) $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$

2.4 หลักค่าโมดูลัสสูงสุด

กำหนดให้ $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ซึ่ง Ω เป็นเซตเปิดและเซตเชื่อมโยง(Connected set) และ $f: \Omega \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ถ้ามี $z_0 \in \mathbb{C}$ ซึ่งทำให้ $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ สำหรับทุก $z \in \Omega$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงตัว

2.5 บทแทรกชวาร์ซ

ให้ D เป็น $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ และ $f: D \to D$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ถ้า $f(0) = 0$ จะได้ว่า

1) $|f(z)| \leq |z|$ สำหรับทุก $z \in D$

2) $|f'(0)| \leq 1$

3) ถ้า $|f(z)| = |z|$ สำหรับบาง $z \neq 0$ จะได้ว่า f เป็นการหมุนกล่าวคือ $f(z) = \omega z$ เมื่อ $|\omega| = 1$

4) ถ้า $|f'(0)| = 1$ จะได้ว่า $f(z) = \omega z$ เมื่อ $|\omega| = 1$

2.6 ฟังก์ชันโมเบียส

ให้ D เป็น $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

นิยาม $\phi_a: D \to D$ โดยที่ $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ เมื่อ $|a| < 1$

เรียกฟังก์ชัน ϕ_a ว่าฟังก์ชันโมเบียส

สมบัติเบื้องต้นของฟังก์ชันโมเบียส

1) ϕ_a เป็นการส่งอัตตาคงแบบของ D

2) $\phi_a(0) = -a$, $\phi_a(a) = 0$ และ $\phi_a^{-1}(z) = \phi_{-a}(z)$ สำหรับทุก $a, z \in D$

3) $\phi_a(\omega z) = \omega \phi_{-a\omega^{-1}}(z)$ เมื่อ $|\omega| = 1$ สำหรับทุก $a, z \in D$

2.7 อัตสัณฐานของ D

บทแทรก 2.7.1 $f: D \to D$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่งสอดคล้อง $f(0) = 0$ จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ D ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเชิงซ้อน ω ซึ่ง $|\omega| = 1$ โดยที่ $f(z) = \omega z$

บทแทรก 2.7.2 $f: D \to D$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ D ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเชิงซ้อน a และ ω ซึ่ง $|\omega| = 1$ และ $|a| < 1$ โดยที่ $f(z) = \omega\phi_a(z)$

บทที่ 3

ขั้นตอนการดำเนินงาน

จากที่เราทราบว่าอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยเกิดจากการหมุนและฟังก์ชันโมเบียสจึงเป็นที่น่าสนใจว่าถ้ามีการลบจุดออกไปจากแผ่นจานแล้วอัตสัณฐานจะเป็นเช่นไร

ในบทนี้เราจะศึกษาอัตสัณฐานของแผ่นจานซึ่งมีจุดถูกลบออกไปเป็นจำนวนไม่เกิน 3 จุด

3.1 อัตสัณฐานของ $D\backslash\{a\}$

ในบทย่อยนี้เราจะศึกษาอัตสัณฐานของแผ่นจานเมื่อมีจุดถูกลบออกไป 1 จุด

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $f: D\backslash\{a\} \to D\backslash\{a\}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a\}$ ก็ต่อเมื่อ $f(z) = (\omega\alpha)\phi_b(z)$ โดยที่ $|\omega| = 1$, $\alpha = \frac{(1-|a|^2\omega^{-1})}{(1-|a|^2\omega)}$ และ $b = -\omega^{-1}\phi_{a\omega}(a)$

พิสูจน์

เลือก $|\omega| = 1$, $\alpha = \frac{(1-|a|^2\omega^{-1})}{(1-|a|^2\omega)}$ และ $b = -\omega^{-1}\phi_{a\omega}(a)$ สังเกตว่า $|\omega\alpha| = 1$ และ $|b| < 1$
พิจารณา $f(z) = (\omega\alpha)\phi_b(z)$
เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ D ส่งผลให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $D\backslash\{a\}$
และจาก f หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D ซึ่ง $f(a) = a$ ทำให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a\}$
ทำให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a\}$
โดยทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a\}$

ต่อไปจะแสดงว่าทุกอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a\}$ อยู่ในรูปฟังก์ชันประกอบข้างต้น
สมมติ f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a\}$
เนื่องจาก f มีขอบเขตบน $D\backslash\{a\}$ จะได้ว่า a เป็นจุดเอกฐานขจัดได้บน $D\backslash\{a\}$
โดยทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์ จะได้ว่ามีฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f
ให้ g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f
เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a\}$
ส่งผลให้ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a\}$

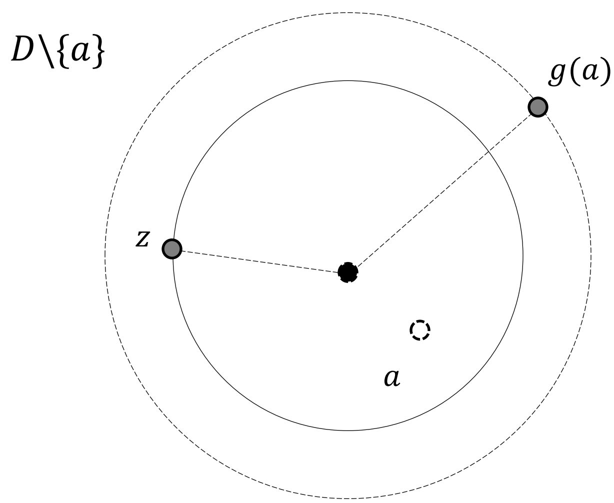
พิจารณาการส่งค่าจุด a ภายใต้ g

สมมติ $g(a) \neq a$ จะได้ว่า $g(a) \notin D$ หรือ $g(a) \in D\backslash\{a\}$ เราจะแสดงว่าไม่สามารถเกิดขึ้นได้ทั้งสองกรณี

กรณีที่ 1 $g(a) \notin D$

จาก $g(a) \notin D$ จะได้ว่าโมดูลัสของ $g(a)$ ให้ค่ามากที่สุดสำหรับทุก $z \in D$

แต่โดยหลักค่าโมดูลัสสูงสุด จึงสรุปได้ว่า g เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว ซึ่งขัดแย้งกับ $g = f$ บน $D\backslash\{a\}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันคงตัว ดังนั้น $g(a) \notin D$



3.1.1 รูปประกอบแสดง $|g(z)| \leq |g(a)|$สำหรับทุก $z \in D$

กรณีที่ 2 $g(a) \in D\backslash\{a\}$

จาก g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f และ $g(a) \in D\backslash\{a\}$

นิยาม $$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ b, & z = a \end{cases}$$ โดยที่ $b \in D\backslash\{a\}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด(Open mapping) และจากสมมติฐาน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a\}$

ดังนั้น f^{-1} นิยามได้และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a\}$

พิจารณา $(f^{-1}\circ g): D \to D\backslash\{a\}$

เนื่องจาก $b \in D\backslash\{a\}$ ส่งผลให้ $f^{-1}(b) \in D\backslash\{a\}$

ดังนั้น $$(f^{-1}\circ g)(z) = \begin{cases} z, \ z \neq a \\ f^{-1}(b), \ z = a \end{cases}$$

สังเกตว่า g ต่อเนื่องที่จุด a และ f ต่อเนื่องที่จุด $b = g(a)$ จะได้ว่า $f^{-1}\circ g$ ต่อเนื่องที่จุด a

จาก $(f^{-1}\circ g)(z) = z$ เมื่อ $z \in D\backslash\{a\}$

ส่งผลให้ $\lim_{z\to a}(f^{-1}\circ g)(z) = \lim_{z\to a} z = a$

แต่จาก $(f^{-1}\circ g)(a) = f^{-1}(b) \in D\backslash\{a\}$ ดังนั้น $f^{-1}(b) \neq a$

เกิดข้อขัดแย้งกับ $f^{-1}\circ g$ ต่อเนื่องที่จุด a ดังนั้น $g(a) = a$

ส่งผลให้ g เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่งขยายจาก f ซึ่ง $g(a) = a$

และ $$g(z) = \begin{cases} f(z), \ z \neq a \\ a, \ z = a \end{cases}$$

พิจารณาการส่ง $\phi_a \circ g \circ \phi_{-a}: D \to D$

จะเห็นได้ว่า $\phi_a \circ g \circ \phi_{-a}$ เป็นอัตสัณฐานของ D และ $(\phi_a \circ g \circ \phi_{-a})(0) = 0$

จากบทแทรก 2.7.1 จะได้ว่า $(\phi_a \circ g \circ \phi_{-a})(z) = \omega z$ เมื่อ $|\omega| = 1$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad g(z) &= \phi_a^{-1}(\omega(\phi_a(z)) \\
&= \phi_{-a}(\omega(\phi_a(z)) \\
&= \omega \cdot \phi_{-a\omega^{-1}}((\phi_a(z)) \\
&= \omega \cdot \frac{\phi_a(z)+a\omega^{-1}}{1+\bar{a}\omega\phi_a(z)} \\
&= \omega \cdot \frac{(z-a)+a\omega^{-1}(1-\bar{a}z)}{(1-\bar{a}z)+\overline{a\omega^{-1}}(z-a)} \\
&= \omega \cdot \frac{(1-|a|^2\omega^{-1})z+(a\omega^{-1}-a)}{(1-|a|^2\omega)+(\overline{a\omega^{-1}-a})z} \\
&= \omega \cdot \frac{(1-|a|^2\omega^{-1})}{(1-|a|^2\omega)} \cdot \frac{z+\phi_a(a\omega^{-1})}{1+\overline{\phi_a(a\omega^{-1})}} \\
&= \omega \cdot \frac{(1-|a|^2\omega^{-1})}{(1-|a|^2\omega)} \cdot \phi_{-\omega^{-1}\phi_{a\omega}(a)}(z)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $f(z) = (\omega\alpha)\cdot\phi_b(z)$ สำหรับทุก z $\in D\backslash\{a\}$ โดยที่ $|\omega| = 1$, $\alpha = \frac{(1-|a|^2\omega^{-1})}{(1-|a|^2\omega)}$
และ $b = -\omega^{-1}\phi_{a\omega}(a)$ ... ■

ตัวอย่าง 3.1.2 พิจารณา $Aut\left(D\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$
ให้ f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$
จากทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้เราทราบว่า

$f(z) = (\omega\alpha)\phi_b(z)$ โดยที่ $|\omega| = 1$, $\alpha = \frac{(4-\omega^{-1})}{(4-\omega)}$ และ $b = -\omega^{-1}\phi_{\omega\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$

จึงสรุปได้ว่า

$$Aut\left(D\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{ f = (\omega\alpha)\phi_b \text{ เมื่อ } |\omega| = 1, \alpha = \frac{(4-\omega^{-1})}{(4-\omega)} \text{ และ } b = -\omega^{-1}\phi_{\frac{\omega}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

เมื่อ $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}}$ จะได้ว่า $\omega = i$

แทนค่า $\omega = i$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า $$f(z) = i\cdot\frac{(4-i^{-1})}{(4-i)}\cdot\phi_{-i^{-1}\phi_{\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)}(z)$$

$$= \frac{(4i-1)}{(4-i)}\cdot\phi_{i\phi_{\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)}(z)$$

จาก $i\phi_{\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = i\left(\frac{2-2i}{4+i}\right) = \frac{10+6i}{17}$ และ $\frac{(4i-1)}{(4-i)} = -\frac{8-15i}{17}$

ดังนั้น $$f(z) = -\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}(z)$$

พิจารณา f^2, f^3 และ f^4

1) $f^2(z) = \left(-\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^2 (z)$

จัดรูป $f^2(z)$ จะได้ว่า

$$f^2(z) = \left(-\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^2 (z)$$

$$= -\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\left(-\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}(z)\right)$$

เนื่องจาก $\left|-\frac{8-15i}{17}\right| = \frac{64+225}{289} = 1$ จะได้ว่า

$$f^2(z) = \left(-\frac{8-15i}{17}\right)^2 \cdot \phi_{-\frac{10+6i}{8-15i}}\left(\phi_{\frac{10+6i}{17}}(z)\right)$$

พิจารณา $\phi_{-\frac{10+6i}{8-15i}}\left(\phi_{\frac{10+6i}{17}}(z)\right)$

ให้ $u = -\frac{10+6i}{8-15i}$ และ $v = \frac{10+6i}{17}$

จัดรูปได้ว่า

$$\phi_u(\phi_v(z)) = \frac{\phi_v(z)-u}{1-\bar{u}\phi_v(z)}$$

$$= \frac{(z-v)-u(1-\bar{v}z)}{(1-\bar{v}z)-\bar{u}(z-v)}$$

$$= \frac{(1+u\bar{v})z-(u+v)}{(1+\bar{u}v)-(\overline{u+v})z}$$

$$= \frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)} \cdot \frac{z-\phi_{-v}(u)}{1-\overline{\phi_{-v}(u)}}$$

$$= \frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)} \cdot \phi_{\phi_{-v}(u)}(z)$$

พิจารณา $\frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)}$ และ $\phi_{-v}(u)$

แทนค่า $u = -\frac{10+6i}{8-15i}$ และ $v = \frac{10+6i}{17}$ จะได้ว่า

$$\frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)} = \frac{1+\left(-\frac{10+6i}{8-15i}\right)\left(\frac{10-6i}{17}\right)}{1+\left(-\frac{10-6i}{8+15i}\right)\left(\frac{10+6i}{17}\right)} = -\left(\frac{8+15i}{8-15i}\right)$$

และ $\phi_{-v}(u) = \phi_{-\frac{10+6i}{17}}\left(-\frac{10+6i}{8-15i}\right) = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $$f^2(z) = \left(-\frac{8-15i}{17}\right)^2 \cdot \left(-\left(\frac{8+15i}{8-15i}\right) \cdot \phi_{\frac{4}{5}}(z)\right)$$

$$= -\frac{(8-15i)(8+15i)}{239} \cdot \phi_{\frac{4}{5}}(z)$$

$$= -\phi_{\frac{4}{5}}(z)$$

2) $f^3(z) = \left(-\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^3 (z)$

จัดรูป $f^3(z)$ จะได้ว่า $$f^3(z) = \left(-\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^3 (z)$$

$$= -\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\left(\left(-\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^2 (z)\right)$$

$$= -\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}(f^2(z))$$

เนื่องจาก $f^2(z) = -\phi_{\frac{4}{5}}(z)$ จะได้ว่า

$$f^3(z) = -\frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{\frac{10+6i}{17}}(-\phi_{\frac{4}{5}}(z))$$

$$= \frac{8-15i}{17} \cdot \phi_{-\frac{10+6i}{17}}(\phi_{\frac{4}{5}}(z))$$

พิจารณา $\phi_{-\frac{10+6i}{17}}(\phi_{\frac{4}{5}}(z))$

ให้ $u = -\frac{10+6i}{17}$ และ $v = \frac{4}{5}$

จากข้อ 1) จะทราบว่า $$\phi_u(\phi_v(z)) = \frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)} \cdot \phi_{\phi_{-v}(u)}(z)$$

พิจารณา $\frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)}$ และ $\phi_{-v}(u)$

แทนค่า $u = -\frac{10+6i}{17}$ และ $v = \frac{4}{5}$ จะได้ว่า

$$\frac{(1+u\bar{v})}{(1+\bar{u}v)} = \frac{1+\left(-\frac{10+6i}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}{1+\left(-\frac{10-6i}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right)} = -\frac{8+15i}{8-15i}$$

และ $\phi_{-v}(u) = \phi_{-\frac{4}{5}}\left(-\frac{10+6i}{17}\right) = \frac{10+6i}{8+15i} = \frac{10-6i}{17}$

ดังนั้น
$$f^3(z) = \frac{8-15i}{17}\cdot\left(-\frac{8+15i}{8-15i}\cdot\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z)\right)$$
$$= -\frac{8+15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z)$$

3) $f^4(z) = \left(-\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^4(z)$

จัดรูป $f^4(z)$ จะได้ว่า
$$f^4(z) = \left(-\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^4(z)$$
$$= -\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}\left(\left(-\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}\right)^3(z)\right)$$
$$= -\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}(f^3(z))$$

เนื่องจาก $f^3(z) = -\frac{8+15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z)$ จะได้ว่า
$$f^4(z) = -\frac{8-15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10+6i}{17}}(-\frac{8+15i}{17}\cdot\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z))$$

เนื่องจาก $\left|-\frac{8+15i}{17}\right| = \frac{64+225}{289} = 1$ จะได้ว่า
$$f^4(z) = \frac{(8-15i)(8+15i)}{239}\cdot\phi_{-\frac{10+6i}{8-15i}}(\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z))$$
$$= \phi_{-\frac{10+6i}{8-15i}}(\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z))$$

จาก $-\frac{10+6i}{8-15i} = -\frac{10-6i}{17}$

ดังนั้น
$$f^4(z) = \phi_{-\frac{10-6i}{17}}(\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z))$$
$$= \phi_0(z)$$

ดังนั้น

$$A = \left\{\phi_0, -\left(\frac{8-15i}{17}\right)\phi_{\frac{10+6i}{17}}, -\phi_{\frac{4}{5}}, -\left(\frac{8+15i}{17}\right)\phi_{\frac{10-6i}{17}}\right\}$$

เป็นกรุปย่อย order 4 ของ $Aut(D\backslash\{\frac{1}{2}\})$ ซึ่งมี $-\left(\frac{8-15i}{17}\right)\phi_{\frac{10+6i}{17}}(z), -\phi_{\frac{4}{5}}(z), -\left(\frac{8+15i}{17}\right)\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z)$ และ $\phi_0(z)$ เป็นสมาชิก โดยที่

1) $\phi_0(z) = z$ เป็นเอกลักษณ์ในกรุป

2) $-\left(\frac{8-15i}{17}\right)\phi_{\frac{10+6i}{17}}(z)$ และ $-\left(\frac{8+15i}{17}\right)\phi_{\frac{10-6i}{17}}(z)$ เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน

3) $-\phi_{\frac{4}{5}}(z)$ เป็นอินเวอร์สของตัวมันเอง ... ■

3.2 อัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2\}$

ในบทย่อยนี้เราจะศึกษาอัตสัณฐานของแผ่นจานเมื่อมีจุดถูกลบออกไป 2 จุด

ทฤษฎีบท 3.2.1 $f: D\backslash\{a_1, a_2\} \to D\backslash\{a_1, a_2\}$ เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2\}$ ก็ต่อเมื่อ

1) $f(z) = z$ หรือ

2) $f(z) = -\phi_b(z)$ เมื่อ $b = -\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2)$ และ $\omega = \dfrac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$

พิสูจน์

เห็นชัดว่าฟังก์ชัน $f(z) = z$ เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2\}$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(z) = -\phi_b(z)$ โดยที่ $b = -\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2)$ และ $\omega = \dfrac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ส่งผลให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $D\backslash\{a_1, a_2\}$

และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D ส่งผลให้ $f(a_1), f(a_2) \in D$

จัดรูปใหม่ $f(z)$ ได้ว่า $f(z) = -\phi_b(z) = -\frac{z-b}{1-\bar{b}z}$

แทนค่า $b = -\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2) = -\phi_{a_1}(a_2\omega^{-1})$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\left(\phi_{(-\phi_{a_1}(a_2\omega^{-1}))}\right)(z) \\
&= -\frac{z+\phi_{a_1}(a_2\omega^{-1})}{1+\overline{\phi_{a_1}(a_2\omega^{-1})}z} \\
&= -\frac{z+\frac{(a_2\omega^{-1}-a_1)}{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}}{1+\frac{\overline{(a_2\omega^{-1}-a_1)}}{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}z} \\
&= -\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}\cdot\frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})z+(a_2\omega^{-1}-a_1)}{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)+\overline{(a_2\omega^{-1}-a_1)}z} \\
&= -\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}\cdot\frac{(z-a_1)+a_2\omega^{-1}(1-\overline{a_1}z)}{(1-\overline{a_1}z)+\overline{a_2\omega^{-1}}(z-a_1)} \\
&= -\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}\cdot\frac{\phi_{a_1}(z)+a_2\omega^{-1}}{1+\overline{a_2}\omega\phi_{a_1}(z)} \\
&= -\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}\cdot\phi_{-a_2\omega^{-1}}\left((\phi_{a_1}(z)\right)
\end{aligned}
$$

พิจารณา $\omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$

จะได้ว่า $\omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)} = \frac{(a_1 - a_2)(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)(a_2-a_1)} = -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)}$

แทนค่า $\omega = -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)}$ ลงใน $-\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\bar{a}_1 a_2\omega^{-1})}$ จะได้ว่า

$$-\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\overline{a_1}a_2\omega^{-1})} = -\frac{\left(1-\overline{a_2}a_1\left(-\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)}\right)\right)}{\left(1-\overline{a_1}a_2\left(-\frac{(1-\overline{a_2}a_1)}{(1-\overline{a_1}a_2)}\right)\right)}$$

$$= -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)\left((1-\overline{a_2}a_1)+\overline{a_2}a_1(1-\overline{a_1}a_2)\right)}{(1-\overline{a_2}a_1)\left((1-\overline{a_1}a_2)+\overline{a_1}a_2(1-\overline{a_2}a_1)\right)}$$

$$= -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)(1-\overline{a_2}a_1+\overline{a_2}a_1-|a_1a_2|^2)}{(1-\overline{a_2}a_1)(1-\overline{a_1}a_2+\overline{a_1}a_2-|a_1a_2|^2)}$$

$$= -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)(1-|a_1a_2|^2)}{(1-\overline{a_2}a_1)(1-|a_1a_2|^2)}$$

$$= -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)} = \omega$$

แทนค่า $-\frac{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)}{(1-\overline{a_1}a_2\omega^{-1})} = \omega$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$f(z) = \omega \cdot \phi_{-a_2\omega^{-1}}\left((\phi_{a_1}(z)\right)$$

$$\therefore \qquad f(z) = \phi_{a_{-2}}(\omega\phi_{a_1}(z))$$

แทนค่า $z = a_1$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$f(a_1) = \phi_{a_{-2}}(\omega\phi_{a_1}(a_1))$$

$$= \phi_{a_{-2}}(0)$$

$$= a_2$$

แทนค่า $z = a_2$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$f(a_2) = \phi_{a_{-2}}(\omega\phi_{a_1}(a_2))$$

เนื่องจาก $\omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} f(a_2) &= \phi_{a_{-2}}(\frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)} \cdot \phi_{a_1}(a_2)) \\ &= \phi_{a_{-2}}(\phi_{a_2}(a_1)) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D และ $f(a_1) = a_2$ และ $f(a_2) = a_1$
ทำให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a_1, a_2\}$
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a_1, a_2\}$
โดยทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2\}$

ต่อไปจะแสดงว่าทุกอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2\}$ จะอยู่ในรูปแบบดังกล่าว
สมมติ f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2\}$
เนื่องจาก f มีขอบเขตบน $D\backslash\{a_1, a_2\}$ จะได้ว่า $z = a_1, a_2$ เป็นจุดเอกฐานขจัดได้
นิยาม g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f
ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.1.1 เราจะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f
และ $g(a_1),\ g(a_2) \in D$ โดยหลักค่าโมดูลัสสูงสุดและทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์

ต่อไปจะแสดงว่าเป็นไปไม่ได้ที่ $g(a_1),\ g(a_2) \in D\backslash\{a_1, a_2\}$
สมมติ $g(a_1),\ g(a_2) \in D\backslash\{a_1, a_2\}$
จาก g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f และ $g(a_1),\ g(a_2) \in D\backslash\{a_1, a_2\}$

นิยาม $g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D\backslash\{a_1, a_2\} \\ b_i, & z \in \{a_1, a_2\} \end{cases}$ โดยที่ $b_i \in D\backslash\{a_1, a_2\}$ สำหรับ $i = 1, 2$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด(Open mapping) และจากสมมติฐาน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a_1, a_2\}$
ดังนั้น f^{-1} นิยามได้และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{a_1, a_2\}$

พิจารณา $(f^{-1} \circ g): D \to D\backslash\{a_1, a_2\}$

เนื่องจาก $b_i \in D\backslash\{a_1, a_2\}$ ส่งผลให้ $f^{-1}(b_i) \in D\backslash\{a_1, a_2\}$ สำหรับ $i = 1, 2$

ดังนั้น $$(f^{-1} \circ g)(z) = \begin{cases} z, & z \in D\backslash\{a_1, a_2\} \\ f^{-1}(b_i), & z \in \{a_1, a_2\} \end{cases}$$ สำหรับ $i = 1, 2$

สังเกตว่า g ต่อเนื่องที่จุด a_i และ f ต่อเนื่องที่จุด $b_i = g(a_i)$ จะได้ว่า $f^{-1} \circ g$ ต่อเนื่องที่จุด a_i
และจาก $(f^{-1} \circ g)(z) = z$ เมื่อ $z \in D\backslash\{a_1, a_2\}$ ส่งผลให้ $\lim_{z \to a_i}(f^{-1} \circ g)(z) = \lim_{z \to a_i} z = a_i$
แต่จาก $(f^{-1} \circ g)(a_i) = f^{-1}(b_i) \in D\backslash\{a_1, a_2\}$ ดังนั้น $f^{-1}(b_i) \neq a_i$ สำหรับ $i = 1, 2$
เกิดข้อขัดแย้งกับ $f^{-1} \circ g$ ต่อเนื่องที่จุด a_1 และ a_2 ดังนั้น $g(a_1),\ g(a_2) \in \{a_1, a_2\}$
ส่งผลให้ g เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่งขยายจาก f ซึ่ง $g(a_1),\ g(a_2) \in \{a_1, a_2\}$

ดังนั้น $$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D\backslash\{a_1, a_2\} \\ b_i, & z \in \{a_1, a_2\} \end{cases}$$ โดยที่ $b_i \in \{a_1, a_2\}$ สำหรับ $i = 1, 2$

พิจารณาการส่งค่าจุด a_1 และ a_2 ภายใต้ g

กรณีที่ 1 $g(a_1) = a_1$ และ $g(a_2) = a_2$

พิจารณาการส่ง $\phi_{a_1} \circ g \circ \phi_{-a_1}: D \to D$

จะเห็นได้ว่า $\phi_{a_1} \circ g \circ \phi_{-a_1}$ เป็นอัตสัณฐานของ D และ $(\phi_{a_1} \circ g \circ \phi_{-a_1})(0) = 0$
จากบทแทรก 2.7.1 จะได้ว่า

$$(\phi_{a_1} \circ g \circ \phi_{-a_1})(z) = \omega z \qquad \text{เมื่อ } |\omega| = 1$$

แทนค่า z ด้วย $(\phi_{a_1} \circ g \circ \phi_{-a_1})(z)$ ลงใน $\phi_{-a_1}(z)$ จะได้ว่า

$$(g \circ \phi_{-a_1})(z) = \phi_{-a_1}(\omega z)$$

แทนค่า $\phi_{a_1}(z)$ ลงใน $(g \circ \phi_{-a_1})(z)$ จะได้ว่า

$$g(z) = \phi_{a_{-1}}(\omega \phi_{a_1}(z))$$

แทนค่า $g(a_2) = a_2$ จะได้ว่า $a_2 = \phi_{a_{-1}}(\omega \phi_{a_1}(a_2))$

$$\phi_{a_1}(a_2) = \omega \phi_{a_1}(a_2)$$

ดังนั้น $g(z) = z$ เมื่อ $g(a_1) = a_1$ และ $g(a_2) = a_2$

กรณีที่ 2 $g(a_1) = a_2$ และ $g(a_2) = a_1$

พิจารณาการส่ง $\phi_{a_2} \circ g \circ \phi_{-a_1}: D \to D$

จะเห็นได้ว่า $\phi_{a_2} \circ g \circ \phi_{-a_1}$ เป็นอัตสัณฐานของ D และ $(\phi_{a_2} \circ g \circ \phi_{-a_1})(0) = 0$

จากบทแทรก 2.7.1 จะได้ว่า

$$(\phi_{a_2} \circ g \circ \phi_{-a_1})(z) = \omega z \qquad \text{เมื่อ } |\omega| = 1$$

แทนค่า $(\phi_{a_2} \circ g \circ \phi_{-a_1})(z)$ ลงใน $\phi_{-a_1}(z)$ จะได้ว่า

$$(g \circ \phi_{-a_1})(z) = \phi_{-a_2}(\omega z)$$

แทนค่า $\phi_{a_2}(z)$ ลงใน $(g \circ \phi_{-a_1})(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g(z) &= \phi_{a_{-2}}(\omega \phi_{a_1}(z)) \\ &= \omega \cdot \phi_{-a_2\omega^{-1}}\big((\phi_{a_1}(z)\big) \\ &= \omega \cdot \frac{\phi_{a_1}(z)+a_2\omega^{-1}}{1+\overline{a_2}\omega\phi_{a_1}(z)} \\ &= \omega \cdot \frac{(z-a_1)+a_2\omega^{-1}(1-\overline{a_1}z)}{(1-\overline{a_1}z)+\overline{a_2\omega^{-1}}(z-a_1)} \\ &= \omega \cdot \frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})z+(a_2\omega^{-1}-a_1)}{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)+\left(\overline{a_2\omega^{-1}-a_1}\right)z} \\ &= \omega \cdot \frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)} \cdot \frac{z+\phi_{a_1}(a_2\omega^{-1})}{1+\overline{\overline{\phi_{a_1}(a_2\omega^{-1})}}} \\ &= \omega \cdot \frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}{\left(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1\right)} \cdot \left(\phi_{(-\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2))}\right)(z) \end{aligned}$$

แทนค่า $g(a_2) = a_1$ จะได้ว่า $\phi_{a_2}(a_1) = \omega\phi_{a_1}(a_2)$ $\quad \therefore \quad \omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$

พิจารณา $\omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$

จะได้ว่า $\omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)} = \frac{(a_1-a_2)(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)(a_2-a_1)} = -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)}$

แทนค่า $\omega = -\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)}$ ลงใน $\frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}{(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1)}$ จะได้ว่า

$$\frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}{(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1)} = \frac{\left(1-\overline{a_1}a_2\left(-\frac{(1-\overline{a_2}a_1)}{(1-\overline{a_1}a_2)}\right)\right)}{\left(1-\overline{a_2}a_1\left(-\frac{(1-\overline{a_1}a_2)}{(1-\overline{a_2}a_1)}\right)\right)}$$

$$= \frac{(1-\overline{a_2}a_1)\big((1-\overline{a_1}a_2)+\overline{a_1}a_2(1-\overline{a_2}a_1)\big)}{(1-\overline{a_1}a_2)\big((1-\overline{a_2}a_1)+\overline{a_2}a_1(1-\overline{a_1}a_2)\big)}$$

$$= \frac{(1-\overline{a_2}a_1)(1-\overline{a_1}a_2+\overline{a_1}a_2-|a_1a_2|^2)}{(1-\overline{a_1}a_2)(1-\overline{a_2}a_1+\overline{a_2}a_1-|a_1a_2|^2)}$$

$$= \frac{(1-\overline{a_2}a_1)(1-|a_1a_2|^2)}{(1-\overline{a_1}a_2)(1-|a_1a_2|^2)}$$

$$= \frac{(1-\overline{a_2}a_1)}{(1-\overline{a_1}a_2)} = -\omega^{-1}$$

แทนค่า $\frac{(1-\bar{a}_1a_2\omega^{-1})}{(1-\overline{a_2\omega^{-1}}a_1)} == -\omega^{-1}$ ลงใน $g(z)$ จะได้ว่า

$$g(z) = \omega\cdot(-\omega^{-1})\cdot\left(\phi_{(-\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2))}\right)(z)$$

$$\therefore \quad g(z) = -\left(\phi_{(-\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2))}\right)(z)$$

ดังนั้น $f(z) = -\phi_b(z)$ โดยที่ $b = -\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2)$ และ $\omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$ … ■

สังเกตว่า $(-\phi_b)^2(z) = -\phi_b\big(-\phi_b(z)\big) = \phi_{-b}\big(\phi_b(z)\big) = \phi_0(z)$

จึงสรุปได้ว่า

$$Aut(D\backslash\{a_1,a_2\}) = \{\phi_0, -\phi_b\} \qquad \text{โดยที่ } b = -\omega^{-1}\phi_{a_1\omega}(a_2) \text{ และ } \omega = \frac{\phi_{a_2}(a_1)}{\phi_{a_1}(a_2)}$$

ดังนั้น $Aut(D\backslash\{a_1,a_2\})$ เป็นกรุปซึ่งมีสมาชิกเพียง 2 ตัว ได้แก่ $\phi_0(z) = z$ ซึ่งเป็นเอกลักษณ์ในกรุป และ $-\phi_b(z)$ ซึ่งมีสมบัติ อินเวอร์สของตัวมันเอง

ตัวอย่าง 3.2.2 พิจารณา $Aut\left(D\setminus\left\{\frac{1}{2},\frac{i}{3}\right\}\right)$

ให้ g เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่งขยายจาก f และ $g\left(\frac{1}{2}\right), g\left(\frac{i}{3}\right) \in \left\{\frac{1}{2},\frac{i}{3}\right\}$

ถ้า $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ และ $g\left(\frac{i}{3}\right) = \frac{i}{3}$ จะได้ว่า $f(z) = z$ สำหรับทุก $z \in D\setminus\left\{\frac{1}{2},\frac{i}{3}\right\}$

ถ้า $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{3}$ และ $g\left(\frac{i}{3}\right) = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\phi_{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{3}\right) = \frac{2i-3}{6-i}$ และ $\phi_{\frac{i}{3}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3-2i}{6+i}$

ดังนั้น $\omega = \frac{\phi_{\frac{i}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)}{\phi_{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{3}\right)} = -\frac{6-i}{6+i}$, $\alpha = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{3}\omega^{-1}\right)}{\left(1+\frac{i}{3}\cdot\frac{1}{2}\omega\right)} = \frac{6+i}{6-i}$ และ $b = -\omega^{-1}\phi_{\frac{1}{2}\cdot\omega}\left(\frac{i}{3}\right) = \frac{16+9i}{35}$

$\therefore \quad g(z) = \omega\alpha\phi_b(Z) = -\phi_{\frac{16-9i}{35}}(z)$ สำหรับทุก $z \in D$

แทนค่า $z = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\phi_{\frac{16+9i}{35}}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{16+9i}{35}}{1-\frac{16-9i}{35}\cdot\frac{1}{2}}\right)$$
$$= -\left(\frac{35-32-18i}{70-16+9i}\right)$$
$$= -\left(\frac{3-18i}{54+9i}\right) = -\frac{i}{3}\left(\frac{-i-6}{6+i}\right) = \frac{i}{3}$$

แทนค่า $z = \frac{i}{3}$ จะได้ว่า

$$g\left(\frac{i}{3}\right) = -\phi_{\frac{16+9i}{35}}\left(\frac{i}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{\frac{i}{3}-\frac{16+9i}{35}}{1-\frac{16-9i}{35}\cdot\frac{i}{3}}\right)$$
$$= -\left(\frac{35i-48-27i}{105-16i-9}\right)$$
$$= -\left(\frac{-48+8i}{96-16i}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{-6+i}{6-i}\right) = \frac{1}{2}$$

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ทำให้สรุปได้ว่า

$$Aut\left(D\backslash\left\{\frac{1}{2},\frac{i}{3}\right\}\right)=\left\{\phi_0,-\phi_{\frac{16+9i}{35}}\right\}$$

เป็นกรุปซึ่งมีสมาชิกเพียง 2 ตัว ได้แก่ $\phi_0(z)=z$ ซึ่งเป็นเอกลักษณ์ในกรุป และ $-\phi_{\frac{16+9i}{35}}(z)$ ซึ่งมีสมบัติอินเวอร์สของตัวมันเอง ... ■

3.3 อัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$

ในบทย่อยนี้เราจะศึกษาอัตสัณฐานของแผ่นจานเมื่อมีจุดถูกลบออกไป 3 จุด

ก่อนที่จะพิจารณาอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ เราจะพิจารณาอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

บทแทรก 3.3.1 ให้ g เป็นอัตสัณฐานของ D ถ้า $g(a) = a$ และ $g(b) = b$ แล้ว $g(z) = z$

พิสูจน์

สมมติ $g(a) = a$ และ $g(b) = b$

จาก $\phi_a \circ g \circ \phi_{-a}$ เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่ง $(\phi_a \circ g \circ \phi_{-a})(0) = 0$

จะได้ว่า $(\phi_a \circ g \circ \phi_{-a})(z) = \omega z$ โดยที่ $|\omega| = 1$

แทนค่า $z = \phi_a(b)$ จะได้ว่า $(\phi_a \circ g \circ \phi_{-a})(\phi_a(b)) = \omega\phi_a(b)$

$\therefore$ $(\phi_a \circ g)(b) = \omega\phi_a(b)$

เนื่องจาก $g(b) = b$ จะได้ว่า $\phi_a(b) = \omega\phi_a(b)$ $\therefore$ $\omega = 1$

จึงสรุปได้ว่า $g(z) = z$ เมื่อ $g(a) = a$ และ $g(b) = b$ … ■

ทฤษฎีบท 3.3.2 $f: D\backslash\{0, a_1, a_2\} \to D\backslash\{0, a_1, a_2\}$ เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$ ก็ต่อเมื่อ

1) $f(z) = z$ หรือ

2) $f(z) = -z$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $a_2 = -a_1$ หรือ

3) $f(z) = -\phi_{a_1}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $a_1 = \phi_{-a_2}(a_2)$ หรือ

4) $f(z) = e^{i(\pi-\theta)}\,\phi_{a_2}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ หรือ

5) $f(z) = e^{i(\pi+\theta)}\,\phi_{a_1}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

สังเกตว่า กรณีที่ 3) เป็นกรณีเดียวซึ่ง $|a_1| \neq |a_2|$

พิสูจน์

เห็นได้ชัดว่า $f(z) = z$ และถ้า $a_2 = -a_1$ จะได้ว่า $f(z) = -z$ เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(z) = -\phi_{a_1}(z)$ โดยที่ $a_1 = \phi_{-a_2}(a_2)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ส่งผลให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D ส่งผลให้ $f(0), f(a_1), f(a_2) \in D$

แทนค่า $z = 0$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(0) &= -\phi_{a_1}(0) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

แทนค่า $z = a_1$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(a_1) &= -\phi_{a_1}(a_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่า $z = a_2$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$f(a_2) = -\phi_{a_1}(a_2)$$

เนื่องจาก $a_1 = \phi_{-a_2}(a_2)$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} f(a_2) &= -\phi_{\phi_{-a_2}(a_2)}(a_2) \\ &= -\left(\frac{a_2 - \phi_{-a_2}(a_2)}{1 - \overline{\phi_{-a_2}(a_2)} \cdot a_2}\right) \\ &= -\left(\frac{a_2(1+|a_2|^2) - 2a_2}{(1+|a_2|^2) - 2\overline{a_2} \cdot a_2}\right) \\ &= a_2\left(\frac{1-|a_2|^2}{1-|a_2|^2}\right) \\ &= a_2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D และจาก $f(0) = a_1$, $f(a_1) = 0$ และ $f(a_2) = a_2$

ทำให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

จาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

โดยทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(z) = e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{a_2}(z)$ โดยที่ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ เมื่อ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ส่งผลให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D ส่งผลให้ $f(0), f(a_1), f(a_2) \in D$

แทนค่า $z = 0$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{a_2}(0) \\ &= -a_2\ e^{i(\pi-\theta)} \\ &= a_2\ e^{-i\theta} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ จึงได้ว่า $f(0) = a_1$

แทนค่า $z = a_1$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(a_1) &= e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{a_2}(a_1) \\ &= e^{i(\pi-\theta)}\ \frac{a_1 - a_2}{1 - \overline{a_2}a_1} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} f(a_1) &= e^{i(\pi-\theta)}\ \frac{a_1 - a_1 e^{i\theta}}{1 - \overline{a_1 e^{i\theta}}a_1} \\ &= a_1\ e^{i(\pi-\theta)}\ \frac{1 - e^{i\theta}}{1 - |a_1|^2 e^{-i\theta}} \end{aligned}$$

จาก $|a_1| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ จะสังเกตได้ว่า $|a_1| = \sqrt{e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1}$

$$\therefore \quad \begin{aligned} f(a_1) &= a_1\ e^{i(\pi-\theta)}\ \frac{1 - e^{i\theta}}{1 - \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1\right)e^{-i\theta}} \\ &= a_1\ e^{i(\pi-\theta)}\ \frac{1 - e^{i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{-2i\theta}} \\ &= a_1\ e^{i(\pi-\theta)}\ e^{i(2\theta-\pi)}\ \frac{1 - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= a_1\ e^{i\theta} = a_2 \end{aligned}$$

แทนค่า $z = a_2$ ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า

$$f(0) = e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{a_2}(0)$$
$$= -a_2\ e^{i(\pi-\theta)}$$
$$= a_2\ e^{-i\theta}$$

เนื่องจาก $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ จึงได้ว่า $f(0) = a_1$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D และจาก $f(0) = a_1$, $f(a_1) = a_2$ และ $f(a_2) = 0$

ทำให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

จาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

โดยทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(z) = e^{i(\pi+\theta)}\ \phi_{a_1}(z)$ โดยที่ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$

เมื่อ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชัน $f(z) = e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{a_2}(z)$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

และ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D ซึ่ง $f(0) = a_2$, $f(a_2) = a_1$ และ $f(a_1) = 0$

โดยทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

ต่อไปจะแสดงว่าอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$ ทั้งหมดอยู่ในรูปแบบข้างต้น

ให้ f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

โดยหลักค่าโมดูลัสสูงสุดและทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์ ทำให้เราทราบว่ามี g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f ซึ่ง $g(0), g(a_1), g(a_2) \in D$

ต่อไปจะแสดงว่าเป็นไปไม่ได้ที่ $g(0), g(a_1), g(a_2) \in D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

สมมติ $g(0), g(a_1), g(a_2) \in D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

จาก g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f และ $g(0), g(a_1), g(a_2) \in D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

นิยาม $$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D\backslash\{0, a_1, a_2\} \\ b_i, & z \in \{0, a_1, a_2\} \end{cases}$$ โดยที่ $b_i \in D\backslash\{0, a_1, a_2\}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด(Open mapping) และจากสมมติฐาน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$

ดังนั้น f^{-1} นิยามได้และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน $D\setminus\{0,a_1,a_2\}$

พิจารณา $(f^{-1}\circ g): D \to D\setminus\{0,a_1,a_2\}$

เนื่องจาก $b_i \in D\setminus\{0,a_1,a_2\}$ ส่งผลให้ $f^{-1}(b_i) \in D\setminus\{0,a_1,a_2\}$ สำหรับ $i = 1,2,3$

ดังนั้น $$(f^{-1}\circ g)(z) = \begin{cases} z, & z \in D\setminus\{0,a_1,a_2\} \\ f^{-1}(b_i), & z \in \{0,a_1,a_2\} \end{cases}$$

โดยที่ $g(a_i) = b_i \in D\setminus\{0,a_1,a_2\}$ สำหรับ $i = 1,2,3$

สังเกตว่า g ต่อเนื่องที่จุด a_i และ f ต่อเนื่องที่จุด $b_i = g(a_i)$ จะได้ว่า $f^{-1}\circ g$ ต่อเนื่องที่จุด a_i

และจาก $(f^{-1}\circ g)(z) = z$ เมื่อ $z \in D\setminus\{0,a_1,a_2\}$ ส่งผลให้ $\lim\limits_{z\to a_i}(f^{-1}\circ g)(z) = \lim\limits_{z\to a_i} z = a_i$

แต่จาก $(f^{-1}\circ g)(a_i) = f^{-1}(b_i) \in D\setminus\{0,a_1,a_2\}$ ดังนั้น $f^{-1}(b_i) \neq a_i$ สำหรับ $i = 1,2,3$

เกิดข้อขัดแย้งกับ $f^{-1}\circ g$ ต่อเนื่องที่จุด $0, a_1$ และ a_2 ดังนั้น $g(0), g(a_1), g(a_2) \in \{0,a_1,a_2\}$

ส่งผลให้ g เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่งขยายจาก f ซึ่ง $g(0), g(a_1), g(a_2) \in \{0,a_1,a_2\}$

ดังนั้น $$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D\setminus\{0,a_1,a_2\} \\ b_i, & z \in \{0,a_1,a_2\} \end{cases}$$ โดยที่ $b_i \in \{0,a_1,a_2\}$ สำหรับ $i = 1,2,3$

พิจารณาการส่งค่าจุด $0, a_1$ และ a_2 ภายใต้ g

กรณีที่ 1 $g(0) = 0$,

จากบทแทรก 2.7.1 จะได้ว่า $g(z) = \omega z$ โดยที่ $|\omega| = 1$

เนื่องจาก $g(0) = 0$ และ $g(a_1), g(a_2) \in \{0,a_1,a_2\}$ จะได้ว่า $g(a_1) = a_1$ หรือ $g(a_2) = a_1$

พิจารณากรณี $g(a_1) = a_1$

จะได้ว่า $g(0) = 0,\ g(a_1) = a_1$ และ $g(a_2) = a_2$

โดยบทแทรก 3.3.1 ทำให้ได้ว่า $g(z) = z$

พิจารณากรณี $g(a_2) = a_1$

จะได้ว่า $g(0) = 0,\ g(a_2) = a_1$ และ $g(a_1) = a_2$

แทนค่า $g(a_2) = a_1$ ลงใน $g(z) = \omega z$ จะได้ว่า $a_1 = \omega a_2 \quad \cdots(1)$

แทนค่า $g(a_1) = a_2$ ลงใน $g(z) = \omega z$ จะได้ว่า $a_2 = \omega a_1 \quad \cdots(2)$

เนื่องจาก $a_1, a_2 \neq 0$ แก้สมการได้ว่า $\omega = 1$ หรือ -1 แต่เนื่องจาก $a_1 \neq a_2$ ส่งผลให้ $\omega = -1$

ดังนั้น $g(z) = -z$

กรณีที่ 2 $g(0) \neq 0$, โดยไม่เสียนัย ให้ $g(0) = a_1$

พิจารณาการส่ง $\phi_{a_1} \circ g: D \to D$

จะเห็นได้ว่า $\phi_{a_1} \circ g$ เป็นอัตสัณฐานของ D และ $(\phi_{a_1} \circ g)(0) = 0$

จากบทแทรก 2.7.1 จะได้ว่า $(\phi_{a_1} \circ g)(z) = \omega z$ เมื่อ $|\omega| = 1$

แทนค่า z ด้วย $(\phi_{a_1} \circ g)(z)$ ลงใน $\phi_{-a_1}(z)$ จะได้ว่า $g(z) = \phi_{-a_1}(\omega z)$

เนื่องจาก $g(0) = a_1$ และ $g(a_1), g(a_2) \in \{0, a_1, a_2\}$ จะได้ว่า $g(a_1) = 0$ หรือ $g(a_2) = 0$

พิจารณากรณี $g(a_1) = 0$

จากที่เราทราบว่า $g(z) = \phi_{-a_1}(\omega z)$ จะได้ว่า $0 = \phi_{-a_1}(\omega a_1)$

แทนค่า 0 ลงใน $\phi_{a_1}(z)$ จะได้ว่า

$$\phi_{a_1}(a_1) = \phi_{a_1}(\phi_{-a_1}(\omega a_1))$$

$$-a_1 = \omega a_1$$

$$\therefore \quad \omega = -1$$

ดังนั้น $g(z) = \phi_{-a_1}(-z) = -\phi_{a_1}(z)$

ในขั้นต่อไปจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง a_1 และ a_2

พิจารณา $g(a_2) = a_2$

จากบทพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า

$$g(z) = (\widetilde{\omega}\alpha)\phi_b(z) \text{ โดยที่ } |\widetilde{\omega}| = 1 \ \alpha = \frac{(1-|a_2|^2\widetilde{\omega}^{-1})}{(1-|a_2|^2\widetilde{\omega})} \ b = -\widetilde{\omega}^{-1}\phi_{a_2\widetilde{\omega}}(a_2)$$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง จะได้สมการ 2 สมการ ได้แก่

$$-1 = \widetilde{\omega}\,\frac{(1-|a_2|^2\widetilde{\omega}^{-1})}{(1-|a_2|^2\widetilde{\omega})} \qquad \cdots(1)$$

$$a_1 = -\widetilde{\omega}^{-1}\phi_{a_2\widetilde{\omega}}(a_2) \qquad \cdots(2)$$

แก้สมการที่ (1) จะได้ว่า

$$-(1-|a_2|^2\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}(1-|a_2|^2\widetilde{\omega}^{-1})$$

$$|a_2|^2\widetilde{\omega} - 1 = \widetilde{\omega} - |a_2|^2$$

$$(1-|a_2|^2)\widetilde{\omega} = -(1-|a_2|^2)$$

$$\therefore \quad \widetilde{\omega} = -1$$

แทนค่า $\widetilde{\omega} = -1$ ลงในสมการที่ (2) จะได้ว่า $a_1 = \phi_{-a_2}(a_2)$

ดังนั้น $g(z) = -\phi_{a_1}(z)$ โดยที่ $a_1 = \phi_{-a_2}(a_2)$

ต่อไปจะพิจารณากรณีซึ่ง $0, a_1, a_2$ ไม่มีตัวใดคงที่ภายใต้ g

กรณี $g(a_2) = 0$ จะได้ว่า $g(0) = a_1, g(a_1) = a_2$ และ $g(a_2) = 0$

พิจารณา $g(z) = \phi_{-a_1}(\omega z)$

แทนค่า $g(a_2) = 0$ จะได้ว่า $0 = \phi_{-a_1}(\omega a_2)$

แทนค่า $z = 0$ ลงใน $\phi_{a_1}(z)$ จะได้ว่า

$$\phi_{a_1}(0) = \omega a_2$$

$$-a_1 = \omega a_2$$

$$\therefore \qquad \omega = -\frac{a_1}{a_2}$$

สังเกตว่า $|a_1| = |a_2|$

เนื่องจาก $a_1 \neq a_2$ จะได้ว่า $\omega \neq -1$

พิจารณา $\omega = 1$

จาก $g(z) = \phi_{-a_1}(\omega z)$

แทนค่า $\omega = 1$ จะได้ว่า $g(z) = \phi_{-a_1}(z)$

แทนค่า $g(a_1) = a_2$ จะได้ว่า

$$a_2 = \phi_{-a_1}(a_1) = \frac{2a_1}{1+|a_1|^2}$$

แทนค่า $a_2 = \dfrac{2a_1}{1+|a_1|^2}$ ลงใน $g(z)$ จะได้ว่า

$$g(a_2) = \phi_{-a_1}(a_2) = \phi_{-a_1}\left(\frac{2a_1}{1+|a_1|^2}\right)$$

แต่เนื่องจาก $-a_1 \neq \dfrac{2a_1}{1+|a_1|^2}$ ส่งผลให้ $g(a_2) \neq 0$ เกิดข้อขัดแย้ง $\therefore\ \omega \neq 1$

จาก $\omega \neq -1$ และ $\omega \neq 1$ ทำให้สามารถเขียน ω อยู่ในรูป $\omega = e^{i(\pi-\theta)}$ โดยที่ $\theta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$

ส่งผลให้ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$

จาก $g(z) = \phi_{-a_1}(\omega z) = \omega \phi_{-a_1 \omega^{-1}}(z)$

แทนค่า $\omega = e^{i(\pi-\theta)}$ จะได้ว่า $g(z) = e^{i(\pi-\theta)} \phi_{a_1 e^{i\theta}}(z)$

แทนค่า $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ จะได้ว่า $g(z) = e^{i(\pi-\theta)} \phi_{a_2}(z)$

ในขั้นต่อไปจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง a_1 และ θ เมื่อ $\theta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$

แทนค่า $g(a_1) = a_2$ จะได้ว่า $a_2 = e^{i(\pi-\theta)} \cdot \phi_{a_2}(a_1)$

$$a_2 = e^{i(\pi-\theta)} \cdot \frac{a_1 - a_2}{1-\overline{a_2}a_1}$$

จาก $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ $\quad\therefore\quad$ $a_1\, e^{i\theta} = e^{i(\pi-\theta)} \cdot \frac{a_1 - a_1 e^{i\theta}}{1-\overline{a_1 e^{i\theta}}a_1}$

จาก $a_1 \neq 0$ $\quad\therefore\quad$ $e^{i\theta} = \frac{1-e^{-i\theta}}{1-|a_1|^2 e^{-i\theta}}$

เนื่องจาก $|a_1| < 1$, จึงรูปได้ว่า $\quad |a_1|^2 = e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1$

$\therefore\quad |a_1| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$

และเนื่องจาก $1 > |a_1| > 0$ ส่งผลให้ $1 > \cos\theta > \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น $\quad g(z) = e^{i(\pi-\theta)}\, \phi_{a_2}(z)$ $\quad$ โดยที่ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $g(0) = a_2$ เราจะทราบว่า $g(0) = a_2, g(a_2) = a_1$ และ $g(a_1) = 0$
ส่งผลให้ $g(z) = e^{i(\pi+\theta)}\, \phi_{a_1}(z)$ $\quad$ โดยที่ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$

ดังนั้น f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$ ก็ต่อเมื่อ

1) $f(z) = z$ หรือ
2) $f(z) = -z$ เมื่อ $a_2 = -a_1$ หรือ
3) $f(z) = -\phi_{a_1}(z)$ เมื่อ $a_1 = \phi_{-a_2}(a_2)$ หรือ
4) $f(z) = e^{i(\pi-\theta)}\, \phi_{a_2}(z)$ เมื่อ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$
   โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ หรือ
5) $f(z) = e^{i(\pi+\theta)}\, \phi_{a_1}(z)$ เมื่อ $a_2 = a_1 e^{i\theta}$ และ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$
   โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ... ■

ตัวอย่าง พิจารณา $Aut\left(D\backslash\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\right\}\right)$

ให้ $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)$

จาก $\left|\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right| = \frac{25+39}{64} = 1$ จะได้ว่า $e^{i\theta} = \frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}$ และ $e^{-i\theta} = \frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}$

จึงสามารถเขียน a_2 ในรูป $a_2 = a_1 e^{i\theta}$

พิจารณาความสัมพันธ์ $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$

จาก $e^{i\theta} = \frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}$ จะได้ว่า $\cos\theta = \frac{5}{8}$

แทนค่า $\cos\theta = \frac{5}{8}$ ลงในความสัมพันธ์ จะได้ว่า $\sqrt{\frac{10}{8} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = |a_1|$

จากทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า $$f_1(z) = e^{i(\pi-\theta)}\,\phi_{a_2}(z) = -e^{-i\theta}\,\phi_{a_2}(z)$$

แทนค่า $a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)$ และ $e^{-i\theta} = \frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}$ ลงใน $f_1(z)$

จะได้ว่า $$f_1(z) = -\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}(z)$$

และเมื่อเขียน a_1 ในรูป $a_1 = a_2 e^{-i\theta}$

จากทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า $$f_2(z) = e^{i(\pi-(-\theta))}\,\phi_{a_1}(z) = -e^{i\theta}\,\phi_{a_1}(z)$$

แทนค่า $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $e^{i\theta} = \frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}$ ลงใน $f_2(z)$

จะได้ว่า $$f_2(z) = -\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\phi_{\frac{1}{2}}(z)$$

พิจารณา $f_2 \circ f_1$ และ $f_1 \circ f_2$

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(z) &= -\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\phi_{\frac{1}{2}}\left(-\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}(z)\right)\\ &= \left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\phi_{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}\left(\phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}(z)\right)\\ &= \phi_0(z)\end{aligned}$$

$$(f_1 \circ f_2)(z) = -\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right) \phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}\left(-\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\ \phi_{\frac{1}{2}}(z)\right)$$

$$= \left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right) \phi_{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\left(\frac{5}{8}-\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}\left(\phi_{\frac{1}{2}}(z)\right)$$

$$= \phi_{-\frac{1}{2}}\left(\phi_{\frac{1}{2}}(z)\right)$$

$$= \phi_0(z)$$

จึงสรุปได้ว่า

$$Aut\left(D\backslash\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\right\}\right) = \left\{\phi_0, -\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\ \phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}, -\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right)\ \phi_{\frac{1}{2}}\right\}$$

เป็นกรุปซึ่งมีสมาชิก 3 ตัว ได้แก่ $\phi_0(z) = z, -\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right) \phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}(z)$ และ $-\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right) \phi_{\frac{1}{2}}(z)$ โดยที่ $\phi_0(z) = z$ เป็นเอกลักษณ์ในกรุปและ $-\left(\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{39}}{8}\right) \phi_{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{i\sqrt{39}}{8}\right)}(z)$ กับ $-\left(\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{39}}{8}\right) \phi_{\frac{1}{2}}(z)$ อินเวอร์สซึ่งกันและกัน

ต่อไปเราจะนำวิธีการหาอัตสัณฐานของ $D\backslash\{0, a_1, a_2\}$ มาประยุกต์ใช้หาอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ สำหรับ a_1, a_2, a_3 ใดๆ

ทฤษฎีบท 3.3.3 $f: D\backslash\{a_1, a_2, a_3\} \to D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ ก็ต่อเมื่อ $f(z) = \left(\phi_{-a_3} \circ h \circ \phi_{a_3}\right)(z)$ โดยที่ $h(z)$ เป็นอัตสัณฐานของ D ที่สอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) $h(z) = z$ หรือ

2) $h(z) = -z$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\phi_{a_3}(a_2) = -\phi_{a_3}(a_1)$ หรือ

3) $h(z) = e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{\phi_{a_3}(a_2)}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\phi_{a_3}(a_2) = \phi_{a_3}(a_1)e^{i\theta}$
และ $\left|\phi_{a_3}(a_2)\right| = \left|\phi_{a_3}(a_1)\right| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ หรือ

4) $h(z) = e^{i(\pi+\theta)}\ \phi_{\phi_{a_3}(a_1)}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\phi_{a_3}(a_2) = \phi_{a_3}(a_1)e^{i\theta}$
และ $\left|\phi_{a_3}(a_2)\right| = \left|\phi_{a_3}(a_1)\right| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

พิสูจน์

เพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.3.2 เราจะพิจารณาฟังก์ชัน ϕ_{a_3} เพื่อส่ง a_3 ไปที่จุด 0 (สามารถใช้ฟังก์ชัน ϕ_{a_1} และ ϕ_{a_2} แทนได้ในทำนองเดียวกัน)

จากบทพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.2 ทำให้เราทราบว่าฟังก์ชัน h ตามข้อ 1), 2), 3) และ 4) เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่ง $h(0), h(\phi_{a_3}(a_1)), h(\phi_{a_3}(a_2)) \in \left\{0, \phi_{a_3}(a_1), \phi_{a_3}(a_2)\right\}$

พิจารณา $f(z) = \left(\phi_{-a_3} \circ h \circ \phi_{a_3}\right)(z)$

เมื่อแทนค่า a_1, a_2 และ a_3 ลงใน $f(z)$ จะได้ว่า $f(a_1), f(a_2), f(a_3) \in \{a_1, a_2, a_3\}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ส่งผลให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$

และจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D และ $f(a_1), f(a_2), f(a_3) \in \{a_1, a_2, a_3\}$

โดยทฤษฎีบทในการวิเคราะห์เชิงซ้อน จะได้ว่า f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$

จึงเพียงพอที่จะแสดงว่าอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ ทั้งหมดอยู่ในรูปแบบข้างต้น

ให้ f เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$

โดยหลักค่าโมดูลัสสูงสุดและทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์ ทำให้เราทราบว่ามี g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งขยายจาก f ซึ่ง $g(a_1), g(a_1), g(a_3) \in D$

ในทำนองเดียวกับบทพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.3.2

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบน D และ $g(a_1), g(a_1), g(a_3) \in \{a_1, a_2, a_3\}$

ส่งผลให้ g เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่งขยายจาก f ซึ่ง $g(a_1), g(a_1), g(a_3) \in \{a_1, a_2, a_3\}$

ดังนั้น $$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \setminus \{a_1, a_2, a_3\} \\ b_i, & z \in \{a_1, a_2, a_3\} \end{cases}$$ โดยที่ $b_i \in \{a_1, a_2, a_3\}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$

พิจารณาฟังก์ชัน ϕ_{a_3} เพื่อส่ง a_3 ไปที่จุด 0

นิยาม $$h(z) = \left(\phi_{a_3} \circ g \circ \phi_{-a_3}\right)(z)$$

จะได้ว่า h เป็นอัตสัณฐานของ D ซึ่งขยายจาก f

พิจารณา $z = 0, \phi_{a_3}(a_1)$ และ $\phi_{a_3}(a_2)$

แทนค่า $z = 0$ ลงใน $h(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h(0) &= \left(\phi_{a_3} \circ g \circ \phi_{-a_3}\right)(0) \\ &= \left(\phi_{a_3} \circ g\right)(a_3) = \phi_{a_3}(b_3) \end{aligned}$$

แทนค่า $z = \phi_{a_3}(a_1)$ ลงใน $h(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h\left(\phi_{a_3}(a_1)\right) &= \left(\phi_{a_3} \circ g \circ \phi_{-a_3}\right)\left(\phi_{a_3}(a_1)\right) \\ &= \left(\phi_{a_3} \circ g\right)(a_1) = \phi_{a_3}(b_1) \end{aligned}$$

แทนค่า $z = \phi_{a_3}(a_2)$ ลงใน $h(z)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h\left(\phi_{a_3}(a_2)\right) &= \left(\phi_{a_3} \circ g \circ \phi_{-a_3}\right)(\phi_{a_3}(a_2)) \\ &= \left(\phi_{a_3} \circ g\right)(a_2) = \phi_{a_3}(b_2) \end{aligned}$$

โดยที่ $\phi_{a_3}(b_i) \in \left\{0, \phi_{a_3}(a_1), \phi_{a_3}(a_2)\right\}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3\}$

จากทฤษฎีบท 3.3.2 ทำให้เราทราบว่า

1) $h(z) = z$ หรือ

2) $h(z) = -z$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\phi_{a_3}(a_2) = -\phi_{a_3}(a_1)$ หรือ

3) $h(z) = e^{i(\pi-\theta)}\ \phi_{\phi_{a_3}(a_2)}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\phi_{a_3}(a_2) = \phi_{a_3}(a_1)e^{i\theta}$

และ $\left|\phi_{a_3}(a_2)\right| = \left|\phi_{a_3}(a_1)\right| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ หรือ

4) $h(z) = e^{i(\pi+\theta)}\ \phi_{\phi_{a_3}(a_1)}(z)$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\phi_{a_3}(a_2) = \phi_{a_3}(a_1)e^{i\theta}$

และ $\left|\phi_{a_3}(a_2)\right| = \left|\phi_{a_3}(a_1)\right| = \sqrt{2\cos\theta - 1}$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น $g(z) = \left(\phi_{-a_3} \circ h \circ \phi_{a_3}\right)(z)$ เป็นอัตสัณฐานของ D

และ $g(a_1), g(a_1), g(a_3) \in \{a_1, a_2, a_3\}$

ส่งผลให้ $f(z) = \left(\phi_{-a_3} \circ h \circ \phi_{a_3}\right)(z)$ เป็นอัตสัณฐานของ $D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$

โดยที่ $h(z)$ สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว ... ■

เอกสารอ้างอิง

Greene, R.E. and Krantz, S.G. ***Function Theory of One Complex Variable***, pp.171-184. 40 vols. 3^{rd}ed. Providence. American Mathematical Society, 2002.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แบบเสนอโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย)	อัตสัณฐานของแผ่นจานที่ถูกเจาะ
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Automorphism of punctured disc
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ รศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน
ผู้ดำเนินการ	พสิษฐ์ เกตุทิม เลขประจำตัวนิสิต 5933535123
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

การส่งคงแบบเป็นฟังก์ชันที่รักษาค่ามุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นที่ผ่านจุดร่วมกันในโดเมนของฟังก์ชันจากการวิเคราะห์เชิงซ้อน เราทราบว่าถ้า $f:\Omega \to \Omega'$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงแบบ ในกรณีที่ $f:\Omega \to \Omega$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง จะเรียก f เป็นอัตสัณฐานของ Ω ดังนั้นอัตสัณฐานของ Ω จะเป็นฟังก์ชันคงแบบ เป็นที่ทราบกันว่าการส่งอัตตาคงแบบของระนาบเชิงซ้อนจะต้องเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเท่านั้น

นอกจากนี้เราสามารถพิจารณาอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วย โดยการใช้บทแทรกชวาร์ซ ซึ่งจะได้ว่าสำหรับอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยซึ่งระบุ $f(0) = 0$ จะเป็นฟังก์ชันของการหมุนเท่านั้น กล่าวคือ $f(z) \equiv \omega z$ สำหรับค่าคงที่ ω ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย

ในกรณีที่ $f(0) \neq 0$ เราสามารถแสดงว่าฟังก์ชัน f ต้องอยู่ในรูปแบบ $f(z) = \omega\phi_a(z)$ ซึ่งสอดคล้อง $f(0) = b$ และ $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ โดยที่ $|\omega| = 1$ และ $a = b\omega^{-1}$

วัตถุประสงค์ของโครงการ

ศึกษาอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

วิธีการดำเนินงาน

1. การศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้อง

   -ศึกษาบทแทรกชวาร์ซ และ ทฤษฎีบทเอกฐานขจัดได้ของรีมันน์

   -ศึกษาอัตสัณฐานของระนาบเชิงซ้อนและของแผ่นจานหนึ่งหน่วย

2. โครงการที่เชี่ยวชาญ

   -แสดงผลการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน

   -นำเสนออัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

3. การดำเนินโครงการ

   -ตรวจสอบอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่มีจุดซึ่งถูกลบออกไปจากแผ่นจานไม่เกิน 3 จุด

4. รายงานและพิสูจน์อักษร

5. การนำเสนอโครงการ

	2019					2020				
	08	09	10	11	12	01	02	03	04	05
1. การศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้อง										
2. โครงการที่เชี่ยวชาญ										
3. การดำเนินโครงการ										
4. รายงานและพิสูจน์อักษร										
5. การนำเสนอโครงการ										

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจคุณสมบัติของจุดเอกฐานขจัดได้และการส่งคงแบบ
2. อธิบายอัตสัณฐานของแผ่นจานหนึ่งหน่วยที่ถูกเจาะ

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนตัว
2. เครื่องพิมพ์
3. อุปกรณ์เครื่องเขียน

งบประมาณ

1. กระดาษ
2. อุปกรณ์เครื่องเขียน

เอกสารอ้างอิง

Greene, R.E. and Krantz, S.G. ***Function Theory of One Complex Variable***, pp.171-184. 40 vols. 3^{rd}ed. Providence. American Mathematical Society, 2002.

ภาคผนวก ข

ประวัติผู้เขียน

นายพสิษฐ์ เกตุทิม

เลขประจำตัวนิสิต 5933535123

สาขาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย