โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟบางประเภท
Combinatorial labelings of some graphs

ชื่อนิสิต นายสกุลวัฒน์ พรหมวิชิตกุล 6033542023

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2563

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟบางประเภท

นายสกุลวัฒน์ พรหมวิชิตกุล

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

Combinatorial labelings of some graphs

Mr. Sakulwat Promvichitkul

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2020

หัวข้อโครงงาน	การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟบางประเภท
โดย	นายสกุลวัฒน์ พรหมวิชิตกุล
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

สกุลวัฒน์ พรหมวิชิตกุล: การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟบางประเภท. (Combinatorial labelings of some graphs) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รศ.ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 37 หน้า.

สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ ที่ $|V(G)| = p$ ถ้ามีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $f: V(G) \to \{1,2,3,\dots,p\}$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ ที่กำหนดโดย $f^c(uv) = \binom{f(u)}{f(v)}$ เมื่อ $f(u) > f(v)$ และ $f^c(uv) = \binom{f(v)}{f(u)}$ เมื่อ $f(v) > f(u)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วจะเรียก f ว่าเป็น “การกำกับแบบจัดหมู่” และเรียกกราฟ G ว่าเป็น “กราฟการจัดหมู่”

โครงงานนี้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง f ที่เหมาะสมเพื่อพิสูจน์ว่าสำหรับ $n \geq 3$, $m \geq 3$ และ $k \geq 1$ กราฟ $Dumb(C_n, C_n)$, $Dumb(C_n, C_m)$, $Dumb_k(C_n, C_n)$ และ $Dumb_k(C_n, C_m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่เกี่ยวข้องกับวงสองวงและวิถีหนึ่งเส้น เป็นกราฟการจัดหมู่

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต สกุลวัฒน์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

ปีการศึกษา 2563

6033542023 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : Combinatorial labelings / Combinatorial graph

SAKULWAT PROMVICHITKUL : Combinatorial labelings of some graphs. ADVISOR : ASSOC. PROF. Ratinan Boonklurb, Ph.D., 37 pp.

Suppose that $G = (V(G), E(G))$ is a graph and $|V(G)| = p$. If there exists a bijective function $f: V(G) \to \{1,2,3,\ldots,p\}$ such that an $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ defined by $f^c(uv) = \binom{f(u)}{f(v)}$ when $f(u) > f(v)$ and $f^c(uv) = \binom{f(v)}{f(u)}$ when $f(v) > f(u)$ is an injection function, then f is called a "combinatorial labelings" and G is called a "combinatorial graph".

This project considers a suitable bijective function f and prove that $Dumb(C_n, C_n)$, $Dumb(C_n, C_m)$, $Dumb_k(C_n, C_n)$ and $Dumb_k(C_n, C_m)$ for $n \geq 3$, $m \geq 3$ and $k \geq 1$ which are graphs related to two cycles and one path, are combinatorial graphs.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Sakulwat

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature R. Boonklurb

Academic Year : 2020

กิตติกรรมประกาศ

ในการดำเนินงานครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีเพราะได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากบุคคลหลายท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานจึงขอขอบคุณผู้ให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ ที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน พร้อมทั้งให้ความช่วยรู้ คำปรึกษาแนะนำ ความดูแลเอาใจใส่และความช่วยเหลือตลอดระยะเวลาการทำโครงงานจนกระทั่งโครงงานนี้สำเร็จตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

ตลอดจนขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงาน และได้ให้คำปรึกษาและแก้ไขปรับปรุงโครงงานนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ครอบครัวและเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยสนับสนุนและเป็นกำลังใจให้ มาตลอดการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและเหตุผลการวิจัย

ปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจเกี่ยวกับการศึกษาทฤษฎีกราฟ คือ ปัญหาการกำกับบนกราฟ ซึ่งโดยส่วนใหญ่แล้วเป็นการสร้างฟังก์ชันระหว่างเซตของจำนวนเต็มกับเซตของจุดยอด หรือเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ โดยฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องสมบัติบางประการ ที่ผ่านมาได้มีการศึกษาการกำกับบนกราฟอย่างแพร่หลาย เช่น การกำกับแบบสง่างาม การกำกับแบบมหัศจรรย์ และการกำกับแบบอื่น ๆ [1] โดยหนึ่งในปัญหาเกี่ยวกับการกำกับบนกราฟที่น่าสนใจ คือ การกำกับแบบจัดหมู่บนกราฟ ซึ่งเป็นการสร้างฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซตของจุดยอดของกราฟกับเซตของจำนวนนับตั้งแต่หนึ่งไปจนถึงจำนวนจุดยอดของกราฟดังกล่าว

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาหาเงื่อนไขที่ทำให้ สามารถหาการกำกับแบบจัดหมู่สำหรับกราฟบางประเภทที่เกี่ยวข้องกับวงและวิถีได้

1.3 ขอบเขตการวิจัย

ศึกษาเฉพาะการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟเชิงเดียวและไม่มีทิศทางเท่านั้น

1.4 ขั้นตอนการวิจัย

การวิจัยเพื่อการวิเคราะห์ความพึงพอใจของผู้เรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนแบบห้องเรียนกลับด้าน มีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

1. ศึกษาบทนิยามการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. กำหนดกลุ่มของกราฟที่สนใจเพื่อจะนำมาใช้ในการทดลองสร้างการกำกับ เพื่อรวบรวมข้อมูลและสร้างข้อความคาดการณ์
3. การพิสูจน์ข้อความคาดการณ์
4. การสรุปผลและเขียนรายงาน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัยในครั้งนี้มีดังนี้

1. นิสิตได้ทักษะและประสบการณ์ในการทำโครงงาน
2. ได้ประยุกต์ใช้ความรู้ด้านพีชคณิต ด้านคอมบินาทอริกและทฤษฎีกราฟในการแก้ปัญหา
3. ได้ทราบเงื่อนไขที่ทำให้สามารถหาการกำกับแบบจัดหมู่สำหรับกราฟบางประเภทที่ศึกษา

1.6 โครงสร้างของรายงาน

บทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทที่ 3 จะกล่าวถึงการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟ $Dumb(C_n, C_n)$ และกราฟ $Dumb(C_n, C_m)$

บทที่ 4 จะกล่าวถึงการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟ $Dumb_k(C_n, C_n)$ และกราฟ $Dumb_k(C_n C_m)$

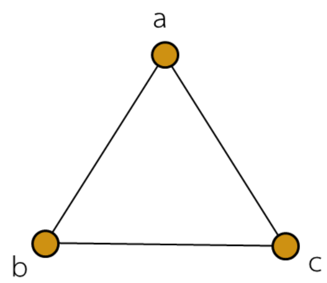
บทที่ 5 จะกล่าวถึงข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กราฟไม่มีทิศทาง G ซึ่งต่อไปจะเรียกสั้น ๆ ว่า กราฟ G คือ คู่อันดับ $(V(G), E(G))$ เมื่อ $V(G)$ คือ เซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียก $V(G)$ ว่า "เซตของจุดยอดของกราฟ G" และ $E(G)$ คือ เซตจำกัดของคู่ไม่เป็นอันดับของสมาชิกใน $V(G)$ เรียก $E(G)$ ว่า "เซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G"

โดยถ้า $|V(G)| = n$ แล้วจะกล่าวว่า กราฟ G เป็นกราฟที่มีอันดับ n หรือกราฟ G มีจุดยอด n จุด และถ้า $|E(G)| = m$ แล้วจะกล่าวว่า กราฟ G เป็นกราฟที่มีขนาด m หรือกราฟ G มีเส้นเชื่อม m เส้น

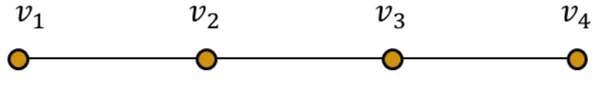
ตัวอย่างที่ 2.1 กราฟ $G = \big(V(G), E(G)\big)$ ที่มี $V(G) = \{a, b, c\}$ และ $E(G) = \{ab, ac, bc\}$



ภาพที่ 2.1 กราฟ G ในตัวอย่างที่ 2.1

กราฟวิถี เขียนแทนด้วย P_n เมื่อ $n \geq 1$ เป็นกราฟที่มีอันดับ n และขนาด $n-1$ โดยถ้ากำหนดชื่อจุดยอดของ P_n เป็น $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ แล้วจะได้ว่า เส้นเชื่อมของกราฟ คือ $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-2}v_{n-1}$ และ $v_{n-1}v_n$ ทั้งนี้จะเรียก v_1 ว่า"จุดยอดเริ่มต้น" และเรียก v_n ว่า"จุดยอดปลาย"

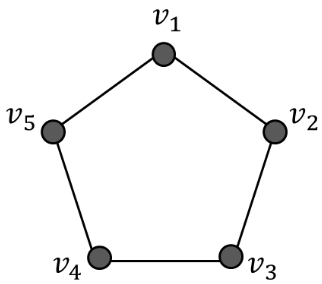
ตัวอย่างที่ 2.2 กราฟวิถี P_4



ภาพที่ 2.2 กราฟวิถี P_4

กราฟวง เขียนแทนด้วย C_n เมื่อ $n \geq 3$ เป็นกราฟที่มีอันดับ n และขนาด n โดยถ้ากำหนดชื่อจุดยอดของ C_n เป็น $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ แล้วจะได้ว่า เส้นเชื่อมของกราฟ คือ $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n$ และ v_nv_1

ตัวอย่างที่ 2.3 กราฟวง C_5



ภาพที่ 2.3 กราฟวง C_5

ในปี 2005 Hegde และ Shetty [2] ได้ให้บทนิยามของการกำกับแบบจัดหมู่สำหรับกราฟไว้ดังต่อไปนี้

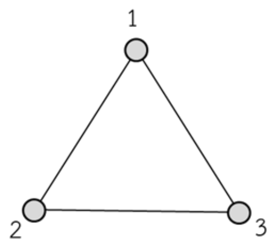
บทนิยามที่ 2.1 ([2]) สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ ที่ $|V(G)| = p$ ถ้ามีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, p\}$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f^c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ที่กำหนดโดย

$$f^c(uv) = \binom{f(u)}{f(v)} \quad \text{เมื่อ} \quad f(u) > f(v)$$

$$\text{และ} \quad f^c(uv) = \binom{f(v)}{f(u)} \quad \text{เมื่อ} \quad f(v) > f(u)$$

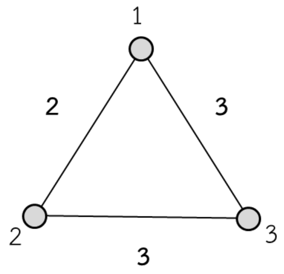
เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วจะเรียก f ว่าเป็น “การกำกับแบบจัดหมู่” และเรียกกราฟที่สามารถหาการกำกับแบบจัดหมู่ได้ว่าเป็น “กราฟการจัดหมู่”

ตัวอย่างที่ 2.4 ให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟในตัวอย่างที่ 2.1 และ $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3\}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งที่กำกับจุดยอดของ G ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 กราฟ G ในตัวอย่างที่ 2.1 ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

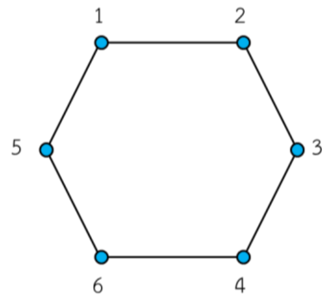
จะได้ว่าฟังก์ชัน $f^c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ตามบทนิยามที่ 2.1 เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G ดังภาพที่ 2.5 แต่จะเห็นว่า f ไม่เป็นการกำกับแบบจัดหมู่



ภาพที่ 2.5 กราฟ G ในตัวอย่างที่ 2.1 ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f และกำกับเส้นเชื่อมด้วยฟังก์ชัน f^c

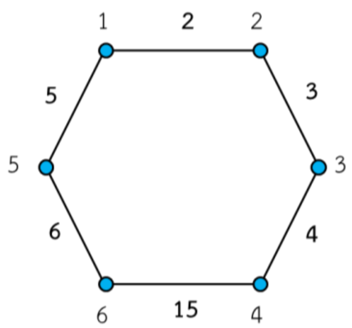
Hegde และ Shetty [2] ได้พิสูจน์ว่ากราฟวง C_n เป็นกราฟการจัดหมู่ก็ต่อเมื่อ $n > 3$ กราฟบริบูรณ์ K_n เป็นกราฟการจัดหมู่ก็ต่อเมื่อ $n \leq 2$ และ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{r,r}$ เป็นกราฟการจัดหมู่ก็ต่อเมื่อ $r \leq 2$ นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการที่กราฟจะเป็นกราฟการจัดหมู่ไว้ด้วย

ตัวอย่างที่ 2.6 กราฟวง C_6 เป็นกราฟการจัดหมู่ เนื่องจาก มีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $f: V(C_6) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,6\}$ ที่กำกับจุดยอดของ C_6 ดังภาพที่ 2.6



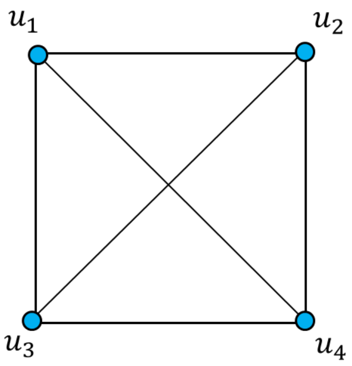
ภาพที่ 2.6 กราฟวง C_6 ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

จะได้ว่าฟังก์ชัน $f^c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ตามบทนิยามที่ 2.1 เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังภาพที่ 2.7 ดังนั้น f เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟวง C_6 เป็นกราฟการจัดหมู่



ภาพที่ 2.7 กราฟวง C_6 ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f และกำกับเส้นเชื่อมด้วยฟังก์ชัน f^c

ตัวอย่างที่ 2.7 กราฟบริบูรณ์ K_4 ไม่เป็นกราฟการจัดหมู่



ภาพที่ 2.8 กราฟบริบูรณ์ K_4

บทพิสูจน์ สมมติว่า K_4 เป็นกราฟการจัดหมู่ ดังนั้นมีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $f: V(K_4) \to \{1,2,3,4\}$ ที่ทำให้ $f^c: E(K_4) \to \mathbb{N}$ ตามบทนิยามที่ 2.1 เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
พิจารณาฟังก์ชัน f จะได้ว่ามี $i, j, k \in \{1,2,3,4\}$ ที่แตกต่างกันซึ่ง

$$f(u_i) = 1, f(u_j) = 2 \text{ และ } f(u_k) = 3$$

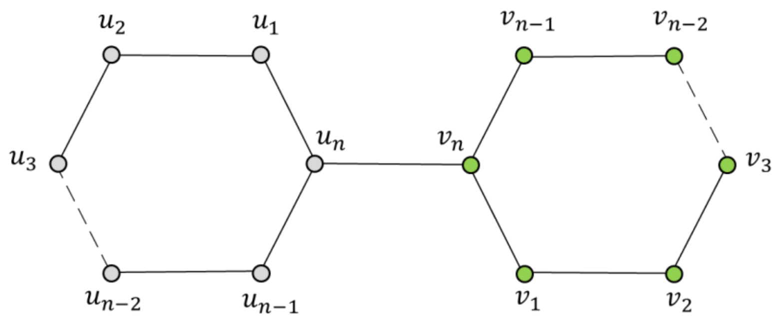
ซึ่งจะเห็นว่า $u_iu_k, u_ju_k \in E(K_4)$ โดยที่ $f^c(u_iu_k) = 3$ และ $f^c(u_ju_k) = 3$
ดังนั้นฟังก์ชัน f^c ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เกิดข้อขัดแย้งกับข้อสมมติ
นั่นคือ กราฟบริบูรณ์ K_4 ไม่มีการกำกับแบบจัดหมู่ หรือกราฟบริบูรณ์ K_4 ไม่เป็นกราฟการจัดหมู่นั่นเอง □

นอกจากนี้ในปี 2012 Li [3] พิสูจน์ว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการ กราฟหลายประเภทเป็นกราฟการจัดหมู่ เช่น กราฟต้นไม้บางประเภท กราฟนัยทั่วไปพีเตอร์เซ็น $GP(n,1)$ เมื่อ $n \geq 4$ และ $GP(n,2)$ เมื่อ $n \geq 5$ และกราฟล้อ W_n เมื่อ $n \geq 7$ และในปี 2017 กัณฐ์ญารัตธ์ ฐิติวัฒนาการ และสรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี [4] ได้อาศัยบทตั้งที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์เชิงคอมบินาทอริกเพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่ากราฟนัยทั่วไปพีเตอร์เซ็น $GP(n,3)$ เมื่อ $n \geq 7$ และ กราฟลอลลิพอพ $H_{g,l}$ เมื่อ $3 \leq g \leq 6$ และ $g - 1 \leq l$ เป็นกราฟการจัดหมู่

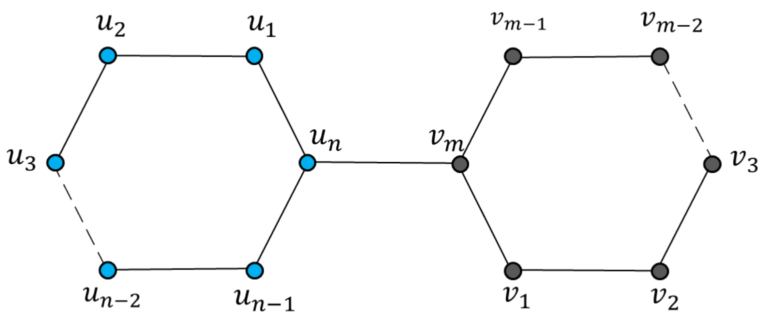
วัตถุประสงค์ของโครงงานนี้ คือ การศึกษาการสร้างฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซตของจุดยอดของกราฟกับเซตของจำนวนนับตั้งแต่หนึ่งไปจนถึงจำนวนจุดยอดของกราฟที่ทำให้ $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง สำหรับกราฟบางประเภทที่เกี่ยวข้องกับกราฟวงสองวงและกราฟวิถีหนึ่งวิถี เพื่อแสดงว่ากราฟดังกล่าวเป็นกราฟการจัดหมู่ โดยกราฟที่สนใจจะศึกษากันในโครงงานนี้มี 4 ประเภท คือ

1. สำหรับ $n \geq 3$ กราฟ $Dumb(C_n, C_n)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n สองกราฟ เรียกว่า C_n และ $\widehat{C_n}$ ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ $\widehat{C_n}$ ด้วยเส้นเชื่อม 1 เส้น
2. สำหรับ $n \geq 3, m \geq 3$ กราฟ $Dumb(C_n, C_m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n และ C_m ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ C_m ด้วยเส้นเชื่อม 1 เส้น

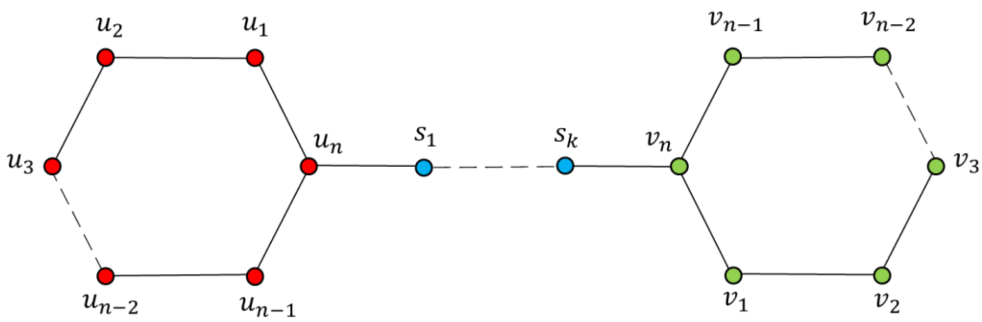
3. สำหรับ $n \geq 3, k \geq 1$ กราฟ $Dumb_k(C_n, C_n)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n สองกราฟ เรียกว่า C_n และ $\widehat{C_n}$ ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ $\widehat{C_n}$ ด้วยวิถี P_k
4. สำหรับ $n \geq 3, m \geq 3, k \geq 1$ กราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n และ C_m ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ C_m ด้วยวิถี P_k



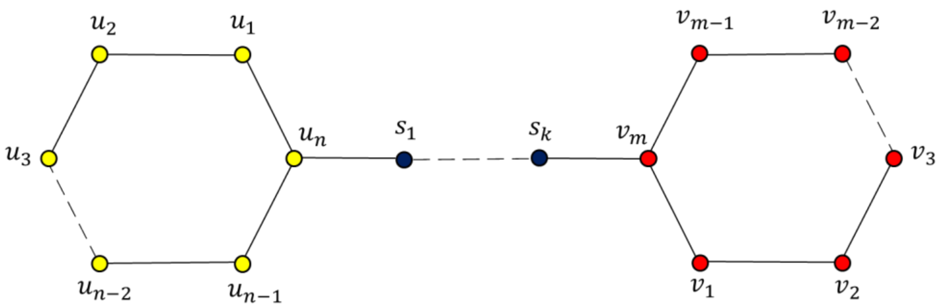
ภาพที่ 2.9 กราฟ $Dumb(C_n, C_n)$



ภาพที่ 2.10 กราฟ $Dumb(C_n, C_m)$



ภาพที่ 2.11 กราฟ $Dumb_k(C_n, C_n)$



ภาพที่ 2.12 กราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$

สำหรับบทพิสูจน์บางส่วนของงานวิจัยข้างต้นมีวิธีพิสูจน์โดยการอาศัยทฤษฎีบทประกอบที่เกี่ยวข้องกับการเปรียบเทียบจำนวนเต็มกับการจัดหมู่ และการจัดหมู่กับการจัดหมู่ เพื่อแสดงว่ากราฟที่สนใจเป็นกราฟการจัดหมู่ ซึ่งโครงงานนี้จะศึกษาการสร้างฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง f ที่เหมาะสม และอาศัยทฤษฎีบทประกอบในลักษณะดังกล่าวเพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่ากราฟที่ศึกษาเป็นกราฟการจัดหมู่

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 ให้ $\alpha > \beta \geq 1$ จะได้ว่า $\binom{\alpha+1}{\beta} > \binom{\alpha}{\beta}$ และ $\binom{\alpha+1}{\beta+1} > \binom{\alpha}{\beta}$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha > \beta \geq 1$ จะได้ว่า $\alpha + 1 > \alpha + 1 - \beta$ และ $\alpha + 1 > \beta + 1$

ดังนั้น $(\alpha + 1)! > \alpha!\,(\alpha + 1 - \beta)$ และ $(\alpha + 1)!\,\beta! > (\beta + 1)!\,\alpha!$

ทำให้ได้ว่า $(\alpha + 1)!\,(\alpha - \beta)! > \alpha!\,(\alpha + 1 - \beta)!$

และ $(\alpha + 1)!\,\beta!\,(\alpha - \beta)! > (\beta + 1)!\,\alpha!\,(\alpha - \beta)!$

เพราะฉะนั้น $\binom{\alpha+1}{\beta} = \frac{(\alpha+1)!}{(\alpha+1-\beta)!\beta!} > \frac{(\alpha)!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \binom{\alpha}{\beta}$

และ $\binom{\alpha+1}{\beta+1} = \frac{(\alpha+1)!}{(\alpha-\beta)!(\beta+1)!} > \frac{(\alpha)!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \binom{\alpha}{\beta}$ □

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2 ให้ $\alpha \geq 4$ และ $2 \leq \beta \leq \alpha - 2$ จะได้ว่า $\binom{\alpha}{\beta} > \alpha$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \geq 4$ และ $2 \leq \beta \leq \alpha - 2$

ดังนั้น $1 < \beta - \gamma + 1 < \alpha - \gamma$ สำหรับ γ ที่ $1 \leq \gamma \leq \beta - 1$

ทำให้ได้ว่า $(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) \ldots (\alpha - \gamma - 1) > \beta(\beta - 1)(\beta - 2) \ldots (\beta - \gamma)$

ให้ $\gamma = \beta - 2$

จะได้ว่า $(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) \ldots (\alpha - \beta + 1) > \beta(\beta - 1)(\beta - 2) \ldots (2) = \beta!$

ดังนั้น $\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) \ldots (\alpha - \beta + 1) > \alpha\beta!$

นั่นคือ $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} > \alpha$ □

บทที่ 3
การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟ $\boldsymbol{Dumb(C_n, C_n)}$ และกราฟ $\boldsymbol{Dumb(C_n, C_m)}$

กราฟ $\boldsymbol{Dumb(C_n, C_n)}$

สำหรับ $n \geq 3$ กราฟ $Dumb(C_n, C_n)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n สองกราฟ เรียกว่า C_n และ $\widehat{C_n}$ ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ $\widehat{C_n}$ ด้วยเส้นเชื่อม 1 เส้น การพิสูจน์ว่ากราฟ $Dumb(C_n, C_n)$ เป็นกราฟการจัดหมู่จะอาศัยทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.1 $\binom{2\alpha}{\alpha-1} > \binom{2\alpha-1}{\alpha} > 2\alpha$ สำหรับ $\alpha \geq 3$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \geq 3$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$\binom{2\alpha}{\alpha-1} > \binom{2\alpha-1}{\alpha-1} = \binom{2\alpha-1}{\alpha}$$

นอกจากนี้โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2 จะได้ว่า

$$\binom{2\alpha-1}{\alpha} = \frac{(2\alpha-1)!}{\alpha!(\alpha-1)!} = \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\left(\frac{(2\alpha-2)!}{\alpha!(\alpha-2)!}\right) = \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\binom{2\alpha-2}{\alpha} > \left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)\binom{2\alpha-2}{\alpha}$$
$$> 2\binom{2\alpha-2}{\alpha} > 2(2\alpha-2) = 2\alpha + (2\alpha-4) > 2\alpha \qquad \square$$

ทฤษฎีบทที่ 3.2 สำหรับ $n \geq 3$ กราฟ $Dumb(C_n, C_n)$ เป็นกราฟการจัดหมู่

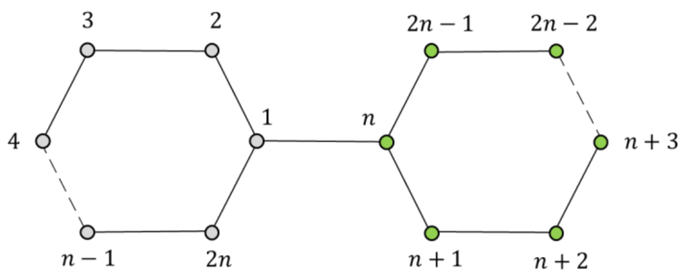
บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 3$ และ $G = Dumb(C_n, C_n)$

จะเห็นว่า $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

และ $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, \dots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$
$\cup \{u_nv_n\}$

ให้ $f: V(G) \to \{1,2,3, \dots, 2n\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i) = \begin{cases} i+1 \ ; & 1 \leq i \leq n-2 \\ 2n \ ; & i = n-1 \\ 1 \ ; & i = n \end{cases} \quad \text{และ } f(v_i) = \begin{cases} n+i; & 1 \leq i \leq n-1 \\ n; & i = n \end{cases}$$



ภาพที่ 3.1 กราฟ $G = Dumb(C_n, C_n)$ ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

เห็นได้ชัดว่า $f: V(G) \to \{1,2,3, \dots, 2n\}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันตามบทนิยามที่ 2.1 จะได้ว่า

$$f^c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} \binom{i+2}{i+1} \ ; \ 1 \le i \le n-3 \\ \binom{2n}{n-1} ; \qquad i = n-2 \\ \binom{2n}{1} \ ; \qquad i = n-1 \end{cases}, \ f^c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \binom{n+i+1}{n+i}; \ 1 \le i \le n-2 \\ \binom{2n-1}{n}; \qquad i = n-1 \end{cases},$$

$$f^c(u_1u_n) = \binom{2}{1}, \ f^c(v_1v_n) = \binom{n+1}{n} \text{ และ } f^c(u_nv_n) = \binom{n}{1}$$

สังเกตว่า

$\{f^c(u_iu_{i+1})\}_{i=1}^{n-1} = \{3,4, \dots, n-2, n-1, \binom{2n}{n-1}, 2n\}$,

$\{f^c(v_iv_{i+1})\}_{i=1}^{n-1} = \{n+2, n+3, n+4, \dots, 2n-2, 2n-1, \binom{2n-1}{n}\}$,

$f^c(u_1u_n) = 2$, $f^c(v_1v_n) = n+1$ และ $f^c(u_nv_n) = n$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.1 จะสามารถนำค่าของฟังก์ชัน f^c มาเรียงลำดับได้ดังนี้

$$2 < 3 < \cdots < n-1 < n < n+1 < \cdots < 2n-1 < 2n < \binom{2n-1}{n} < \binom{2n}{n-1}$$

จะเห็นว่า $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟ $G = Dumb(C_n, C_n)$ เป็นกราฟการจัดหมู่ □

กราฟ $\boldsymbol{Dumb(C_n, C_m)}$

สำหรับ $n \ge 3, m \ge 3$ กราฟ $Dumb(C_n, C_m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n และ C_m ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ C_m ด้วยเส้นเชื่อม 1 เส้น การพิสูจน์ว่ากราฟ $Dumb(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่จะอาศัยทฤษฎีบทประกอบดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.3 $\binom{\alpha+\beta}{\alpha-1} > \binom{\alpha+\beta-1}{\alpha} > \alpha+\beta+1$ สำหรับ $\alpha \ge 4$ และ $3 \le \beta \le \alpha - 1$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \ge 4$ และ $3 \le \beta \le \alpha - 1$

จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha-1} = \frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha-1)!(\beta+1)!} = \frac{(\alpha+\beta)\alpha}{(\beta+1)\beta}\left(\frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!(\beta-1)!}\right) = \frac{(\alpha+\beta)\alpha}{(\beta+1)\beta}\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha} > \frac{(\beta+1)\alpha}{(\beta+1)\beta}\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha} > \binom{\alpha+\beta-1}{\alpha}$$

และโดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha} \ge \binom{\alpha+2}{\alpha} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2} = \frac{\alpha^2+3\alpha+1}{2} > \frac{4\alpha+2}{2} = 2\alpha+1$$

จากนั้นเนื่องจาก $\beta \le \alpha - 1$ ดังนั้น $2\alpha + 1 > \alpha + \beta + 1$ และทำให้ $\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha} > \alpha + \beta + 1$ □

ทฤษฎีบทที่ 3.4 สำหรับ $n \ge 3$ และ $m \ge 3$ กราฟ $Dumb(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่

บทพิสูจน์ ให้ $n \ge 3$ และ $m \ge 3$ และ $G = Dumb(C_n, C_m)$

จะเห็นว่า $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$

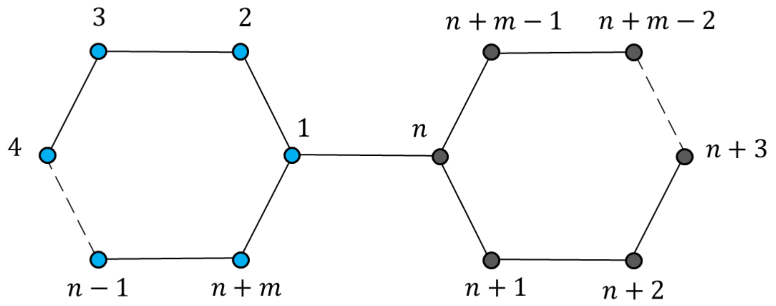
และ $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, \dots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{m-1}v_m, v_mv_1\}$
$\cup \{u_nv_m\}$

<u>กรณีที่ 1</u> $n \neq m$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $n > m$

ให้ $f: V(G) \to \{1,2,3,\dots,n+m\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i) = \begin{cases} i+1\ ;\ 1 \le i \le n-2 \\ n+m; \quad i = n-1 \\ 1\ ; \quad i = n \end{cases} \text{ และ } f(v_i) = \begin{cases} n+i;\ 1 \le i \le m-1 \\ n\ ; \quad i = m \end{cases}$$



ภาพที่ 3.2 กราฟ $G = Dumb(C_n, C_m)$ ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

เห็นได้ชัดว่า $f: V(G) \to \{1,2,3,\dots,n+m\}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันตามบทนิยามที่ 2.1 จะได้ว่า

$$f^c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} \binom{i+2}{i+1}\ ;\ 1 \le i \le n-3 \\ \binom{n+m}{n-1}; \quad i = n-2 \\ \binom{n+m}{1}; \quad i = n-1 \end{cases},\ f^c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \binom{n+i+1}{n+i};\ 1 \le i \le m-2 \\ \binom{n+m-1}{n}; \quad i = m-1 \end{cases},$$

$$f^c(u_1u_n) = \binom{2}{1},\ f^c(v_1v_m) = \binom{n+1}{n} \text{ และ } f^c(u_nv_m) = \binom{n}{1}$$

สังเกตว่า

$$\{f^c(u_iu_{i+1})\}_{i=1}^{n-1} = \left\{3,4,5,\dots,n-2,n-1,\binom{n+m}{n-1},n+m\right\},$$

$$\{f^c(v_iv_{i+1})\}_{i=1}^{m-1} = \left\{n+2,n+3,\dots,n+m-2,n+m-1,\binom{n+m-1}{n}\right\},$$

$$f^c(u_1u_n) = 2,\ f^c(v_1v_m) = n+1 \text{ และ } f^c(u_nv_m) = n$$

เนื่องจาก $n \ge 3$, $m \ge 3$ และ $n > m$ ดังนั้น $3 \le m \le n-1$ และ $n \ge 4$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.3 จะสามารถนำค่าของฟังก์ชัน f^c มาเรียงลำดับได้ดังนี้

$$2 < 3 < \cdots < n-1 < n < n+1 < \cdots < n+m-1 < n+m < \binom{n+m-1}{n} < \binom{n+m}{n-1}$$

จะเห็นว่า $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น f เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟ $G = Dumb(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่สำหรับ $n \ge 3$ และ $m \ge 3$ โดยที่ $n > m$

<u>กรณีที่ 2</u> $n = m$ โดยทฤษฎีบทที่ 3.2 จะได้ว่ากราฟ $G = Dumb(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่ □

บทที่ 4
การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟ $\boldsymbol{Dumb_k(C_n, C_n)}$ และกราฟ $\boldsymbol{Dumb_k(C_n, C_m)}$

กราฟ $\boldsymbol{Dumb_k(C_n, C_n)}$

สำหรับ $n \geq 3, k \geq 1$ กราฟ $Dumb_k(C_n, C_n)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n สองกราฟ เรียกว่า C_n และ $\widehat{C_n}$ ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ $\widehat{C_n}$ ด้วยวิถี P_k การพิสูจน์ว่ากราฟ $Dumb_k(C_n, C_n)$ เป็นกราฟการจัดหมู่จะอาศัยทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.1 $\binom{2\alpha+\beta}{2} \neq \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$ สำหรับ $\alpha \geq 3$ และ $\beta \geq 1$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \geq 3$ และ $\beta \geq 1$ จะแบ่งออกเป็นเก้ากรณีเพื่อแสดงว่า $\binom{2\alpha+\beta}{2} \neq \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$

<u>กรณีที่ 1</u> $3 \leq \alpha \leq 9$ และ $\beta = 1$

จะแสดงว่า $\binom{2\alpha+\beta}{2} = \binom{2\alpha+1}{2} > \binom{\alpha+2}{3} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$

ถ้า $\alpha = 3$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{7}{2} = 21 > 10 = \binom{5}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

ถ้า $\alpha = 4$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{9}{2} = 36 > 20 = \binom{6}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

ถ้า $\alpha = 5$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{11}{2} = 55 > 35 = \binom{7}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

ถ้า $\alpha = 6$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{13}{2} = 78 > 56 = \binom{8}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

ถ้า $\alpha = 7$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{15}{2} = 105 > 84 = \binom{9}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

ถ้า $\alpha = 8$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{17}{2} = 136 > 120 = \binom{10}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

ถ้า $\alpha = 9$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+1}{2} = \binom{19}{2} = 171 > 165 = \binom{11}{3} = \binom{\alpha+2}{3}$

<u>กรณีที่ 2</u> $\alpha \geq 10$ และ $\beta = 1$

จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} = \binom{\alpha+2}{3} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{6} \geq \frac{12(\alpha+1)\alpha}{6} = \frac{(2\alpha+2)(2\alpha)}{2} > \frac{(2\alpha+2)(2\alpha)}{2} = \binom{2\alpha+1}{2} = \binom{2\alpha+\beta}{2}$$

<u>กรณีที่ 3</u> $3 \leq \alpha \leq 4$ และ $\beta = 2$

ถ้า $\alpha = 3$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+\beta}{2} = \binom{8}{2} = 28 > 15 = \binom{6}{4} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$

ถ้า $\alpha = 4$ จะได้ว่า $\binom{2\alpha+\beta}{2} = \binom{10}{2} = 45 > 35 = \binom{7}{4} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$

<u>กรณีที่ 4</u> $\alpha \geq 5$ และ $\beta = 2$

จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} = \binom{\alpha+3}{3} = \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{24} \geq \frac{(8)(7)(\alpha+1)\alpha}{24}$$
$$= \frac{\left(\frac{28}{12}\right)(2\alpha+2)\alpha}{2}$$
$$= \frac{(2\alpha+2)\left(2+\frac{1}{3}\right)\alpha}{2}$$
$$= \frac{(2\alpha+2)\left(2\alpha+\frac{1}{3}\alpha\right)}{2}$$
$$> \frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)}{2}$$
$$= \binom{2\alpha+2}{2}$$

<u>กรณีที่ 5</u> $\alpha \geq 4$ และ $3 \leq \beta < \alpha$

จะแสดงว่า $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} > \binom{2\alpha+\beta}{2}$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนตัวแปร α

<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} = \binom{8}{5} = 56 > 55 = \binom{11}{2} = \binom{2\alpha+\beta}{2}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> สมมติ $\binom{p+q+1}{q+2} > \binom{2p+q}{2}$ สำหรับทุก p, q ที่เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p \geq 4$ และ $3 \leq q < p$

ให้ r เป็นจำนวนเต็มที่ $3 \leq r < p+1$

ต้องการแสดงในขั้นอุปนัยว่า $\binom{p+r+2}{r+2} > \binom{2p+r+2}{2}$

ถ้า $3 \leq r < p$ พิจารณา

$$\binom{p+r+2}{r+2} = \frac{p+r+2}{r+2}\binom{p+r+1}{r+1} > \frac{p+r+2}{r+2}\binom{2p+r}{2}$$
$$= \frac{p+r+2}{r+2}\left(\frac{(2p+r)!}{2!\,(2p+r-2)!}\right)$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$(p+r+2)(2p+r-1)(2p+r)$

$> (4r+8)p^2 + (4r^2+14r+12)p + (r^3+5r^2+8r+4)$

$= (r+2)(2p+r+1)(2p+r+2)$

สำหรับ $p \geq 4$ และ $3 \leq r < p'$ ดังนั้น $\frac{p+r+2}{p+2} > \frac{(2p+r+1)(2p+r+2)}{(2p+r-1)(2p+r)}$ สำหรับ $p \geq 4$ และ $3 \leq r < p$

ดังนั้น

$$\frac{p+r+2}{p+2}\left(\frac{(2p+r)!}{2!\,(2p+r-2)!}\right) > \frac{(2p+r+1)(2p+r+2)}{(2p+r-1)(2p+r)}\left(\frac{(2p+r)!}{2!\,(2p+r-2)!}\right)$$
$$= \binom{2p+r+2}{2}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{p+r+2}{r+2} > \binom{2p+r+2}{2}$

ถ้า $r = p$

จะแสดงว่า $\binom{p+r+2}{r+2} = \binom{2p+2}{p+2} > \binom{3p+2}{2} = \binom{2p+r+2}{2}$ สำหรับ $p \geq 4$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{2p+2}{p+2} = \binom{10}{6} = 210 > 91 = \binom{14}{2} = \binom{3p+2}{2}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ t เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $t \geq 4$ สมมติว่า $\binom{2t+2}{t+2} > \binom{3t+2}{2}$

พิจารณา

$$\binom{2t+4}{t+3}=\frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+3)(t+1)}\binom{2t+2}{t+2} > \frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+3)(t+1)}\binom{3t+2}{2}$$
$$=\frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+3)(t+1)}\left(\frac{(3t+2)!}{2!\,(3t)!}\right)$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$(2t+4)(2t+3)(3t+1)(3t+2) > 9t^4+57t^3+123t^2+111t+36$
$= (t+3)(t+1)(3t+3)(3t+4)$

สำหรับ $t \geq 4$ ดังนั้น $\frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+3)(t+1)} > \frac{(3t+4)(3t+5)}{(3t+1)(3t+2)}$ สำหรับ $t \geq 4$

ดังนั้น

$$\frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+3)(t+1)}\left(\frac{(3t+2)!}{2!\,(3t)!}\right) > \frac{(3t+4)(3t+5)}{(3t+1)(3t+2)}\left(\frac{(3t+2)!}{2!\,(3t)!}\right)$$
$$=\frac{(3t+3)(3t+4)(3t+5)}{(3t+1)(3t+2)(3t+3)}\left(\frac{(3t+2)!}{2!\,(3t)!}\right)$$
$$=\binom{3t+5}{2}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{2t+4}{t+3} > \binom{3t+5}{2}$

<u>กรณีที่ 6</u> $\alpha = 3$ และ $\beta = \alpha$

จะได้ว่า $\binom{2\alpha+\beta}{2} = \binom{9}{2} = 36 > 21 = \binom{7}{5} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$

<u>กรณีที่ 7</u> $\alpha \geq 4$ และ $\beta = \alpha$

จะแสดงว่า $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} = \binom{2\alpha+1}{\alpha+2} > \binom{3\alpha}{2} = \binom{2\alpha+\beta}{2}$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{2\alpha+1}{\alpha+2} = \binom{9}{6} = 84 > 66 = \binom{12}{2} = \binom{3\alpha}{2}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ p เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p \geq 4$ สมมติว่า $\binom{2p+1}{p+2} > \binom{3p}{2}$

พิจารณา

$$\binom{2p+3}{p+3}=\frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)}\binom{2p+1}{p+2} > \frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)}\binom{3p}{2}$$
$$=\frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)}\left(\frac{(3p)!}{2!\,(3p-2)!}\right)$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$$(2p+3)(2p+2)(3p-1)(3p) > 9p^4+42p^3+51p^2+18p$$
$$= (p+3)(p)(3p+2)(3p+3)$$

สำหรับ $p \geq 4$ ดังนั้น $\frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)} > \frac{(3p+2)(3p+3)}{(3p-1)(3p)}$ สำหรับ $p \geq 4$

ดังนั้น

$$\frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)}\left(\frac{(3p)!}{2!\,(3p-2)!}\right) > \frac{(3p+2)(3p+3)}{(3p-1)(3p)}\left(\frac{(3p)!}{2!\,(3p-2)!}\right)$$
$$=\frac{(3p+1)(3p+2)(3p+3)}{(3p-1)(3p)(3p+1)}\left(\frac{(3p)!}{2!\,(3p-2)!}\right)$$
$$=\binom{3p+3}{2}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{2p+3}{p+3} > \binom{3p+3}{2}$

<u>กรณีที่ 8</u> $\alpha = 3$ และ $\beta > \alpha$
โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า $\binom{2\alpha+\beta}{2} = \binom{\beta+6}{2} > \binom{\beta+4}{2} = \binom{\beta+4}{\beta+2} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$

<u>กรณีที่ 9</u> $\beta \geq 5$ และ $4 \leq \alpha < \beta$
จะแสดงว่า $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} > \binom{2\alpha+\beta}{2}$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนตัวแปร β
<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} = \binom{10}{7} = 120 > 78 = \binom{13}{2} = \binom{2\alpha+\beta}{2}$
<u>ขั้นอุปนัย</u> สมมติ $\binom{p+q+1}{q+2} > \binom{2p+q}{2}$ สำหรับ p, q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $q \geq 5$ และ $4 \leq p < q$
ให้ r เป็นจำนวนนับที่ $4 \leq r \leq q$
ถ้า $4 \leq r < q$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\binom{r+q+2}{q+3} = \frac{r+q+2}{q+3}\binom{r+q+1}{q+2} &> \frac{r+q+2}{q+3}\binom{2r+q}{2} \\ &= \frac{r+q+2}{q+3}\left(\frac{(2r+q)!}{2!\,(2r+q-2)!}\right)\end{aligned}$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$$(r+q+2)(2r+q-1) > q^2 + (2r+4)q + (6r+3) = (q+3)(2r+q+1)$$

สำหรับ $q \geq 5$ และ $4 \leq r < q$ ดังนั้น $\frac{r+q+2}{q+3} > \frac{2r+q+1}{2r+q-1}$ สำหรับ $q \geq 5$ และ $4 \leq r < q$
ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{r+q+2}{q+3}\left(\frac{(2r+q)!}{2!\,(2r+q-2)!}\right) &> \frac{(2r+q+1)}{(2r+q-1)}\left(\frac{(2r+q)!}{2!\,(2r+q-2)!}\right) \\ &= \binom{2r+q+1}{2}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{r+q+2}{q+3} > \binom{2r+q+1}{2}$
นอกจากนี้ถ้า $r = q$
แล้วจะแสดงว่า $\binom{r+q+2}{q+3} = \binom{2q+2}{q+3} > \binom{3q+1}{2} = \binom{2r+q+1}{2}$
สำหรับ $q \geq 5$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{2q+2}{q+3} = \binom{12}{8} = 495 > 120 = \binom{16}{2} = \binom{3q+1}{2}$
<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ t เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $t \geq 5$ สมมติว่า $\binom{2t+2}{t+3} > \binom{3t+1}{2}$
พิจารณา

$$\begin{aligned}\binom{2t+4}{t+4} = \frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+4)(t)}\binom{2t+2}{t+3} &> \frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+4)(t)}\binom{3t+1}{2} \\ &= \frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+4)(t)}\left(\frac{(3t+1)!}{2!\,(3t-1)!}\right)\end{aligned}$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$$(2t+4)(2t+3)(3t)(3t+1) > 9t^4 + 57t^3 + 96t^2 + 48t = (t+4)(t)(3t+3)(3t+4)$$

สำหรับ $t \geq 5$ ดังนั้น $\frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+4)(t)} > \frac{(3t+3)(3t+4)}{(3t)(3t+1)}$ สำหรับ $t \geq 5$
ดังนั้น

$$\frac{(2t+4)(2t+3)}{(t+4)(t)}\left(\frac{(3t+1)!}{2!\,(3t-1)!}\right) > \frac{(3t+3)(3t+4)}{(3t)(3t+1)}\left(\frac{(3t+1)!}{2!\,(3t-1)!}\right)$$

$$= \frac{(3t+2)(3t+3)(3t+4)}{(3t)(3t+1)(3t+2)}\left(\frac{(3t+1)!}{2!\,(3t-1)!}\right)$$
$$= \binom{3t+4}{2}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{2t+4}{t+4} > \binom{3t+4}{2}$ □

ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.2 $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} > 2\alpha+\beta$ สำหรับ $\alpha \geq 3$ และ $\beta \geq 1$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \geq 3$ และ $\beta \geq 1$

<u>กรณีที่ 1</u> $\alpha \geq \beta$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} \geq \binom{\alpha+2}{3} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{6} = \frac{\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha}{6} \geq \frac{20\alpha}{6} > 3\alpha \geq 2\alpha+\beta$$

<u>กรณีที่ 2</u> $\beta > \alpha$

ดังนั้น $\beta \geq 4$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} \geq \binom{\beta+4}{\beta+2} = \frac{(\beta+4)(\beta+3)}{2} = \frac{\beta^2+7\beta+12}{2} > \frac{11\beta}{2} > 3\beta > 2\alpha+\beta$$

□

ทฤษฎีบทที่ 4.3 สำหรับ $n \geq 3$ และ $k \geq 1$ กราฟ $Dumb_k(C_n, C_n)$ เป็นกราฟการจัดหมู่

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 3$, $k \geq 1$ และ $G = Dumb_k(C_n, C_n)$

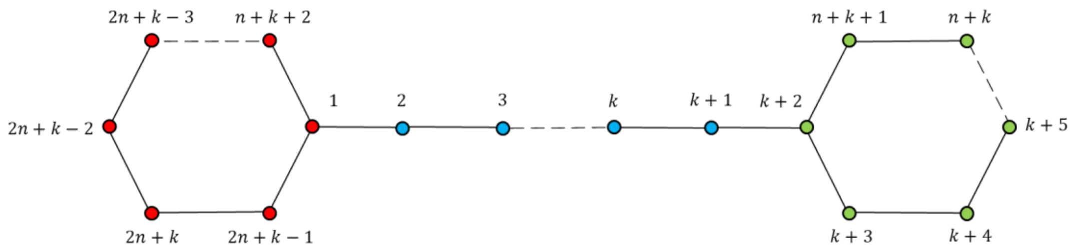
จะเห็นว่า $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \cup \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_k\}$

และ $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, \dots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$
$\cup \{u_ns_1, s_1s_2, s_2s_3, \dots, s_ks_{k-1}, s_{k-1}s_k, s_kv_n\}$

ให้ $f: V(G) \to \{1,2,3, \dots, 2n+k\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i) = \begin{cases} n+k+i+1; & 1 \leq i \leq n-3 \\ 2n+k; & i = n-2 \\ 2n+k-1; & i = n-1 \\ 1; & i = n \end{cases}, \quad f(v_i) = \begin{cases} k+i+2; & 1 \leq i \leq n-1 \\ k+2; & i = n \end{cases}$$

และ $f(s_i) = i+1; 1 \leq i \leq k$



ภาพที่ 4.1 กราฟ $G = Dumb_k(C_n, C_n)$ ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

เห็นได้ชัดว่า $f: V(G) \to \{1,2,3, \dots, 2n+k\}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันตามบทนิยามที่ 2.1 จะได้ว่า

$$f^c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} \binom{n+k+i+2}{n+k+i+1}; \; 1 \le i \le n-4 \\ \binom{2n+k}{2n+k-2}; \qquad i = n-3 \\ \binom{2n+k}{2n+k-1}; \qquad i = n-2 \\ \binom{2n+k-1}{1}; \qquad i = n-1 \end{cases}, \; f^c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \binom{k+i+3}{k+i+2}; \; 1 \le i \le n-2 \\ \binom{n+k+1}{k+2}; \qquad i = n-1 \end{cases},$$

$f^c(u_1u_n) = \binom{n+k+2}{1}$, $f^c(v_1v_m) = \binom{k+3}{k+2}$, $f^c(u_ns_1) = \binom{2}{1}$, $f^c(v_ns_k) = \binom{k+2}{k+1}$

และ $f^c(s_is_{i+1}) = \binom{i+2}{i+1}$; $1 \le i \le k-1$

สังเกตว่า

$$\{f^c(u_iu_{i+1})\}_{i=1}^{n-1} = \{n+k+3, n+k+4, n+k+5, \dots, 2n+k-3, 2n+k-2, \binom{2n+k}{2}, 2n+k, 2n+k-1\},$$

$$\{f^c(v_iv_{i+1})\}_{i=1}^{m-1} = \left\{k+4, k+5, k+6, \dots, n+k-1, n+k, n+k+1, \binom{n+k+1}{k+2}\right\},$$

$f^c(u_1u_n) = n+k+2$, $f^c(v_1v_m) = k+3$, $f^c(u_ns_1) = 2$, $f^c(v_ns_k) = k+2$

และ $\{f^c(s_is_{i+1})\}_{i=1}^{k-1} = \{3,4,\dots,k-1,k,k+1\}$

สังเกตว่าค่าของฟังก์ชัน f^c บางส่วนสามารถนำมาเรียงลำดับกันได้ดังต่อไปนี้

$$2 < 3 < \cdots < k < k+1 < k+2 < k+3 < k+4 < \cdots < n+k-1 < n+k < n+k+1$$
$$< n+k+2 < n+k+3 < \cdots < 2n+k-3 < 2n+k-2 < 2n+k-1 < 2n+k$$

นอกจากนี้โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2 และทฤษฎีบทประกอบที่ 4.1-4.2 จะได้ว่า

$$2n+k < \binom{2n+k}{2}, \;\; 2n+k < \binom{n+k+1}{k+2} \text{ และ } \binom{2n+k}{2} \ne \binom{n+k+1}{k+2}$$

จะเห็นว่า $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟ $G = Dumb_k(C_n, C_n)$ เป็นกราฟการจัดหมู่สำหรับ $n \ge 3$ และ $k \ge 1$ □

กราฟ $\boldsymbol{Dumb_k(C_n, C_m)}$

สำหรับ $n \ge 3$, $m \ge 3$ และ $k \ge 1$ กราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วย C_n และ C_m ที่มีจุดยอดหนึ่งจุดของ C_n เชื่อมกับ C_m ด้วยวิถี P_kการพิสูจน์ว่ากราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่จะอาศัยทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.4 $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} \ne \binom{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ สำหรับ $\alpha \ge 4$, $\beta \ge 3$, $\gamma \ge 2$ และ $\alpha > \beta$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \ge 4$, $\beta \ge 3$, $\gamma \ge 2$ และ $\alpha > \beta$

จะแบ่งกรณีเพื่อแสดงว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} \ne \binom{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

<u>กรณีที่ 1</u> $\alpha = \gamma$ และ $\alpha > \beta$

จะได้ว่า $\alpha \ge 4$, $\beta \ge 3$ และ $\gamma \ge 4$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \binom{2\alpha+\beta}{2} < \binom{3\alpha}{2} = \frac{3\alpha(3\alpha-1)}{2} = \frac{9\alpha^2-3\alpha}{2} < \frac{10\alpha^2}{2} = 5\alpha^2$$

จะแสดงว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} = \binom{2\alpha+1}{\alpha+2} > 5\alpha^2$ สำหรับ $\alpha \ge 4$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{2\alpha+1}{\alpha+2} = \binom{9}{6} = 84 > 80 = 5\alpha^2$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ p เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p \ge 4$ สมมติว่า $\binom{2p+1}{p+2} > 5p^2$

พิจารณา

$$\binom{2p+3}{p+3} = \frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)}\binom{2p+1}{p+2} > \frac{(2p+3)(2p+2)}{(p+3)(p)}(5p^2) > \frac{2p^2+6p}{p^2+3p}(5p^2)$$
$$= 10p^2$$
$$> 5p^2+10p+5$$
$$= 5(p+1)^2$$

<u>กรณีที่ 2</u> $\beta = \gamma$ และ $\alpha > \beta$

จะได้ว่า $\alpha \geq 4$, $\beta \geq 3$ และ $\gamma \geq 3$

จะได้ว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2}$ และ $\binom{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \binom{\alpha+2\beta}{2}$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1

จะได้ว่า $\binom{\alpha+\beta+1}{\beta+2} \geq \binom{\alpha+4}{5}$ และ $\binom{\alpha+2\beta}{2} \leq \binom{3\alpha-2}{2}$

จะแสดงว่า $\binom{\alpha+4}{5} > \binom{3\alpha-2}{2}$ สำหรับ $\alpha \geq 4$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{\alpha+4}{5} = \binom{8}{5} = 56 > 45 = \binom{10}{2} = \binom{3\alpha-2}{2}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ p เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p \geq 4$ สมมติว่า $\binom{p+4}{5} > \binom{3p-2}{2}$

พิจารณา

$$\binom{p+5}{5} = \frac{p+5}{p}\binom{p+4}{5} > \frac{p+5}{p}\binom{3p-2}{2} = \frac{p+5}{p}\left(\frac{(3p-2)!}{2!\,(3p-4)!}\right)$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$$(p+5)(3p-3)(3p-2) > 9p^3+3p^2 = p(3p)(3p+1)$$

สำหรับ $p \geq 4$ ดังนั้น $\frac{p+5}{p} > \frac{(3p)(3p+1)}{(3p-3)(3p-2)}$ สำหรับ $p \geq 4$

ดังนั้น

$$\frac{p+5}{p}\left(\frac{(3p-2)!}{2!\,(3p-4)!}\right) > \frac{(3p)(3p+1)}{(3p-3)(3p-2)}\left(\frac{(3p-2)!}{2!\,(3p-4)!}\right)$$
$$= \frac{(3p-1)(3p)(3p+1)}{(3p-3)(3p-2)(3p-1)}\left(\frac{(3p-2)!}{2!\,(3p-4)!}\right)$$
$$= \binom{3p+1}{2}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{p+5}{5} > \binom{3p+1}{2}$

<u>กรณีที่ 3</u> $\alpha > \beta > \gamma$

จะได้ว่า $\alpha \geq 4$, $\beta \geq 3$ และ $\gamma \geq 2$

<u>กรณีที่ 3.1</u> $\alpha = 4$, $\beta = 3$ และ $\gamma = 2$

จะได้ว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} = \binom{7}{4} = 35 < 36 = \binom{9}{2} = \binom{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

<u>กรณีที่ 3.2</u> $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 3$ และ $\gamma \geq 2$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1

จะได้ว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} \geq \binom{\alpha+3}{4}$ และ $\binom{\alpha+\beta+\gamma}{2} \leq \binom{3\alpha-3}{2}$

จะแสดงว่า $\binom{\alpha+3}{4} > \binom{3\alpha-3}{2}$ สำหรับ $\alpha \geq 5$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> $\binom{\alpha+3}{4} = \binom{8}{4} = 70 > 66 = \binom{12}{2} = \binom{3\alpha-3}{2}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ p เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p \geq 4$ สมมติว่า $\binom{p+3}{4} > \binom{3p-3}{2}$

พิจารณา

$$\binom{p+4}{4} = \frac{p+4}{p}\binom{p+3}{4} > \frac{p+4}{p}\binom{3p-3}{2} = \frac{p+4}{p}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right)$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$$(p+4)(3p-4)(3p-3) > 9p^3 - 3p^2 = p(3p-1)(3p)$$

สำหรับ $p \geq 5$ ดังนั้น $\frac{p+4}{p} > \frac{(3p-1)(3p)}{(3p-4)(3p-3)}$ สำหรับ $p \geq 5$

ดังนั้น

$$\frac{p+4}{p}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right) > \frac{(3p-1)(3p)}{(3p-4)(3p-3)}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right)$$
$$= \frac{(3p-2)(3p-1)(3p)}{(3p-4)(3p-3)(3p-2)}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right)$$
$$= \frac{(3p)!}{2!\,(3p-2)!}$$
$$= \binom{3p}{2}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{p+4}{4} > \binom{3p}{2}$

<u>กรณีที่ 4</u> $\alpha > \gamma > \beta$

จะได้ว่า $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 3$ และ $\gamma \geq 4$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1

จะได้ว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} \geq \binom{\alpha+5}{6} > \binom{\alpha+3}{4}$ และ $\binom{\alpha+\beta+\gamma}{2} \leq \binom{3\alpha-3}{2}$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในกรณีที่ 3

จะได้ว่า $\binom{\alpha+3}{4} > \binom{3\alpha-3}{2}$ สำหรับ $\alpha \geq 5$

<u>กรณีที่ 5</u> $\gamma > \alpha > \beta$

จะได้ว่า $\alpha \geq 4$, $\beta \geq 3$ และ $\gamma \geq 5$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1

จะได้ว่า $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} \geq \binom{\gamma+5}{\gamma+2} = \binom{\gamma+5}{3}$ และ $\binom{\alpha+\beta+\gamma}{2} \leq \binom{3\gamma-3}{2}$

จะแสดงว่า $\binom{\gamma+5}{3} > \binom{3\alpha-3}{2}$ สำหรับ $\gamma \geq 5$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิคศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u>

สำหรับ $\gamma = 5$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{10}{3} = 120 > 66 = \binom{12}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 6$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{11}{3} = 165 > 105 = \binom{15}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 7$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{12}{3} = 220 > 153 = \binom{18}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 8$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{13}{3} = 286 > 210 = \binom{21}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 9$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{14}{3} = 364 > 276 = \binom{24}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 10$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{15}{3} = 455 > 351 = \binom{27}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 11$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{16}{3} = 560 > 435 = \binom{30}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

สำหรับ $\gamma = 12$ จะได้ว่า $\binom{\gamma+5}{3} = \binom{17}{3} = 680 > 528 = \binom{33}{2} = \binom{3\gamma-3}{2}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ p เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p \geq 12$ สมมติว่า $\binom{p+5}{3} > \binom{3p-3}{2}$

พิจารณา

$$\binom{p+6}{3} = \frac{p+6}{p+3}\binom{p+5}{3} > \frac{p+6}{p+3}\binom{3p-3}{2} = \frac{p+6}{p+3}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right)$$

จากการคำนวณโดยตรงจะได้ว่า

$$(p+6)(3p-4)(3p-3) > 9p^3 + 24p^2 - 9p = (p+3)(3p-1)(3p)$$

สำหรับ $p \geq 12$ ดังนั้น $\frac{p+6}{p+3} > \frac{(3p-1)(3p)}{(3p-4)(3p-3)}$ สำหรับ $p \geq 12$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{p+6}{p+3}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right) &> \frac{(3p-1)(3p)}{(3p-4)(3p-3)}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right)\\ &= \frac{(3p-2)(3p-1)(3p)}{(3p-4)(3p-3)(3p-2)}\left(\frac{(3p-3)!}{2!\,(3p-5)!}\right)\\ &= \binom{3p}{2}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\binom{p+6}{3} > \binom{3p}{2}$ □

ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.5 $\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} > \alpha+\beta+\gamma$ สำหรับ $\alpha \geq 4$, $\beta \geq 3$, $\gamma \geq 2$ และ $\alpha > \beta$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$\binom{\alpha+\gamma+1}{\gamma+2} > \binom{\alpha+2}{3} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{6} = \frac{\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha}{6} \geq \frac{30\alpha}{6} = 5\alpha > 3\alpha - 3 \geq \alpha+\beta+\gamma$$ □

ทฤษฎีบทที่ 4.6 $n \geq 3, m \geq 3$ และ $k \geq 1$ กราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 3, m \geq 3, k \geq 1$ และ $G = Dumb_k(C_n, C_m)$

<u>กรณีที่ 1</u> $k = 1$

จะเห็นว่า $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\} \cup \{s_1\}$

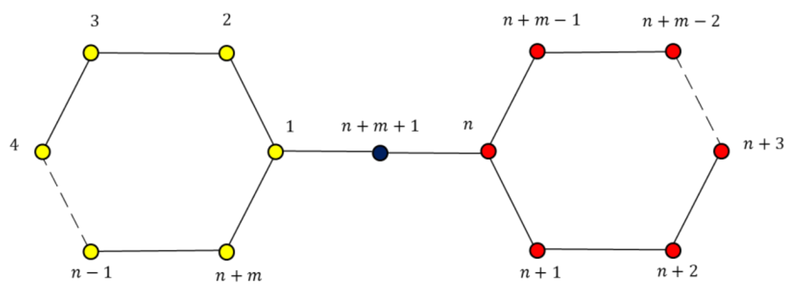
และ $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, \ldots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{m-1}v_m, v_mv_1\}$
$\cup \{u_ns_1, s_1v_m\}$

<u>กรณีที่ 1.1</u> $n \neq m$ และ $k = 1$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $n > m$

ให้ $f: V(G) \to \{1,2,3, \ldots, n+m+1\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i) = \begin{cases} i+1; & 1 \leq i \leq n-2 \\ n+m; & i = n-1 \\ 1; & i = n \end{cases}, \quad f(v_i) = \begin{cases} n+i; & 1 \leq i \leq m-1 \\ n; & i = m \end{cases} \quad \text{และ } f(s_1) = n+m+1$$



ภาพที่ 4.2 กราฟ $G = Dumb_1(C_n, C_m)$ ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

เห็นได้ชัดว่า $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, n+m+1\}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง
ให้ $f^c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันตามบทนิยามที่ 2.1 จะได้ว่า

$$f^c(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} \binom{i+2}{i+1}\ ; & 1 \le i \le n-3 \\ \binom{n+m}{n-1}; & i = n-2 \\ \binom{n+m}{1}; & i = n-1 \end{cases},\ f^c(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} \binom{n+i+1}{n+i}; & 1 \le i \le m-2 \\ \binom{n+m-1}{n}; & i = m-1 \end{cases},$$

$f^c(u_1 u_n) = \binom{2}{1}$, $f^c(v_1 v_m) = \binom{n+1}{n}$, $f^c(u_n s_1) = \binom{n+m+1}{1}$
และ $f^c(v_n s_1) = \binom{n+m+1}{n}$

สังเกตว่า

$\{f^c(u_i u_{i+1})\}_{i=1}^{n-1} = \{3,4,5, \dots, n-2, n-1, \binom{n+m}{n-1}, n+m\}$,
$\{f^c(v_i v_{i+1})\}_{i=1}^{m-1} = \{n+2, n+3, \dots, n+m-2, n+m-1, \binom{n+m-1}{n}\}$,
$f^c(u_1 u_n) = 2$, $f^c(v_1 v_m) = n+1$, $f^c(u_n s_1) = n+m+1$
และ $f^c(v_n s_1) = \binom{n+m+1}{n}$

เนื่องจาก $n \ge 3$, $m \ge 3$ และ $n > m$ ดังนั้น $3 \le m \le n-1$ และ $n \ge 4$
โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2 และทฤษฎีบทประกอบที่ 3.3 จะสามารถนำค่าของฟังก์ชัน f^c มาเรียงลำดับได้ดังนี้

$$2 < 3 < \cdots < n-1 < n+1 < \cdots < n+m-1 < n+m < n+m+1 < \binom{n+m-1}{n} < \binom{n+m}{n-1} < \binom{n+m+1}{n}$$

จะเห็นว่า $f^c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟ $Dumb_1(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่สำหรับ $n \ge 3$, $m \ge 3$ และ $k \ge 1$ โดยที่ $n > m$

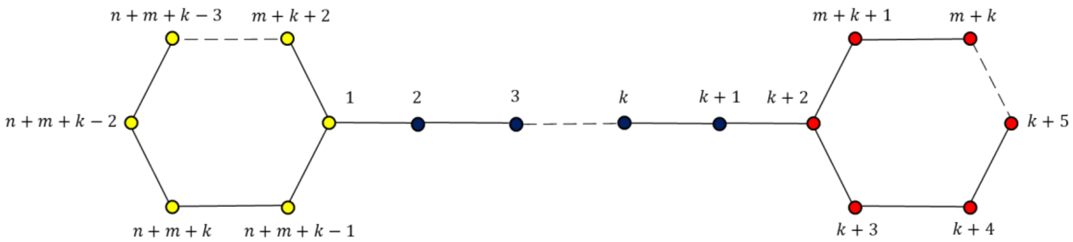
<u>กรณีที่ 1.2</u> $n = m$ และ $k = 1$
โดยทฤษฎีบทที่ 4.3 จะได้ว่ากราฟ $Dumb_1(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่

<u>กรณีที่ 2</u> $k \ge 2$
จะเห็นว่า $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} \cup \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_k\}$
และ $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, \dots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{m-1}v_m, v_mv_1\}$
$\cup \{u_ns_1, s_1s_2, s_2s_3, \dots, s_ks_{k-1}, s_{k-1}s_k, s_kv_m\}$

<u>กรณีที่ 2.1</u> $n \ne m$ และ $k \ge 2$
โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $m > n$
ให้ $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, n+m+k\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i) = \begin{cases} m+k+i+1; & 1 \le i \le n-3 \\ n+m+k\ ; & i = n-2 \\ n+m+k-1; & i = n-1 \\ 1\ ; & i = n \end{cases},\ f(v_i) = \begin{cases} k+i+2; & 1 \le i \le m-1 \\ k+2\ ; & i = m \end{cases}$$

และ $f(s_i) = i+1$; $1 \le i \le k$



ภาพที่ 4.3 กราฟ $G = Dumb_k(C_n, C_m)$ ที่กำกับจุดยอดด้วยฟังก์ชัน f

เห็นได้ชัดว่า $f: V(G) \to \{1,2,3,\dots,n+m+1\}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง
ให้ $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันตามบทนิยามที่ 2.1 จะได้ว่า

$$f^c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} \binom{m+k+i+2}{m+k+i+1}; & 1 \le i \le n-4 \\ \binom{n+m+k}{n+m+k-2}; & i = n-3 \\ \binom{n+m+k}{n+m+k-1}; & i = n-2 \\ \binom{n+m+k-1}{1}; & i = n-1 \end{cases}, \quad f^c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \binom{k+i+3}{k+i+2}; & 1 \le i \le m-2 \\ \binom{m+k+1}{k+2}; & i = m-1 \end{cases},$$

$f^c(u_1u_n) = \binom{m+k+2}{1}$, $f^c(v_1v_m) = \binom{k+3}{k+2}$, $f^c(u_ns_1) = \binom{2}{1}$, $f^c(v_ns_k) = \binom{k+2}{k+1}$
และ $f^c(s_is_{i+1}) = \binom{i+2}{i+1}; 1 \le i \le k-1$
สังเกตว่า

$$\{f^c(u_iu_{i+1})\}_{i=1}^{n-1} = \{m+k+3, m+k+4, \dots, n+m+k-4, n+m+k-3, n+m+k-2, \binom{n+m+k}{2}, n+m+k, n+m+k-1\},$$

$$\{f^c(v_iv_{i+1})\}_{i=1}^{m-1} = \{k+4, k+5, \dots, m+k-1, m+k, m+k+1, \binom{m+k+1}{k+2}\},$$

$$f^c(u_1u_n) = m+k+2,\ f^c(v_1v_m) = k+3,\ f^c(u_ns_1) = 2,\ f^c(v_ns_k) = k+2$$

และ $\{f^c(s_is_{i+1})\}_{i=1}^{k-1} = \{3,4,5,\dots,k-1,k,k+1\}$

สังเกตว่าค่าของฟังก์ชัน f^c บางส่วนสามารถนำมาเรียงลำดับกันได้ดังต่อไปนี้

$$2 < 3 < \cdots < k < k+1 < k+2 < k+3 < k+4 < \cdots < m+k-1 < m+k$$
$$< m+k+1 < m+k+2 < m+k+3 < \cdots < n+m+k-4 < n+m+k-3$$
$$< n+m+k-2 < n+m+k-1 < n+m+k$$

นอกจากนี้โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2 และทฤษฎีบทประกอบที่ 4.4-4.5 จะได้ว่า

$$n+m+k < \binom{m+k+1}{k+2},\ n+m+k < \binom{n+m+k}{2} \text{ และ } \binom{m+k+1}{k+2} \ne \binom{n+m+k}{2}$$

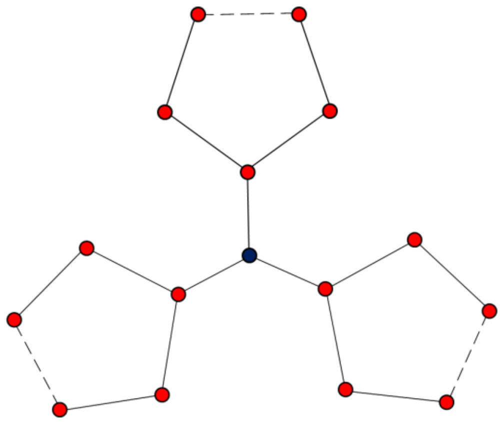
จะเห็นว่า $f^c: E(G) \to \mathbb{N}$ เป็นการกำกับเส้นเชื่อมของ G และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
ดังนั้น f เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟ $G = Dumb_k(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่สำหรับ $n \ge 4$, $m \ge 3$ และ $k \ge 2$ โดยที่ $m > n$

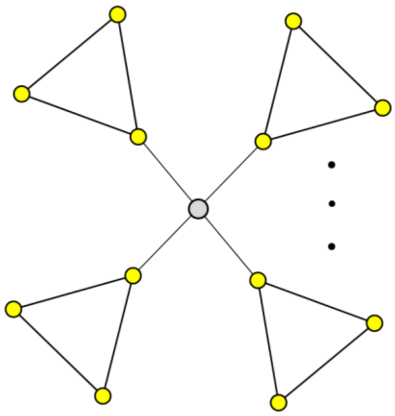
<u>กรณีที่ 2.2</u> $n = m$ และ $k \ge 2$
โดยทฤษฎีบทที่ 4.3 จะได้ว่ากราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ เป็นกราฟการจัดหมู่ □

บทที่ 5
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ในโครงงานนี้สร้างการกำกับ f บนจุดยอดของกราฟ $Dumb(C_n, C_n)$, $Dumb(C_n, C_m)$, $Dumb_k(C_n, C_n)$ และ $Dumb_k(C_n, C_m)$ สำหรับ $n \geq 3,\ m \geq 3$ และ $k \geq 1$ แล้วจึงพิสูจน์ว่าการกำกับ f บนจุดยอดของกราฟเหล่านี้ส่งผลให้เกิดการกำกับ f^c บนเส้นเชื่อมที่นิยามตามบทนิยามที่ 2.1 เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นกราฟ $Dumb(C_n, C_n)$, $Dumb(C_n, C_m)$, $Dumb_k(C_n, C_n)$ และ $Dumb_k(C_n, C_m)$ สำหรับ $n \geq 3,\ m \geq 3$ และ $k \geq 1$ เป็นกราฟการจัดหมู่ สังเกตว่ากราฟ $Dumb(C_n, C_n)$, $Dumb(C_n, C_m)$ และกราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ ในกรณีที่ $n \neq m, k = 1$ มีการกำกับ f_1 ที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันเป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และกราฟ$Dumb_k(C_n, C_n)$, $Dumb_k(C_n, C_m)$ ในกรณีที่ $n = m,\ k = 1$ และกรณีที่ $k \geq 2$ จะมีการกำกับ f_2 ในลักษณะคล้ายคลึงกันซึ่งแตกต่างอย่างเห็นได้ชัดกับการกำกับ f_1 เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ ซึ่งการกำกับในลักษณะคล้ายคลึงกับการกำกับ f_1 อาจเป็นการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟที่มี f_2 เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ และการกำกับในลักษณะคล้ายคลึงกับการกำกับ f_2 อาจเป็นการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟที่มี f_1 เป็นการกำกับแบบจัดหมู่เช่นเดียวกัน แต่อาจมีวิธีการพิสูจน์หรือการแบ่งกรณีที่แตกต่างกัน หรืออาจไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าการกำกับดังกล่าวเป็นการกำกับแบบจัดหมู่ เช่น กราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ ในกรณีที่ $n \neq m, k = 1$ เป็นกราฟที่มี n, m ที่เป็นจำนวนเต็มบางค่าที่ทำให้การกำกับ f_2 ไม่เป็นการกำกับแบบจัดหมู่ แต่มีการกำกับ f_1 เป็นการกำกับแบบจัดหมู่สำหรับทุก n, m ที่เป็นจำนวนเต็ม หรือหากพิจารณาการกำกับของกราฟ $Dumb_k(C_n, C_m)$ ในกรณีที่ $m > n$ และ $k \geq 2$ จะเห็นว่าถ้าให้ $k = 0$ จะสามารถอาศัยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 และวิธีทางพีชคณิตอย่างง่ายเพื่อแสดงว่าการกำกับดังกล่าวเป็นการกำกับแบบจัดหมู่สำหรับกราฟ $Dumb(C_n, C_m)$

จะเห็นว่ากราฟที่สนใจศึกษาในโครงงานนี้เกี่ยวข้องกับวงสองวงและวิถีหนึ่งเส้นเท่านั้นดังนั้นผู้ที่สนใจอาจขยายการศึกษาไปสู่การสร้างการกำกับแบบจัดหมู่ให้กับกราฟที่มีลักษณะเดียวกันแต่มีวงมากกว่าสองวง และ วิถีที่เกี่ยวข้องอาจยาวไม่เท่ากัน เช่น





เอกสารอ้างอิง

[1] J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labelings, *Electron. J. Combin*, 16 (2009).

[2] M.S. Hegde and S. Shetty, Combinatorial labelings of graphs, Applied Mathematics E-note, 6(2006): 251-258.

[3] P.C. Li, Combination labelings of graphs, Applied Mathematics E-note, 12(2012): 158-168.

[4] กัณฐ์ญารัตธ์ ฐิติวัฒนาการ และสรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี. การกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟพีเตอร์เซนทั่วไปและกราฟลอลลิพอพสำหรับบางกรณี. วารสารวิทยาศาสตร์ มศว, 33.2(2017): 195-212.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2563

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) การกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟบางประเภท
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) Combinatorial labelings of some graphs
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ นายสกุลวัฒน์ พรหมวิชิตกุล เลขประจำตัวนิสิต 6033542023

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ปัญหาหนึ่งทางทฤษฎีกราฟ คือ ปัญหาเกี่ยวกับการกำกับบนกราฟ ซึ่งโดยส่วนใหญ่แล้วเป็นการสร้างฟังก์ชันระหว่างเซตของจำนวนเต็มกับเซตของจุดยอดหรือเส้นเชื่อมของกราฟที่มีสมบัติบางประการ มีการศึกษาการกำกับบนกราฟอย่างแพร่หลาย เช่น การกำกับแบบสง่างาม การกำกับแบบมหัศจรรย์ ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความพลวัตโดย Gallian [1]

ต่อมาในปี 2005 Hegde และ Shetty [2] ได้ให้บทนิยามของการกำกับบนกราฟแบบหนึ่ง ที่เรียกว่าการกำกับแบบจัดหมู่ สำหรับกราฟเชิงเดียวและไม่มีทิศทาง $G(V,E)$ ที่ $|V|=p$ จุด และ $|E|=q$ เส้น ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $f:V\to\{1,2,3,\dots p\}$ จะเรียกว่าเป็นการกำกับแบบจัดหมู่ก็ต่อเมื่อ $f^c:E\to\mathbb{N}$ ที่กำหนดโดย $f^c(uv)=\binom{f(u)}{f(v)}$ ถ้า $f(u)>f(v)$ และ $f^c(uv)=\binom{f(v)}{f(u)}$ ถ้า $f(u)<f(v)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และกราฟที่สามารถหาการกำกับแบบจัดหมู่ได้จะเรียกว่ากราฟการจัดหมู่ โดยทั้งสองได้พิสูจน์ว่า กราฟวง C_n เมื่อ $n>3$ กราฟบริบูรณ์ K_n เมื่อ $n\le 2$ และ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{r,r}$ เมื่อ $r\le 2$ เป็นกราฟการจัดหมู่ นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการที่กราฟจะเป็นกราฟการจัดหมู่ไว้ด้วย

ในปี 2012 Li [3] พิสูจน์ว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการ กราฟหลายประเภทเป็นกราฟการจัดหมู่ เช่น กราฟต้นไม้บางประเภท กราฟนัยทั่วไปพีเตอร์เซ็น $GP(n,1)$ เมื่อ $n\ge 4$ และ $GP(n,2)$ เมื่อ $n\ge 5$ และกราฟล้อ W_n เมื่อ $n\ge 7$

ในปี 2017 กัณฐ์ญารัตธ์ ฐิติวัฒนาการ และสรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี [4] ได้อาศัยบทตั้งที่เกี่ยวข้องกับ คอมบินาทอริกเพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่ากราฟนัยทั่วไปพีเตอร์เซ็น $GP(n,3)$ เมื่อ $n\ge 7$ และกราฟลอลลิพอพ $H_{g,l}$ เมื่อ $3\le g\le 6$ และ $g-1\le l$ เป็นกราฟการจัดหมู่

โครงงานนี้ ศึกษาหาเงื่อนไขที่ทำให้ กราฟบางประเภทที่เกี่ยวข้องกับวงและวิถี เป็นกราฟการจัดหมู่

วัตถุประสงค์

ศึกษาหาเงื่อนไขที่ทำให้ กราฟบางประเภทที่เกี่ยวข้องกับวงและวิถี เป็นกราฟการจัดหมู่

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาเฉพาะการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟเชิงเดียวและไม่มีทิศทางเท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาบทนิยามการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. กำหนดกลุ่มของกราฟที่สนใจเพื่อจะนำมาใช้ในการทดลองสร้างการกำกับ เพื่อรวบรวมข้อมูลและสร้างข้อความคาดการณ์
3. การพิสูจน์ข้อความคาดการณ์
4. การสรุปผลและเขียนรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2563 – เมษายน 2564								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาบทนิยามการกำกับแบบจัดหมู่ของกราฟและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง									
2. กำหนดกลุ่มของกราฟที่สนใจเพื่อจะนำมาใช้ในการทดลองสร้างการกำกับ เพื่อรวบรวมข้อมูลและสร้างข้อความคาดการณ์									
3. การพิสูจน์ข้อความคาดการณ์									
4. การสรุปผลและเขียนรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. นิสิตได้ทักษะและประสบการณ์ในการทำโครงงาน และได้ประยุกต์ใช้ความรู้ด้านคอมบินาทอริก และทฤษฎีกราฟในการแก้ปัญหา
2. ได้ทราบเงื่อนไขที่ทำให้กราฟบางประเภทที่ศึกษาเป็นกราฟการจัดหมู่

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. คอมพิวเตอร์
3. โปรแกรม Microsoft Word, โปรแกรม Microsoft Excel, โปรแกรม Python

งบประมาณ

1. ค่ากระดาษ A4 500 บาท
2. ค่าถ่ายเอกสารและจัดทำรูปเล่ม 1000 บาท
3. ค่าอุปกรณ์เครื่องเขียน 1000 บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labelings, *Electron. J. Combin*, 16 (2009).

[2] M.S. Hegde and S. Shetty, Combinatorial labelings of graphs, Applied Mathematics E-note, 6(2006): 251-258.

[3] P.C. Li, Combination labelings of graphs, Applied Mathematics E-note, 12(2012): 158-168.

[4] กัณฐ์ญารัตธ์ ฐิติวัฒนาการ และสรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี. การกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟพีเตอร์เซนทั่วไปและกราฟลอลลิพอพสำหรับบางกรณี. วารสารวิทยาศาสตร์ มศว, 33.2(2017): 195-212.

ประวัติผู้เขียน

นายสกุลวัฒน์ พรหมวิชิตกุล
รหัสนิสิต 6033542023
สาขา คณิตศาสตร์
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย