

การวิเคราะห์การส่งผ่านคลื่นระนาบในดักกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น
ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา



นางสาวนันทิยา นาพิกาวิท

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2543

ISBN 974-346-311-9

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

**FINITE ELEMENT-TIME DOMAIN ANALYSIS OF PLANE WAVE TRANSMISSION
IN AN ANISOTROPIC MULTI-LAYERED MEDIUM**

Miss Nuntiya Narikawid

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic year 2000

ISBN 974-346-311-9


หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์การส่งผ่านคลื่นระนาบในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา

โดย นางสาวนันทิยา นาฬิกาวิท


ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว


คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบัณฑิต


..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์)


..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฉัตรชัย ไวยาทพัฒนกร)

นันทิยา นาพิกาวิท : การวิเคราะห์การส่งผ่านคลื่นระนาบในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา (FINITE ELEMENT-TIME DOMAIN ANALYSIS OF PLANE WAVE TRANSMISSION IN AN ANISOTROPIC MULTI-LAYERED MEDIUM)

อาจารย์ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.ทับทิม อ่างแก้ว, 85 หน้า

ISBN 974-346-311-9

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาในการวิเคราะห์ปัญหาตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นไม่เอกพันธ์ เมื่อกำหนดให้คลื่นระนาบที่ตกกระทบในตัวกลางเป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์และมีมุมตกกระทบเป็นมุมใด ๆ ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่วิเคราะห์จะมีคุณสมบัติของค่าเทนเซอร์สภาพยอม เทนเซอร์ความซาบซึมได้และเทนเซอร์สภาพนำ ซึ่งมีสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่มีเฉพาะองค์ประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าแนวตามขวางสององค์ประกอบและเป็นความเข้มสนามไม่รู้ค่าที่แปรตามเวลาและระยะทาง เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดจะเป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบดุดกลืน ดังนั้นการหาผลเฉลยของความเข้มสนามไม่รู้ค่าทั้งสองนี้ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา จะประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 2 ขั้นตอนคือ โดเมนเชิงอวกาศและโดเมนเวลา โดยในโดเมนเชิงอวกาศจะใช้รูปแบบกาลเลอคิดนและใช้ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง อีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์จะมีความเข้มสนามไม่รู้ค่าสามตัวแปร ซึ่งจะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเทียบกับเวลา จากนั้นหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเทียบกับเวลาด้วยวิธีนิวมาร์ก-บีตาที่มีข้อดีคือ ทำให้ระบบสมการมีความเสถียรทุกเงื่อนไข โดยสุดท้ายจะได้ระบบสมการเชิงเส้นและหาผลเฉลยที่ขึ้นเวลาแต่ละชั้น ความเข้มสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้อาศัยในโดเมนเวลาซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในโดเมนความถี่ด้วยผลการแปลงฟูริเยร์

ผลการคำนวณแสดงการส่งผ่านของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกและแอนไอโซทรอปิกที่ขึ้นเวลาแต่ละชั้น ซึ่งจะพบว่าการสะท้อนที่เกิดขึ้นในตัวกลางจะมีการสะท้อนหลายครั้งและจะค่อย ๆ จางหายไป ส่วนความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในอวกาศว่างจะถูกดุดกลืนไปหรือไม่มีการสะท้อนกลับเมื่ออยู่ในตำแหน่งขอบเขต นอกจากนี้ยังแสดงผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนและสนามส่งผ่านที่เปลี่ยนแปลงแบบชั่วคราว และแสดงสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่แปรตามความถี่และมุมตกกระทบในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก การคำนวณมีความสอดคล้องกับงานวิจัยที่มีผู้นำเสนอในอดีต

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา 2543 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

3972832321 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING


KEY WORD: FINITE ELEMENT TIME DOMAIN / ANISOTROPIC / PLANE WAVE
/ ABSORBING BOUNDARY CONDITION /

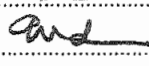
NUNTIYA NARIKAWID : FINITE ELEMENT-TIME DOMAIN
ANALYSIS OF PLANE WAVE TRANSMISSION IN AN ANISOTROPIC
MULTI-LAYERED MEDIUM. THESIS ADVISOR : ASSIST. PROF.
TUPTIM ANGKAEW. Ph.D.

85 pp. ISBN 974-346-311-9

This thesis presents a finite element time domain method for analyzing inhomogeneous anisotropic and multi-layered media that can be represented by a permittivity tensor, permeability tensor and conductivity tensor. Moreover, the media are exposed to an oblique incident gaussian pulse. The formulation of problem is in the second-order partial differential equations which have only two components of unknown fields in the term of transverse electrical fields with vary time and distance. The boundary condition of the problem is the form of absorbing boundary condition. To determine the solutions of unknown fields by using finite element time domain method, two separate experiments are performed. First, in spatial domain have been used Galerkin form and including second-order shape function with each element is expressed three unknowns. Next, in the time domain solving using Newmark-Beta schemes. Unconditional stability is achieved by using a modified Newmark-Beta. Finally, solving this linear system equations at each time step and the result of the calculation has the transverse electric fields in time domain. In frequency domain computed form the Fourier transform of the time domain.

The results of calculation show that for electric incident field propagation to isotropic and anisotropic media at each time step. The characteristics of such a propagation in media are multiple reflection and attenuation, while in free space the electric field is absorb or no reflect when it's in bounded. Furthermore to show the transient response of reflected fields and transmitted fields and the reflection coefficient vary with frequency and incident wave in anisotropic media. By this approach, the computation was found to be accurate and agree with research in the past.

Department Electrical Engineering Student's signature..... 

Field of study Electrical Engineering Advisor's signature..... 

Academic year 2000 Co-Advisor's signature.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงแด่ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้ให้คำปรึกษาชี้แนะแนวทางต่าง ๆ ตลอดจนจัดหาอุปกรณ์เพื่อการดำเนินการวิจัยอย่างครบถ้วน และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ฉัตรชัย ไวยภาพัฒนกร ที่ได้ให้คำชี้แนะแนวทางที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต ที่สนับสนุนในด้านการเรียน และอำนวยความสะดวกในการใช้อุปกรณ์ในการทำงานวิจัยและคุณปรมาโมทย์ จางอิสระกุล ที่กรุณาสละเวลาให้คำแนะนำต่องานวิจัย

ขอขอบคุณน้อง ๆ ห้องปฏิบัติการวิจัยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่อำนวยความสะดวกในการทำวิจัย

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ คุณยายและคุณแม่ของผู้วิจัย ที่สนับสนุนในด้านการเรียนและให้กำลังใจตลอดเวลาที่ได้ศึกษาอยู่

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญรูป.....	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ฎ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาของปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นของแผ่นตัวกลางหลายชั้น.....	1
1.2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา.....	3
1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	6
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	6
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	7
บทที่ 2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา.....	8
2.1 บทนำ.....	8
2.2 สมการคลื่น.....	9
2.3 เงื่อนไขขอบเขต.....	16
2.4 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์.....	19
2.5 การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเทียบกับเวลาด้วยวิธี นิวมาร์ก-บีตา.....	24
2.6 การวิเคราะห์สนามสะท้อนและสนามส่งผ่าน.....	26
2.7 การทดสอบความใช้ได้ (Validation) ของวิธีการ.....	27
2.7.1 การส่งผ่านคลื่นระนาบผ่านแผ่นไดอิเล็กทริก 1 ชั้น.....	27
2.7.2 การเลือกค่า ρ ที่เหมาะสมในการคำนวณตามวิธีนิวมาร์ก-บีตา.....	36
2.7.3 ความสัมพันธ์ของขนาดชั้นระยะทางและชั้นเวลา.....	37
2.8 สรุป.....	40

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 3 การวิเคราะห์ความเข้มสนามไฟฟ้าในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น.....	41
3.1 บทนำ.....	41
3.2 ผลการคำนวณ.....	41
ตัวอย่างที่ 1 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอม.....	41
ตัวอย่างที่ 2 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอม และมีแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ $z \geq L$	49
ตัวอย่างที่ 3 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพนำ.....	53
3.3 สรุป.....	60
บทที่ 4 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	61
4.1 บทนำ.....	61
4.2 สรุปผลการวิจัย.....	61
4.3 ข้อเสนอแนะ.....	64
รายการอ้างอิง.....	65
ภาคผนวก.....	69
ภาคผนวก ก.....	70
ภาคผนวก ข.....	77
ประวัติผู้เขียน.....	85

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่วิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 3.1.....	42
ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} ในตัวอย่างที่ 1.....	45
ตารางที่ 3.3 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} ในตัวอย่างที่ 2.....	49
ตารางที่ 3.4 คุณสมบัติของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีค่าสภาพนำในรูปเทนเซอร์.....	53
ตารางที่ 4.1 การกำหนดพารามิเตอร์ในการคำนวณและผลการคำนวณ.....	62



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญรูป

หน้า

รูปที่ 1.1	ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นเมื่อมีคลื่นระนาบมาตกกระทบ.....	1
รูปที่ 1.2	ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา.....	4
รูปที่ 2.1	การตกกระทบของคลื่นระนาบยังตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น.....	9
รูปที่ 2.2	ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบในอวกาศว่างที่มีโพลาริเซชันต่างกัน.....	17
รูปที่ 2.3	การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เมื่อความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบมีโพลาริเซชันขนาน.....	18
รูปที่ 2.4	การแบ่งอีลีเมนต์ในโดเมนของปัญหาที่พิจารณาตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์.....	19
รูปที่ 2.5	แสดงฟังก์ชันรูปร่างของอีลีเมนต์แต่ละช่วง.....	20
รูปที่ 2.6	หมายเลขโนดวงกว้าง (global node number).....	21
รูปที่ 2.7	ตำแหน่งโนด i_r และโนด i_b ที่เกิดสนามสะท้อนและสนามส่งผ่านในตัวกลาง.....	26
รูปที่ 2.8	ตัวอย่างการคำนวณกรณีคลื่นระนาบตกกระทบแผ่นไดอิเล็กทริก.....	28
รูปที่ 2.9	การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริก ที่แปรตามระยะทางและเวลา.....	30
รูปที่ 2.10	ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามของคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านในกรณีตัวอย่างของแผ่นไดอิเล็กทริกหนึ่งชั้น ที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 4.0.....	33
รูปที่ 2.11	การเปรียบเทียบผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา	35
รูปที่ 2.12	ผลของการเปลี่ยนแปลงค่า β ตามวิธีนิวมาร์ก-ปีตา.....	36
รูปที่ 2.13	การเปรียบเทียบความถูกต้องของสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในแผ่นไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 4.0 เมื่อกำหนดความสัมพัทธ์ตามเงื่อนไขของ Courant ต่างกัน.....	38
รูปที่ 2.14	การเปรียบเทียบความถูกต้องของสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในแผ่นไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 9.0 เมื่อกำหนดความสัมพัทธ์ตามเงื่อนไขของ Courant ต่างกัน.....	39
รูปที่ 3.1	แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอม.....	41

สารบัญรูป(ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.2	การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแอนไอโซทรอปิกสองชั้น ที่แปรตามระยะทางและเวลา เมื่อคุณสมบัติของตัวกลาง ดังแสดงในตารางที่ 3.1.....	43
รูปที่ 3.3	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น เมื่อคลื่นตกกระทบมีมุม 30 องศา.....	46
รูปที่ 3.4	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น เมื่อคลื่นตกกระทบมีมุม 45 องศา.....	47
รูปที่ 3.5	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น เมื่อคลื่นตกกระทบมีมุม 60 องศา.....	48
รูปที่ 3.6	แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอม และมีแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ $z \geq L$	49
รูปที่ 3.7	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่ $z \geq L$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ และกำหนดคลื่นตกกระทบมีมุม 30 องศา.....	50
รูปที่ 3.8	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มี $z \geq L$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และกำหนดคลื่นตกกระทบมีมุม 45 องศา.....	51
รูปที่ 3.9	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มี $z \geq L$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และกำหนดคลื่นตกกระทบมีมุม 60 องศา.....	52
รูปที่ 3.10	แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพนำ.....	53
รูปที่ 3.11	การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่แปรตามระยะทางและเวลาเมื่อคุณสมบัติของตัวกลางดังแสดงในตารางที่ 3.4.....	55
รูปที่ 3.12	ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้น.....	57
รูปที่ 3.13	การเปรียบเทียบความถูกต้องของขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} และ R_{12} ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาของ (Schneider and Hudson, 1993)	59

สารบัญรูป(ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.14	การเปรียบเทียบเฟสของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} และ R_{12} ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลาของ (Schneider and Hudson, 1993)	59
รูปที่ 4.1	การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลาในการวิเคราะห์ตัวกลางแบบไอโซทรอปิก 1 ชั้น	63
รูปที่ ก.1	ความเข้มสนามไฟฟ้าแต่ละโนดในตัวกลาง	71
รูปที่ ก.2	ระบบพิกัดทรงกลมในการกำหนดสนามตกกระทบ	74
รูปที่ ก.3	ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบที่เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์ในโดเมนเวลาและความถี่	75
รูปที่ ข.1	ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น	77
รูปที่ ข.2	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน $ R_{11} $ (เส้นทึบ) และ $ R_{12} $ (เส้นประ) ที่เปลี่ยนแปลงตาม $k_0 h / 2\pi$ เมื่อสนามตกกระทบตั้งฉาก	84
รูปที่ ข.3	ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน $ R_{11} $ (เส้นทึบ) และ $ R_{12} $ (เส้นประ) ที่เปลี่ยนแปลงตาม $k_0 h / 2\pi$ เมื่อสนามตกกระทบมีมุมตกกระทบเท่ากับ 45 องศา	84

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$	เวกเตอร์หน่วยในทิศทาง x, y, z
$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi$	เวกเตอร์หน่วยในทิศทาง r, θ, ϕ
c	ความเร็วของสนามไฟฟ้าในตัวกลาง
c_0	ความเร็วแสงเท่ากับ $3 \times 10^8 \text{ m/s}$
\mathbf{E}	เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าในโดเมนเวลา
\mathbf{H}	เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กในโดเมนเวลา
$\tilde{\mathbf{E}}$	เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าในโดเมนความถี่
$\tilde{\mathbf{H}}$	เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กในโดเมนความถี่
E_x, E_y, E_z	ความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x, y, z
$\tilde{\mathbf{E}}^{inc}$	ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ
$\tilde{\mathbf{H}}^{inc}$	ความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบ
$\tilde{\mathbf{E}}^{ref}$	ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อน
$\tilde{\mathbf{H}}^{ref}$	ความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นสะท้อน
\tilde{E}_x^{inc}	ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบแนวแกน x
\tilde{E}_y^{inc}	ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบแนวแกน y
E_t	ความเข้มสนามไฟฟ้าแนวตามขวาง
f	ความถี่
H_t	ความเข้มสนามแม่เหล็กแนวตามขวาง
j	สัญลักษณ์ของจำนวนจินตภาพ ($= \sqrt{-1}$)
k	ตำแหน่งโนด
k_0	เลขคลื่นในอวกาศว่าง
n	ขั้นเวลา (time steps)
N	จำนวนโนดทั้งหมด
N_i	ฟังก์ชันรูปร่างบนโนด i
$R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$	สัมประสิทธิ์การสะท้อน
t	เวลา
T	สัมประสิทธิ์การส่งผ่าน
T	ตัวสลับเปลี่ยน (transpose)

คำอธิบายสัญลักษณ์(ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
U_p	ฟังก์ชันทดสอบ
μ_0	ความซาบซึมได้ของอวกาศว่าง
μ_r	ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของตัวกลาง
$\bar{\mu}$	เทนเซอร์ความซาบซึมได้
$\bar{\epsilon}$	เทนเซอร์สภาพยอม
$\bar{\sigma}$	เทนเซอร์สภาพนำ
ϵ_0	สภาพยอมของอวกาศว่าง
ϵ_r	สภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง
σ	สภาพนำ
ω	ความถี่เชิงมุม
θ	มุมตกกระทบ
ϕ, ψ	ความเข้มสนามไฟฟ้าไม่รู้ค่าแนวแกน x, y ตามลำดับ
Δt	ขนาดขั้นเวลา (time step size)
Δz	ขนาดขั้นระยะทาง (spatial step size)
η	อิมพีแดนซ์ของอวกาศว่าง
∇	ตัวดำเนินการเดล

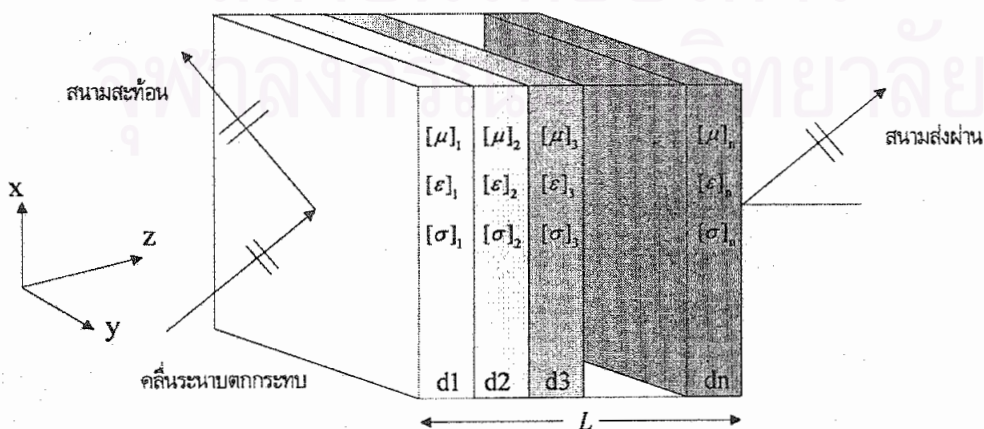
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาของปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นของแผ่นตัวกลางหลายชั้น

การศึกษาคุณลักษณะของการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เมื่อมีคลื่นระนาบตกกระทบยังแผ่นตัวกลางหลายชั้นดังแสดงในรูปที่ 1.1 เป็นปัญหาพื้นฐานที่ยังคงมีความสำคัญ เนื่องจากสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลายงาน อาทิเช่น การออกแบบวัสดุที่ยอมให้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าผ่านได้ที่ความถี่บางค่าหรือการออกแบบวัสดุให้มีการสะท้อนคลื่นออกมาในช่วงความถี่ที่ต้องการ เป็นต้น วัสดุที่นำมาใช้ในงานวิศวกรรมส่วนมากจะเป็นตัวนำหรือไดอิเล็กทริก ซึ่งวัสดุส่วนใหญ่มีคุณสมบัติทางไฟฟ้าเป็นแบบไอโซทรอปิก (isotropic) แต่ทว่าในปัจจุบันนี้ได้เริ่มมีการนำวัสดุที่ประกอบจากวัสดุหลายชนิดหรือที่เรียกว่าวัสดุประกอบ (composite material) มาใช้ทดแทนตัวนำหรือไดอิเล็กทริก เนื่องจากมีน้ำหนักเบาและแข็งแรง ตัวอย่างวัสดุเหล่านี้ได้แก่ วัสดุประกอบจากแกรไฟต์/อีพอกซี (graphite/epoxy) และโบรอน/อีพอกซี (boron/epoxy) คุณสมบัติทางแม่เหล็กไฟฟ้าของวัสดุประกอบสามารถจัดอยู่ในประเภทแอนไอโซทรอปิก (anisotropic) นอกเหนือไปจากนี้แล้วยังมีวัสดุอีกหลายชนิดที่มีคุณสมบัติทางแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นแบบแอนไอโซทรอปิกตามธรรมชาติ เช่น สารกึ่งตัวนำ และผลึกแก้ว (crystal) ต่าง ๆ ซึ่งสามารถนำมาใช้งานในย่านความถี่แสง เราพบว่าการใช้งานวัสดุแบบแอนไอโซทรอปิกกำลังเพิ่มเป็นลำดับ ทั้งนี้เพราะการใช้วัสดุแบบแอนไอโซทรอปิก ทำให้เกิดนวัตกรรมใหม่เกี่ยวกับการใช้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างกว้างขวางตั้งแต่งานในย่านความถี่ต่ำจนถึงงานในย่านแสง อีกทั้งยังสามารถนำไปใช้วิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในธรรมชาติที่ตัวกลางมีคุณสมบัติเป็นแบบแอนไอโซทรอปิก เช่น หมอก หรือ ฝน การวิเคราะห์ปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นเมื่อมีคลื่นตกกระทบยังตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่มีลักษณะเป็นแผ่นซ้อนกันหลายชั้นเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจมากเช่นกัน และได้มีผู้เสนอวิธีการวิเคราะห์ไว้หลายวิธี วิธีการวิเคราะห์ที่นำเสนอสามารถแบ่งได้เป็น 2 แนวทางคือ แนวทางที่ใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method)



รูปที่ 1.1 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นเมื่อมีคลื่นระนาบมาตกกระทบ

(Teither and Henvis, 1970) ได้เสนอระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นผ่านแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกโดยใช้การแก้สมการเมทริกซ์ถ่ายทอด (transition matrix) ขนาด 4×4 ซึ่งวิธีของ Teither และ Henvis สามารถใช้ได้ในกรณีตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกชั้นเดียว ต่อมา (Barkovskii and Borzdov, 1978) ได้เสนอระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ที่สามารถประยุกต์ใช้กับตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น (Morgan et al., 1987) ได้เสนอระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ที่ใหม่ที่คำนวณได้เร็วกว่าเดิมโดยใช้การประมาณแบบผลต่างสี่เหลี่ยมร่วมด้วย อย่างไรก็ตามรูปสมการก็ยังคงอยู่ในรูปของเมทริกซ์ขนาด 4×4 ต่อมา (Titchener and Willis, 1991) ได้เสนอระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งมีขนาดเมทริกซ์ลดลงครึ่งหนึ่งของงานที่ผ่านมา และยังมีข้อดีในแง่ของการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต โดยการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตตามวิธีของ Titchener and Willis จะทำที่จุดเดียวคือจุดแรกที่คลื่นตกกระทบ และจุดสุดท้ายที่คลื่นส่งผ่านออกไป ซึ่งต่างจากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ที่ได้กล่าวในข้างต้นซึ่งต้องพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อระหว่างตัวกลางทุกชั้น ในวิธีของ Titchener and Willis ก็ยังคงมีการใช้การประมาณแบบผลต่างสี่เหลี่ยมร่วมด้วยบางส่วน อย่างไรก็ตามการใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในการแก้ปัญหาสะท้อนและส่งผ่านคลื่นของแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกจะทำให้ประสบปัญหาในการคำนวณเมื่อจำนวนชั้นของตัวกลางเพิ่มมากขึ้น

ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้เสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อวิเคราะห์ปัญหาอีกแนวทางหนึ่ง ประกอบกับการพัฒนาของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ในช่วงปี ค.ศ. 1900 เป็นต้นมา ทำให้มีความเป็นไปได้ที่จะนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาวิเคราะห์ปัญหาที่ยากขึ้นกว่าเดิม กล่าวคือ การวิเคราะห์ปัญหาในโดเมนเวลา (time domain) เพื่อให้สามารถศึกษาพฤติกรรมของคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เมื่อมีการป้อนคลื่นตกกระทบที่แปรตามเวลาในลักษณะต่าง ๆ ให้ อีกทั้งยังสามารถนำวิธีไปใช้วิเคราะห์ในกรณีที่คลื่นตกกระทบมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบชั่วคราว (transient) และถ้าต้องการผลตอบสนองทางความถี่ (frequency response) ในช่วงกว้างก็สามารถทำได้โดยการแปลงผลตอบสนองอิมพัลส์ (impulse response) จากโดเมนเวลาไปยังโดเมนความถี่ด้วยการแปลงฟูริเยร์ ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนเวลาคือ วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมในโดเมนเวลา (Finite Difference Time Domain: FDTD) ซึ่งมีอัลกอริทึมในการคำนวณแบบตรงไปตรงมาและให้ผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กได้ทันทีเมื่อคำนวณผลเฉลยออกมาในแต่ละช่วงเวลา ดังนั้นจึงทำให้เห็นภาพของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาได้สะดวก

(Schneider and Hudson, 1993) ได้เสนอวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมในโดเมนเวลา สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีตัวกลางเป็นแบบแอนไอโซทรอปิก Schneider and Hudson ได้เสนอตัวอย่างการประยุกต์ใช้วิธี FDTD กับกรณีคลื่นที่ตกกระทบยังแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นและนำผลการคำนวณในกรณีตัวอย่างไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) ผลที่ได้มีความสอดคล้องกันดี อย่างไรก็ตามวิธีของ Schneider and Hudson ได้พิจารณาเฉพาะกรณีที่สภาพยอมทางไฟฟ้า (permittivity) และสภาพนำไฟฟ้า (conductivity) เป็นเทนเซอร์เท่านั้น ยังไม่ครอบคลุมถึงกรณีที่ค่าความซบซึ่มได้ (permeability) เป็นเทนเซอร์ด้วย ในช่วงเวลาที่ใกล้เคียงกัน (Ming et al., 1993) ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์

ปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นของวัสดุประกอบซึ่งจัดเป็นวัสดุแบบแอนไอโซทรอปิก โดยใช้วิธี FDTD ร่วมกับแนวคิดของวงจรสายส่งสมมูล (equivalent-transmission-line-circuit: ETLC) Ming et al. ได้นำผลการคำนวณในโดเมนความถี่ไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ ผลการเปรียบเทียบพบที่มีความสอดคล้องกันดี อย่างไรก็ตามวิธีของ Ming et al. ก็ยังไม่ครอบคลุมถึงกรณีที่มีความซับซ้อนได้เป็นแทนเซอร์

1.2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา

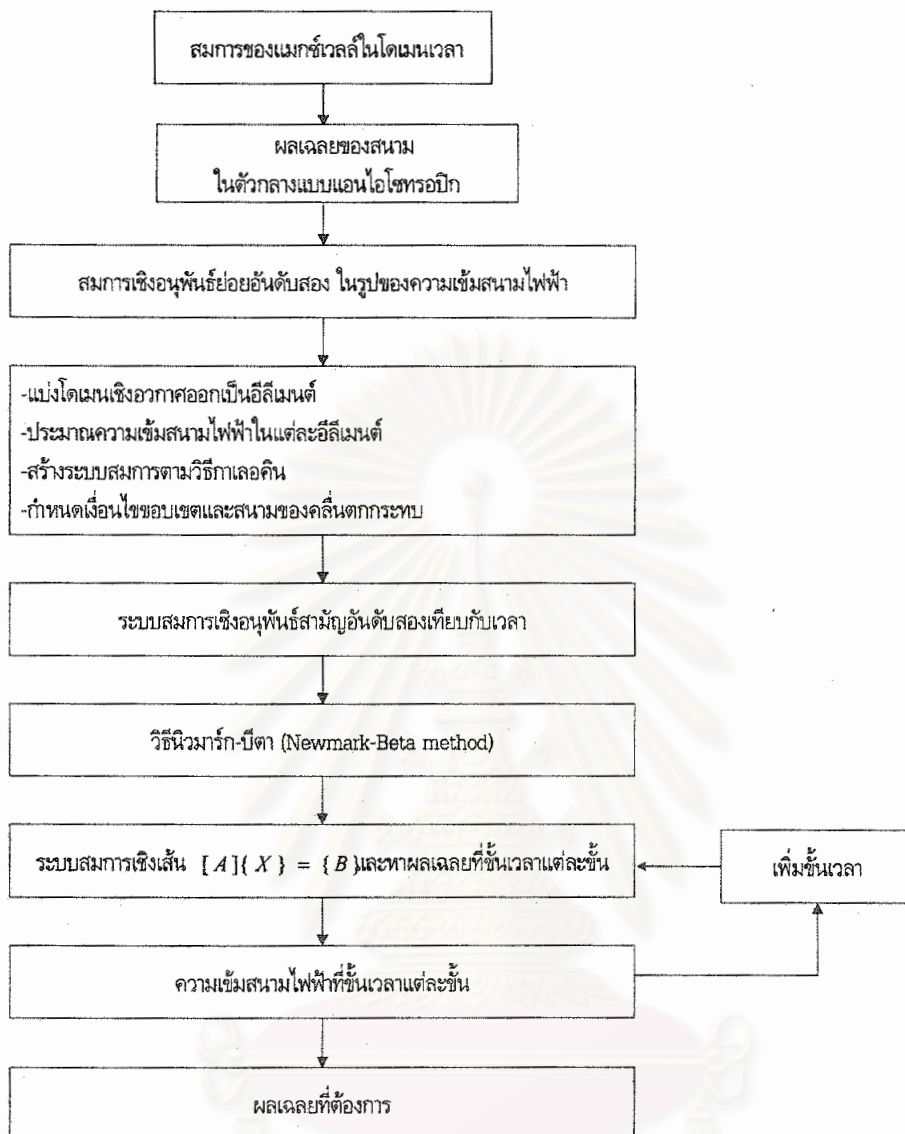
การวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนเวลาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งมีผู้นิยมเช่นกัน คือการใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา (finite element time domain: FETD) อาทิเช่น งานวิจัยของ (Ali and Costache, 1994), (Cangellaris, Mei and Lin, 1987), (Gedney and Navsariwala, 1995), (Lee and Sacks, 1995) ข้อได้เปรียบของการใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ประการหนึ่งคือ การที่สามารถใช้กับโดเมนที่มีรูปร่างแบบไม่เจาะจงได้ ซึ่งทำให้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ได้เปรียบกว่าวิธีผลต่างสลับเนื่อง เนื่องจากการแบ่งโดเมนในวิธีผลต่างสลับต้องแบ่งโดเมนออกเป็นช่วงความยาว พื้นที่สี่เหลี่ยมหรือลูกบาศก์ ที่มีขนาดเท่ากันทุกเซลล์ จึงจะคำนวณได้สะดวก

การวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา มีขั้นตอนโดยทั่วไปดังแสดงในรูปที่ 1.2 เริ่มจากสมการของแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \bar{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (1.2)$$

โดยที่	\mathbf{E}	คือ เวกเตอร์สนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตาม x, y, z, t ในหน่วย โวลต์ต่อเมตร (V/m)
	\mathbf{H}	คือ เวกเตอร์สนามแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงตาม x, y, z, t ในหน่วย แอมแปร์ต่อเมตร (A/m)
	$\bar{\mu}$	คือ เทนเซอร์ความซับซ้อนได้ของตัวกลาง ในหน่วย เฮนรีต่อเมตร (H/m)
	$\bar{\epsilon}$	คือ เทนเซอร์สภาพยอมของตัวกลาง ในหน่วย ฟารัดต่อเมตร (F/m)
	$\bar{\sigma}$	คือ เทนเซอร์สภาพนำของตัวกลาง ในหน่วย ซีเมนต์ต่อเมตร (S/m)
	ω	คือ ความถี่เชิงมุมมีค่าเท่ากับ $2\pi f$ (f คือความถี่) ในหน่วย เรเดียนต่อวินาที



รูปที่ 1.2 ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา

เมื่อแทนผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กที่อยู่ในรูปที่ต้องการลงในสมการของแมกซ์เวลล์ ซึ่งก็คือสมการ (1.1) และ (1.2) และจัดรูปใหม่เพื่อแสดงสมการคลื่นให้อยู่ในรูปของความเข้มสนามไฟฟ้า จะได้สมการ

$$\frac{\partial^2 [E]}{\partial z^2} = [S] \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial [E]}{\partial t} \right) + [T] \frac{\partial^2 [E]}{\partial t^2} + [C] \frac{\partial [E]}{\partial t} \quad (1.3)$$

โดยที่

$$[E] = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ $[S]$, $[T]$ และ $[C]$ มีขนาด 3×3 โดยสมาชิกสามารถแสดงอยู่ในรูปเทนเซอร์ความสามซึมได้ เทนเซอร์สภาพยอมและเทนเซอร์สภาพนำของตัวกลาง เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องทำให้ส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวสัมผัสผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางมีความต่อเนื่องกัน ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลาง} \\ \text{ที่ผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์} \end{array} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{ที่ผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์} \quad (1.5)$$

โดยที่ \mathbf{n} คือเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับรอยต่อจากตัวกลางหนึ่งมาสองและ $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ คือเวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าและเวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กในตัวกลางที่หนึ่งและสองตามลำดับ การหาผลเฉลยของส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x, y และแนวแกน z ตามระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ จะเริ่มจากการแบ่งโดเมนเชิงอวกาศออกเป็นชั้นบริเวณย่อย ที่เรียกว่าอีลีเมนต์ และประมาณฟังก์ชันของความเข้มสนามไฟฟ้าที่แปรตามตำแหน่งด้วยฟังก์ชันโพลีโนเมียลและตัวแปรไม่ทราบค่า ดังสมการ

$$E_x(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) N_i(x, y, z) \quad (1.6)$$

$$E_y(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(t) N_i(x, y, z) \quad (1.7)$$

$$E_z(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) N_i(x, y, z) \quad (1.8)$$

โดยที่ $\phi_i(t), \psi_i(t)$ และ $\varphi_i(t)$ คือตัวแปรไม่ทราบค่า เมื่อแทนฟังก์ชันของส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าตามสมการ (1.6), (1.7) และ (1.8) ลงในสมการ (1.3) และสร้างระบบสมการเชิงเส้น (linear system equation) โดยใช้วิธีการเลอคิน (Galerkin method) ผลที่ได้คือระบบสมการที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองของเวลาดังนี้

$$[T] \frac{d^2[X]}{dt^2} + [S] \frac{d[X]}{dt} + [K][X] = [f] \quad (1.9)$$

โดยที่

$$[X] = \begin{bmatrix} \{\phi\} \\ \{\psi\} \\ \{\phi\} \end{bmatrix}$$

การหาผลเฉลยของสมการ (1.9) สามารถทำได้หลายวิธี อาทิเช่น วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมหรือวิธีนิวมาร์ก-บีตา (Newmark method) อย่างไรก็ตามผลสุดท้ายที่ต้องการ คือระบบสมการที่สามารถหาผลเฉลยได้ตามเวลาที่เพิ่มขึ้นเป็นลำดับขั้น กล่าวคือ ผลสุดท้ายที่ต้องการคือ สมการที่อยู่ในรูปดังนี้

$$[A][X]^{n+1} = [B] \quad (1.10)$$

ในที่นี้ $[X]^{n+1}$ คือเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรไม่ทราบค่าที่เวลาในอนาคตหนึ่งขั้นเวลา $[B]$ เป็นเมทริกซ์ที่หาได้จากค่า $[X]$ ณ เวลาปัจจุบันและอดีต ระบบสมการเชิงเส้น (1.10) มีจำนวนครั้งของการหาผลเฉลยเท่ากับจำนวนขั้นเวลาที่ต้องการและจะหาที่ขั้นเวลาแต่ละขั้นต่อเนื่องกันไป ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในโดเมนเวลา

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

จากการค้นคว้าเอกสารอ้างอิงผู้เสนอวิทยานิพนธ์พบว่า ถึงแม้จะมีผู้เสนอวิธี FETD ออกมาวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนเวลาที่มีลักษณะต่าง ๆ กันแล้วก็ตาม แต่ก็ยังไม่มีการวิจัยที่เสนอวิธีวิเคราะห์ปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นโดยใช้วิธี FETD โดยตรง ด้วยเหตุนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงมีความสนใจที่จะศึกษาการวิเคราะห์ปัญหานี้โดยใช้วิธี FETD อีกทั้งยังพบว่างานวิจัยที่เสนอวิธีวิเคราะห์โดยใช้ FDTD ยังไม่สามารถใช้ได้ครอบคลุมถึงกรณีที่มีความซับซ้อนได้เป็นเทนเซอร์ ดังนั้นผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงต้องการขยายขอบเขตของวิธีให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ครอบคลุมได้มากกว่างานวิจัยอื่นที่มีผู้เสนอมมาแล้ว เหตุผลอีกประการหนึ่งที่เลือกวิธีวิเคราะห์โดยใช้ FETD คือวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สามารถนำไปใช้ในกรณีที่มีความหนาของชั้นตัวกลางไม่สม่ำเสมอได้เป็นอย่างดี จากเหตุผลทั้งสามข้อดังกล่าวข้างต้น ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงมุ่งเน้นการศึกษาไปยังการเสนอวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น โดยใช้วิธี FETD

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

งานวิจัยในวิทยานิพนธ์จะกำหนดขอบเขตของปัญหาให้เป็นการตกกระทบของคลื่นระนาบจากอวกาศว่างเข้าสู่แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น โดยถือว่าแผ่นตัวกลางมีพื้นที่เป็นอนันต์ มุมตกกระทบที่ทำกับเส้นตั้งฉากมีค่าใด ๆ ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา จากนั้นจะถือว่าคลื่นที่อยู่ในตัวกลางแต่ละชั้นเป็นคลื่นระนาบ การหาผลเฉลยของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในบริเวณตัวกลางแต่ละชั้นจะดำเนินตามขั้นตอนของวิธี FETD ดังแสดงในหัวข้อ 1.2 เมื่อได้ผลเฉลยของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแล้ว ก็จะนำผลที่ได้มาพิจารณาคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านที่เกิดขึ้น โดยจะแสดงในรูปของค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและค่าสัมประสิทธิ์การ

ส่งผ่านที่แปรตามความถี่ เพื่อเป็นการทดสอบความใช้การได้ของวิธีที่นำเสนอ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์เปรียบเทียบ ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณกับผลที่ได้จากการคำนวณของวิธีอื่น เช่น ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ และวิธีผลต่าง สืบเนื่องในโดเมนเวลา โดยการเปรียบเทียบจะใช้ตัวอย่างที่ทราบผลเฉลยที่อยู่แล้ว นอกจากนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ศึกษาเกี่ยวกับความแม่นยำตรงของผลเฉลยที่ได้จากวิธี FETD ว่ามีการแปรเปลี่ยนตามพารามิเตอร์ใดบ้าง จากนั้นจึงคำนวณเปรียบเทียบผลในกรณีตัวอย่างอื่นอีกหลายกรณี เพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีที่นำเสนอ สามารถใช้การได้ดี และสุดท้ายได้มีการเปรียบเทียบความแม่นยำตรงของผลเฉลยที่ได้ระหว่างวิธี FETD และ FDTD เพื่อหาข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีที่นำเสนอ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้แบ่งเป็น 4 บท ดังนี้

บทที่ 1 บทนำ

บทนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาของงานวิทยานิพนธ์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาโดยสังเขป และ วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

บทที่ 2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา

บทนี้เป็นการกล่าวถึงรายละเอียดของวิธี FETD ที่นำเสนอในงานวิทยานิพนธ์ เพื่อหาผลเฉลยของ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าของปัญหาสะท้อนและส่งผ่านคลื่นของแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก ตาม ระเบียบวิธี FETD และการทดสอบความใช้การได้ของวิธีที่นำเสนอ

บทที่ 3 การวิเคราะห์ความเข้มสนามไฟฟ้าในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น

บทนี้จะแสดงตัวอย่างการคำนวณหลายตัวอย่าง พร้อมผลการเปรียบเทียบกับวิธีอื่น และผลของการ เปลี่ยนมุมตกกระทบ เป็นต้น

บทที่ 4 สรุปผลและข้อเสนอแนะ

บทนี้จะเป็นการสรุปผลสำคัญที่ได้จากงานวิทยานิพนธ์ และข้อเสนอแนะสำหรับผู้สนใจต่อไป

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ผลจากงานวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ศึกษาปัญหาการแพร่กระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าผ่าน แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น ดังนี้

1. วิธีที่เสนอในวิทยานิพนธ์ เป็นแนวทางหนึ่งในการหาผลเฉลยของความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนเวลาที่สามารถนำไปใช้กับกรณีที่มีจำนวนชั้นของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น ซึ่งไม่สะดวกที่จะคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์
2. วิธีที่นำเสนอสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ ในกรณีของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกได้อย่างกว้างขวาง ทั้งในกรณีของตัวกลางที่เป็นแบบแอนไอโซทรอปิกทางไฟฟ้าและแอนไอโซทรอปิกทางแม่เหล็ก รวมทั้งตัวกลางที่มีการสูญเสีย (lossy medium)
3. วิธีที่เสนอสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่คลื่นตกกระทบแปรตามเวลาแบบชั่วคราว ซึ่งต้องอาศัยการวิเคราะห์ในโดเมนเวลา จึงจะเห็นภาพชัดเจน
4. วิธีที่นำเสนอสามารถนำไปใช้ในการออกแบบแผ่นระนาบ ซึ่งอาจทำจากวัสดุหลายชั้น เพื่อจุดประสงค์ ในการกรองคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า หรือดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงความถี่ที่ต้องการ

บทที่ 2

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา

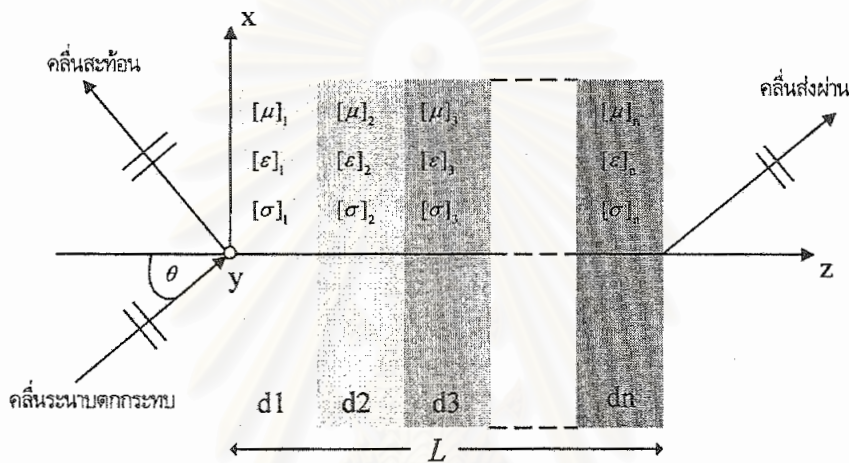
2.1 บทนำ

บทนี้เป็น การนำเสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาที่ผู้เสนอวิทยานิพนธ์นำมาใช้วิเคราะห์ผลเฉลยของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเมื่อมีการตกกระทบของคลื่นระนาบยังชั้นของแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก การนำเสนอจะเริ่มต้นจากการพิจารณาโครงสร้างของปัญหาและสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก สมการที่ได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของเวลาและตำแหน่งตามแกนระยะทางหนึ่งมิติ จากนั้นผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้นำเสนอวิธีพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ของปัญหา การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขตจะใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เพื่อแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ ทำให้มีความเหมาะสมในการคำนวณโดยใช้คอมพิวเตอร์

ตามหลักการพื้นฐานของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้น เราจะแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนย่อยที่เรียกว่า "อีลีเมนต์ (element)" อย่างเช่นในงานวิทยานิพนธ์นี้ โดเมนของปัญหาคือแกนเวลาและแกนตำแหน่งในหนึ่งมิติ การแบ่งโดเมนตามแกนตำแหน่งนั้นสามารถทำได้ แต่ว่าการแบ่งโดเมนตามแกนเวลานั้นจำเป็นต้องแบ่งจำนวนอีลีเมนต์ทางแกนเวลาเป็นจำนวนมาก หากต้องการคำนวณผลตอบสนองทางความถี่ (frequency response) ทั้งนี้เพราะช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณต้องนานมากพอเพื่อให้ได้ข้อมูลอย่างเพียงพอสำหรับผลการแปลงฟูริเยร์อย่างรวดเร็ว (fast Fourier transform) สำหรับการแปลงผลเฉลยจากโดเมนเวลาไปเป็นโดเมนความถี่ ด้วยเหตุนี้การคำนวณทางแกนเวลาจึงจำเป็นต้องคำนวณในลักษณะของการหาผลเฉลย ณ เวลาที่เพิ่มขึ้นทีละขั้นเวลา (time step) โดยผลเฉลยในเวลาปัจจุบันจะคำนวณจากผลเฉลยในอดีตหนึ่งขั้นเวลา จากนั้นผลเฉลยในเวลาปัจจุบันก็จะถูกนำไปใช้คำนวณหาผลเฉลยในอนาคตที่ขั้นเวลาถัดไป การคำนวณจะทำต่อกันไปที่ละขั้นตั้งแต่เวลาเริ่มต้นจนถึงเวลาสุดท้ายที่ต้องการ วิธีการคำนวณทางแกนเวลาในลักษณะดังกล่าวมีหลายวิธี (Hughes, 1987: 490-564) แต่วิธีที่ได้รับความนิยมคือวิธีนิวมาร์ก-บีตา ทั้งนี้เนื่องจากวิธีนิวมาร์ก-บีตาเป็นอัลกอริทึมที่ทำให้การคำนวณมีเสถียรภาพเมื่อคำนวณติดต่อกันไปเป็นเวลานาน ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้เลือกวิธีนิวมาร์ก-บีตา มาใช้ในการคำนวณทางแกนเวลาสำหรับปัญหาในวิทยานิพนธ์ ดังที่จะกล่าวต่อไปในบทนี้และเพื่อเป็นการทดสอบความถูกต้อง ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้คำนวณหาผลเฉลยของปัญหาที่เป็นกรณีตัวอย่าง โดยเลือกตัวอย่างที่เป็นปัญหาซึ่งทราบผลเฉลยดีแล้ว อีกทั้งยังได้ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของอีลีเมนต์ตามแกนตำแหน่งกับระยะเวลาของขั้นเวลาแต่ละขั้น ซึ่งต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข Courant ว่ามีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยหรือไม่ จากผลการคำนวณในตัวอย่าง พบว่าผลการคำนวณที่ได้สอดคล้องกับผลเฉลยที่ได้อันวิเคราะห

2.2 สมการคลื่น

ขอให้พิจารณาปัญหาการตกกระทบของคลื่นระนาบจากบริเวณอวกาศว่าง (free space) ไปยังแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นซึ่งมีความหนาเท่ากับ L เมตร ดังรูปที่ 2.1 กำหนดให้แผ่นตัวกลางแต่ละชั้นมีความหนาเท่ากับ d_i ($i=1,2,3,\dots,n$) และถือว่าพื้นที่ของแผ่นตัวกลางเป็นอนันต์ เราจะให้แผ่นตัวกลางอยู่ในบริเวณ $0 \leq z \leq L$ ของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinates) คลื่นตกกระทบในบริเวณ $z < 0$ มีทิศทางการแพร่กระจายอยู่ในระนาบ $x-z$ และตกกระทบจะทำมุม θ กับเส้นตั้งฉากของผิวตัวกลาง เราเรียกระนาบ $x-z$ ว่าระนาบของการตกกระทบ (plane of incidence)



รูปที่ 2.1 การตกกระทบของคลื่นระนาบยังตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น

การตกกระทบของคลื่นจะทำให้เกิดคลื่นสะท้อน (reflected wave) ขึ้นในบริเวณ $z < 0$ และคลื่นส่งผ่าน (transmitted wave) ในบริเวณ $z > L$ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะต้องสอดคล้องกับสมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equations)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \bar{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.4)$$

ในที่นี้ $\bar{\mu}$, $\bar{\epsilon}$ และ $\bar{\sigma}$ คือเทนเซอร์ความซึมได้ (permeability tensor), เทนเซอร์สภาพยอม (permittivity tensor) และเทนเซอร์สภาพนำ (conductivity tensor) ตามลำดับ เราสามารถแสดง $\bar{\mu}$, $\bar{\epsilon}$ และ $\bar{\sigma}$ ในรูปเมทริกซ์ 3×3 ได้ดังนี้

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad H/m \quad (2.5)$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad F/m \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S/m \quad (2.7)$$

ในวิชยานิพนธ์นี้จะกำหนดให้ $\bar{\mu}$, $\bar{\epsilon}$ และ $\bar{\sigma}$ มีค่าเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งเท่านั้น และการกำหนดให้เทนเซอร์สภาพนำเป็นดังสมการ (2.7) ก็เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ในกรณีที่ตัวกลางมีสภาพนำเฉพาะในทิศทางตามแนวแกน x และแนวแกน y เท่านั้น

จากโครงสร้างของปัญหาที่วิเคราะห์ดังรูปที่ 2.1 เราจะพบว่าสามารถให้ $\partial/\partial y = 0$ ได้เนื่องจากกำหนดให้แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกมีพื้นที่เป็นอนันต์ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าแปรตามพิกัด (x, z) และเวลา t เพื่อให้การวิเคราะห์ปัญหาสามารถทำได้ง่ายขึ้น ผู้เสนอวิชยานิพนธ์จะพิจารณาสมการในรูปโดเมนความถี่ก่อนแล้วจึงแปลงสมการที่ได้กลับไปอยู่ในโดเมนเวลาตามเดิม

เริ่มต้นขอให้พิจารณาการแปลงฟังก์ชันความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็ก จากโดเมนเวลา (time-domain) ไปยังโดเมนความถี่ (frequency-domain) โดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ (Fourier transform) ดังสมการต่อไปนี้

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, z, t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.8a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(x, z, t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(x, z, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.8c)$$

$$\mathbf{H}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{H}}(x, z, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.8d)$$

เมื่อแปลงสมการ (2.1) และ (2.2) ให้อยู่ในรูปโดเมนความถี่ และใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (2.8a) และ (2.8b) แล้ว เราจะได้ว่า

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = j\omega\bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \quad (2.9a)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -j\omega\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.9b)$$

ขอให้พิจารณาคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนในบริเวณ $z < 0$ โดยกำหนดให้ทิศทางการแพร่กระจายของคลื่นตกกระทบอยู่ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วย $\mathbf{a} = \sin\theta\mathbf{a}_x + \cos\theta\mathbf{a}_z$ ฟังก์ชันของคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนแสดงได้ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{E}}^{inc} = \mathbf{E}_0 e^{j(k_0 x \sin\theta + k_0 z \cos\theta)} \quad (2.10a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^{inc} = \mathbf{H}_0 e^{j(k_0 x \sin\theta + k_0 z \cos\theta)} \quad (2.10b)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{ref} = \mathbf{E}_r e^{j(k_r x + k_r z)} \quad (2.10a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^{ref} = \mathbf{H}_r e^{j(k_r x + k_r z)} \quad (2.10b)$$

ในที่นี้ $\tilde{\mathbf{E}}^{inc}$, $\tilde{\mathbf{H}}^{inc}$, $\tilde{\mathbf{E}}^{ref}$, และ $\tilde{\mathbf{H}}^{ref}$ คือความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ, ความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบ, ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อน และความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นสะท้อนตามลำดับ \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_r , \mathbf{H}_0 และ \mathbf{H}_r คือ เวกเตอร์คงตัว (constant vector), $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ คือ เลขคลื่นในอวกาศว่าง (free space wave number), ω คือความถี่เชิงมุม, ϵ_0 คือสภาพยอมของอวกาศว่างและ μ_0 คือความซึมซับได้ของอวกาศว่าง

ถ้าเราแสดงความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นระนาบในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกในบริเวณ $0 < z < L$ ในรูปต่อไปนี้แล้ว

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_a e^{j(k_x x + k_z z)} \quad (2.11a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_a e^{j(k_x x + k_z z)} \quad (2.11b)$$

เราก็จะพบว่าที่ระนาบ $z=0$ นั้น ส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในทิศทางที่สัมผัสผิวดังนั้นรอยต่อระหว่างอากาศว่างและแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก จะต้องมีความต่อเนื่องในทั้งสองตัวกลางตามเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ด้วยเหตุนี้เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ระนาบ $z=0$ แล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_0 e^{j(k_0 x \sin \theta)} + \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_r e^{j(k_{rx} x)} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_a e^{j(k_x x)} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_0 e^{j(k_0 x \sin \theta)} + \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_r e^{j(k_{rx} x)} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_a e^{j(k_x x)} \quad (2.13b)$$

ในที่นี้ \mathbf{a}_z คือเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบ $z=0$

ตามความสัมพันธ์ในสมการ (2.13a) และ (2.13b) เราจะพบว่าเฟสของพจน์ทุกตัวในสมการจะต้องเท่ากัน ดังนั้นเราจึงต้องให้

$$k_0 \sin \theta = k_{rx} = k_x \quad (2.14)$$

ผลที่ได้จากสมการ (2.14) แสดงให้เห็นว่า การเปลี่ยนแปลงของ $\tilde{\mathbf{E}}$ และ $\tilde{\mathbf{H}}$ ตาม x จะอยู่ในรูปของ $e^{jk_0 x \sin \theta}$ ดังนั้นเราจึงสามารถให้ $\tilde{\mathbf{E}}$ และ $\tilde{\mathbf{H}}$ แสดงอยู่ในรูปดังสมการต่อไปนี้

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, z, \omega) = (\tilde{E}_x(z)\mathbf{a}_x + \tilde{E}_y(z)\mathbf{a}_y + \tilde{E}_z(z)\mathbf{a}_z) e^{jk_0 x \sin \theta} \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, z, \omega) = (\tilde{H}_x(z)\mathbf{a}_x + \tilde{H}_y(z)\mathbf{a}_y + \tilde{H}_z(z)\mathbf{a}_z) e^{jk_0 x \sin \theta} \quad (2.15b)$$

เมื่อแทน $\tilde{\mathbf{E}}$ และ $\tilde{\mathbf{H}}$ จากสมการ (2.15a) และ (2.15b) ลงในสมการ (2.9a) และ (2.9b) แล้ว จะได้ผลเป็นชุดสมการจำนวน 6 สมการดังนี้

$$-\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = j\omega(\mu_{xx}\tilde{H}_x + \mu_{xy}\tilde{H}_y + \mu_{xz}\tilde{H}_z) \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} - jk_0 \sin \theta \tilde{E}_z = j\omega(\mu_{yx}\tilde{H}_x + \mu_{yy}\tilde{H}_y + \mu_{yz}\tilde{H}_z) \quad (2.16b)$$

$$jk_0 \sin \theta \tilde{E}_y = j\omega(\mu_{xx}\tilde{H}_x + \mu_{yy}\tilde{H}_y + \mu_{zz}\tilde{H}_z) \quad (2.16c)$$

$$-\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = -j\omega(\epsilon_{xx}\tilde{E}_x + \epsilon_{xy}\tilde{E}_y + \epsilon_{xz}\tilde{E}_z) + \sigma_{xx}\tilde{E}_x + \sigma_{xy}\tilde{E}_y \quad (2.16d)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - jk_0 \sin \theta \tilde{H}_z = -j\omega(\epsilon_{yx}\tilde{E}_x + \epsilon_{yy}\tilde{E}_y + \epsilon_{yz}\tilde{E}_z) + \sigma_{yx}\tilde{E}_x + \sigma_{yy}\tilde{E}_y \quad (2.16e)$$

$$jk_0 \sin \theta \tilde{H}_y = -j\omega(\epsilon_{xx}\tilde{E}_x + \epsilon_{yy}\tilde{E}_y + \epsilon_{zz}\tilde{E}_z) \quad (2.16f)$$

ตามสมการ(2.16c) และ (2.16f) เราสามารถแสดงส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในทิศทาง z ให้อยู่ในรูปของส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในทิศทาง x และ y ได้ดังนี้

$$\tilde{E}_z = \frac{1}{-j\omega\epsilon_{zz}}(jk_0 \sin\theta\tilde{H}_y + j\omega\epsilon_{zx}\tilde{E}_x + j\omega\epsilon_{zy}\tilde{E}_y) \quad (2.17a)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu_{zz}}(jk_0 \sin\theta\tilde{E}_y - j\omega\mu_{zx}\tilde{H}_x - j\omega\mu_{zy}\tilde{H}_y) \quad (2.17b)$$

เมื่อแทนส่วนประกอบของ \tilde{E}_z และ \tilde{H}_z ตามสมการ (2.17a) และ (2.17b) ลงในสมการ (2.16a), (2.16b), (2.16c) และ (2.16d) พร้อมกับจัดรูปสมการใหม่แล้วก็จะได้ผลเป็นสมการในรูปเมทริกซ์

$$\frac{\partial[\tilde{E}_t]}{\partial z} = -j\omega[G_{ee}][\tilde{E}_t] - j\omega[G_{eh}][\tilde{H}_t] \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial[\tilde{H}_t]}{\partial z} = -j\omega[G_{he}][\tilde{E}_t] - j\omega[G_{hh}][\tilde{H}_t] + [P][\tilde{E}_t] \quad (2.18b)$$

ในที่นี้ $[\tilde{E}_t]$ และ $[\tilde{H}_t]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×1 ซึ่งมีสมาชิกเป็นส่วนประกอบความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในทิศทาง x และ y ดังนี้

$$[\tilde{E}_t] = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(z) \\ \tilde{E}_y(z) \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

$$[\tilde{H}_t] = \begin{bmatrix} \tilde{H}_x(z) \\ \tilde{H}_y(z) \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

เมทริกซ์ $[G_{ee}]$, $[G_{eh}]$, $[G_{he}]$, $[G_{hh}]$ และ $[P]$ คือเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังแสดงรายละเอียดของสมาชิกได้เป็น

$$[G_{ee}] = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \sin\theta \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & -\frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} + \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{zz} & \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} \\ 0 & \frac{\mu_{zz}}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.20a)$$

$$[G_{eh}] = \begin{bmatrix} -\mu_{yx} + \frac{\mu_{yz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}} & -\mu_{yy} + \frac{\mu_{yz}\mu_{zy} + \mu_0\epsilon_0 \sin^2 \theta}{\mu_{zz}} \epsilon_{zz} \\ \mu_{xx} - \frac{\mu_{xz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}} & \mu_{xy} - \frac{\mu_{xz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.20b)$$

$$[G_{he}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{yx} - \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{yy} - \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zy} + \mu_0\epsilon_0 \sin^2 \theta}{\epsilon_{zz}} \mu_{zz} \\ -\epsilon_{xx} + \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & -\epsilon_{xy} + \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.20c)$$

$$[G_{hh}] = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \sin \theta \begin{bmatrix} \mu_{zx} & \mu_{zy} & \epsilon_{yz} \\ \mu_{zz} & \mu_{zz} & \epsilon_{zz} \\ 0 & \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.20d)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.20e)$$

จากสมการ (2.18a) และ (2.18b) สามารถทำให้ลดรูปเหลือเพียงสมการเดียวได้ โดยการจัดรูปสมการทั้งสองใหม่ ตามขั้นตอนดังที่จะแสดงต่อไปนี้

เริ่มจากนำ $-j\omega$ คูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ (2.18a) และ (2.18b) และหาอนุพันธ์เทียบกับ z ของพจน์ทั้งสองข้างของสมการ (2.18a) ผลที่ได้คือ

$$-j\omega \frac{\partial[\tilde{E}_t]}{\partial z} = -\omega^2[G_{ee}][\tilde{E}_t] - \omega^2[G_{eh}][\tilde{H}_t] \quad (2.21a)$$

$$-j\omega \frac{\partial[\tilde{H}_t]}{\partial z} = -\omega^2[G_{he}][\tilde{E}_t] - \omega^2[G_{hh}][\tilde{H}_t] - j\omega[P][\tilde{E}_t] \quad (2.21b)$$

$$\frac{\partial^2[\tilde{E}_t]}{\partial z^2} = -j\omega[G_{ee}] \frac{\partial[\tilde{E}_t]}{\partial z} - j\omega[G_{eh}] \frac{\partial[\tilde{H}_t]}{\partial z} \quad (2.21c)$$

เมื่อแทน $\partial[\tilde{E}_t]/\partial z$ และ $\partial[\tilde{H}_t]/\partial z$ จากสมการ (2.21a) และ (2.21b) ตามลำดับลงในสมการ (2.21c) แล้วจะได้สมการที่ต้องการแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2[\tilde{E}_t]}{\partial z^2} = -j\omega \frac{\partial[S][\tilde{E}_t]}{\partial z} - \omega^2[T][\tilde{E}_t] - j\omega[C][\tilde{E}_t] \quad (2.22)$$

โดยที่ $[S]$, $[T]$ และ $[C]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่ทำได้จากความสัมพันธ์

$$[S] = [G_{ee}] + [G_{eh}][G_{hh}][G_{eh}]^{-1} \quad (2.23a)$$

$$[T] = [G_{eh}][G_{he}] - [G_{eh}][G_{hh}][G_{eh}]^{-1}[G_{ee}] \quad (2.23b)$$

$$[C] = [G_{eh}][P] \quad (2.23c)$$

สมการ (2.22) เป็นสมการที่จะนำมาวิเคราะห์ต่อไป ทั้งนี้เพราะถ้าเราหาผลเฉลยของส่วนประกอบ \tilde{E}_x และ \tilde{E}_y ได้แล้ว ก็จะสามารถหาส่วนประกอบอื่น ๆ ที่เหลือคือ \tilde{H}_x , \tilde{H}_y , \tilde{E}_z และ \tilde{H}_z ได้ตามลำดับ

เมื่อแปลงสมการ (2.22) ที่แสดงฟังก์ชันในโดเมนความถี่ ω ไปเป็นสมการในโดเมนเวลา t โดยใช้ผลการแปลงฟูรีเย่ตามความสัมพันธ์ในสมการ (2.8c) และ (2.8d) แล้วจะได้สมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 [E_i]}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial [S][E_i]}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 ([T][E_i])}{\partial t^2} + \frac{\partial ([C][E_i])}{\partial t} \quad (2.24)$$

โดยที่ เมทริกซ์ $[S]$, $[T]$ และ $[C]$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของสมาชิกดังนี้

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.25a)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (2.25b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (2.25c)$$

เมื่อแทนเมทริกซ์ $[S]$, $[T]$ และ $[C]$ ตามในสมการ (2.25a), (2.25b) และ (2.25c) ตามลำดับลงในสมการ (2.24) แล้ว เราก็สามารถแสดงสมการ (2.24) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของ E_x และ E_y ได้ 2 สมการได้ คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} &= S_{11} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \right) + S_{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \right) + t_{11} \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} \\ &+ t_{12} \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial t^2} + C_{11} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} + C_{12} \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial z^2} = & S_{21} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \right) + S_{22} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \right) + t_{21} \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} \\ & + t_{22} \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial t^2} + C_{21} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} + C_{22} \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.26b)$$

สมการ (2.26a) และ (2.26b) เป็นสมการที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยของ $E_x(z,t)$ และ $E_y(z,t)$ แต่อย่างไรก็ตามการหาผลเฉลยของ $E_x(z,t)$ และ $E_y(z,t)$ นั้นจำเป็นต้องให้ผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ระนาบ $z=0$ และระนาบ $z=L$ ด้วย ในหัวข้อต่อไปจะพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ระนาบ $z=0$ และระนาบ $z=L$ ที่นำมาใช้ในงานวิทยานิพนธ์นี้

2.3 เงื่อนไขขอบเขต

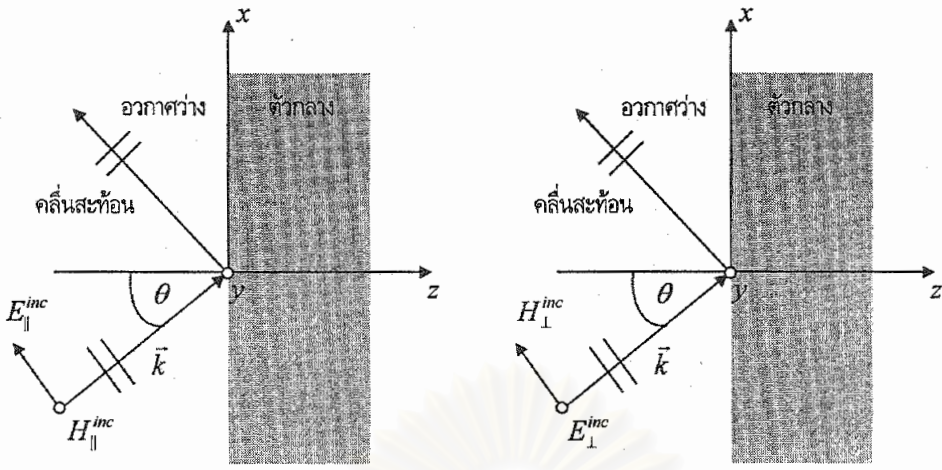
ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ $z=0$ และ $z=L$ เพื่อกำหนดขอบเขตของปัญหาที่วิเคราะห์ตามสมการ (2.26a) และ (2.26b) เนื่องจากปัญหาที่วิเคราะห์มีลักษณะเป็น ปัญหาเปิด (open problem) ดังนั้นจึงทำให้การหาผลเฉลยของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในโดเมนที่ไม่มีขอบเขต (boundary) หรือมีขอบเขตเป็นอนันต์ ดังนั้นการแก้ปัญหาก็เกิดขึ้นเราจึงต้องมีการจำกัดขอบเขตของโดเมนเพื่อให้สามารถหาผลเฉลยของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ โดยขอบเขตที่กำหนดจะต้องมีขนาดใหญ่พอที่จะครอบคลุมตัวกลางที่คลื่นตกกระทบและจุดที่ต้องการทราบค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้า จากรูปที่ 2.1 ตัวกลางที่พิจารณาอยู่ในบริเวณ $0 < z < L$ ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องตามสมการ (2.26a) และ (2.26b) คือให้ส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าในทิศทางสัมผัสที่รอยต่อระหว่างตัวกลางที่หนึ่งและตัวกลางที่สองจะต้องต่อเนื่องกัน แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_2 \quad (2.27)$$

เมื่อ \mathbf{E}_1 และ \mathbf{E}_2 คือเวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าในอวกาศว่างและตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกตามลำดับ ในกรณีที่รอยต่อเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์จะได้ $\mathbf{E}_2 = 0$ และทำให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นดังนี้

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_1 = 0 \quad (2.28)$$

ตำแหน่งที่ $z=0$ และ $z=L$ ขอให้พิจารณาความเข้มสนามไฟฟ้าในทิศทางสัมผัสที่รอยต่อของคลื่นตกกระทบ คลื่นสะท้อน และคลื่นส่งผ่าน ตามลำดับ โดยความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบจะแยกเป็น 2 กรณีคือ ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันขนานและตั้งฉากดังแสดงในรูปที่ 2.2 ทำให้การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจะแยกเป็น 2 กรณี คือ



(ก) โพลาริเซชันขนาน

(ข) โพลาริเซชันตั้งฉาก

รูปที่ 2.2 ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบในอวกาศว่างที่มีโพลาริเซชันต่างกัน

กรณีนี้ที่ 1 ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบที่มีโพลาริเซชันขนานแสดงด้วย E_{\parallel}^{inc} ซึ่งขนานกับระนาบตกกระทบ โดยเราสามารถแยกได้เป็นส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบออกเป็นแนวแกน x และแนวแกน z ส่วนความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบแสดงด้วย H_{\parallel}^{inc} ที่มีทิศตั้งฉากกับระนาบตกกระทบและมีส่วนประกอบตามแนวแกน y เท่านั้นดังแสดงในรูป 2.2 (ก) และจากรูปนี้ถ้ามีคลื่นตกกระทบเดินทางจากอวกาศว่างมายังแผ่นตัวกลาง จะทำให้เกิดสนามของคลื่นสะท้อน ดังนั้นสมการของความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบและความเข้มสนามไฟฟ้าสะท้อน สามารถแสดงได้ดังนี้

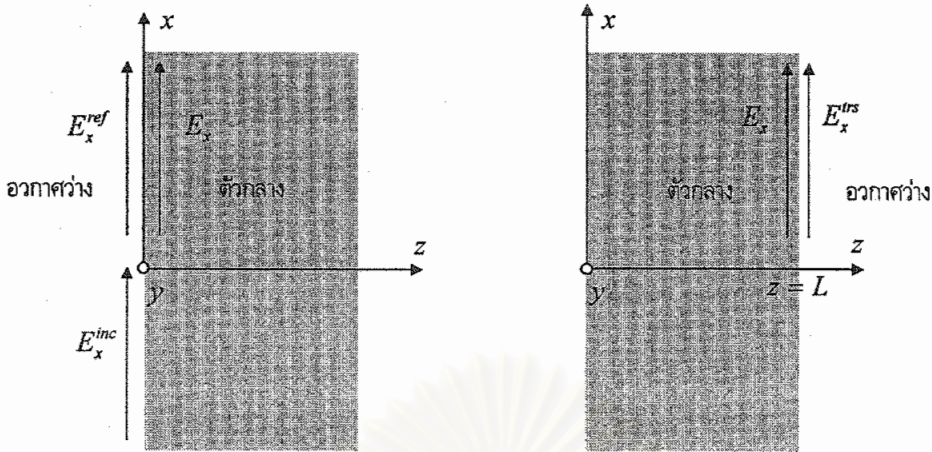
$$\tilde{\mathbf{E}}^{inc} = (\tilde{E}_x^{inc} \mathbf{a}_x + \tilde{E}_z^{inc} \mathbf{a}_z) e^{j(k_0 x \sin \theta + k_0 z \cos \theta)} \quad (2.29)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{ref} = (\tilde{E}_x^{ref} \mathbf{a}_x + \tilde{E}_z^{ref} \mathbf{a}_z) e^{j(k_0 x \sin \theta - k_0 z \cos \theta)} \quad (2.30)$$

สมการ (2.29) และ (2.30) จะสังเกตได้ว่า ความเข้มสนามไฟฟ้าตามแนวสัมผัสระหว่างอวกาศว่างกับแผ่นตัวกลางจะเป็นสนามแนวแกน x ส่วนสนามแนวแกน z จะเป็นสนามแนวตั้งฉากกับแผ่นตัวกลาง ดังนั้นการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ $z = 0$ และที่ $z = L$ จึงพิจารณาเฉพาะสนามแนวสัมผัสหรือสนามแนวแกน x เท่านั้น

การพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ $z = 0$ เริ่มจากความสัมพันธ์ความเข้มสนามไฟฟ้าในแผ่นตัวกลางมีขนาดเท่ากับผลรวมของความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบกับความเข้มสนามไฟฟ้าสะท้อนในอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 2.3 (ก) และมีสมการดังนี้

$$\tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)} = \tilde{E}_x^{inc} e^{j(k_0 x \sin \theta + k_0 z \cos \theta)} + \tilde{E}_x^{ref} e^{j(k_0 x \sin \theta - k_0 z \cos \theta)} \quad (2.31)$$

(ก) ที่ $z = 0$ (ข) ที่ $z = L$

รูปที่ 2.3 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เมื่อความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบมีโพลาไรเซชันขนาน

หาอนุพันธ์เทียบกับ z ทั้งสองด้านของสมการ (2.31) และแทนความสัมพันธ์

$\tilde{E}_x^{ref} e^{j(k_0 x \sin \theta - k_0 z \cos \theta)} = \tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)} - \tilde{E}_x^{inc} e^{j(k_0 x \sin \theta + k_0 z \cos \theta)}$ จากสมการ (2.31) จะได้ผลเป็นดังนี้

$$\frac{\partial \tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)}}{\partial z} + jk_0 \cos \theta \tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)} = 2jk_0 \cos \theta \tilde{E}_x^{inc} e^{j(k_0 x \sin \theta + k_0 z \cos \theta)} \quad (2.32)$$

จากนั้นแทน $z = 0$ ลงในสมการ (2.32) และแปลงความสัมพันธ์จากสมการในโดเมนความถี่เป็นสมการในโดเมนเวลาโดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันตามความสัมพันธ์ของสมการ (2.8c) และ (2.8d) ผลที่ได้คือ

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_x^{inc}}{\partial t} + \frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} \quad \text{ที่ } z = 0 \quad (2.33)$$

เมื่อ c_0 คือความเร็วแสงที่เดินทางในอวกาศว่างมีค่าเท่ากับ 3×10^8 m/s

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ $z = L$ แสดงดังในรูปที่ 2.3 (ข) โดยจะพิจารณาความเข้มสนามไฟฟ้าในแผ่นตัวกลางกับความเข้มสนามไฟฟ้าส่งผ่านในอวกาศว่างจะต้องมีขนาดเท่ากัน ดังนี้

$$\tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)} = \tilde{E}_x^{trs} e^{j(k_0 x \sin \theta + k_0 z \cos \theta)} \quad (2.34)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ z ทั้งสองด้านของสมการ (2.34) และแทน $\tilde{E}_x^{trs} e^{j(k_0 x \sin \theta + k_0 z \cos \theta)} = \tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)}$ จากสมการ (2.34) จะได้

$$\frac{\partial \tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)}}{\partial z} = j k_0 \cos \theta \tilde{E}_x e^{j(k_0 x \sin \theta)} \quad (2.35)$$

จากนั้นแปลงความสัมพันธ์จากสมการในโดเมนความถี่เป็นสมการในโดเมนเวลาโดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันตามความสัมพันธ์ของสมการ (2.8c) และ (2.8d) จะได้

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \quad \text{ที่ } z = L \quad (2.36)$$

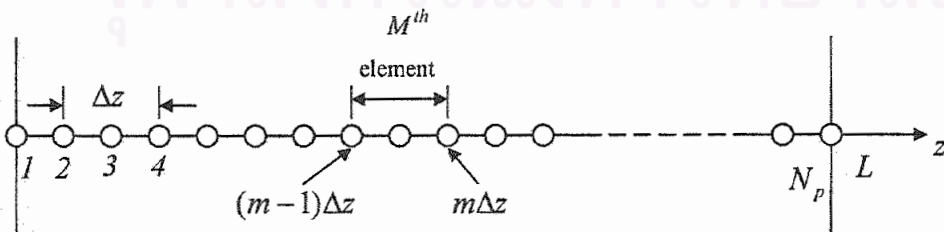
กรณีที่ 2 ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันตั้งฉากแสดงด้วย E_{\perp}^{inc} ดังในรูป 2.2 (ข) ซึ่งจะมีเพียงส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบ E_y^{inc} เท่านั้น ที่ตั้งฉากกับระนาบตกกระทบ การพิจารณาหาเงื่อนไขขอบเขตที่ $z = 0$ และ $z = L$ ของกรณีนี้ มีการพิจารณาเหมือนกับกรณีที่ 1 สรุปได้ดังนี้

$$\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} = \frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_y^{inc}}{\partial t} + \frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} \quad \text{ที่ } z = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} = -\frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} \quad \text{ที่ } z = L \quad (2.38)$$

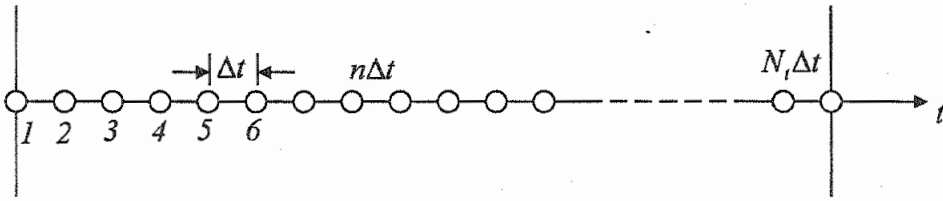
2.4 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการ (2.26a) และ (2.26b) พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขตตามสมการ (2.33), (2.36), (2.37) และ (2.38) ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดเมนของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยที่เรียกว่า "อีลีเมนต์ (element)" สำหรับปัญหาที่พิจารณาอยู่นี้ เราจะแบ่งโดเมนซึ่งก็คือระยะทางตามแกน z และระยะเวลาตามแกนเวลา t ออกเป็นส่วนย่อยดังรูปที่ 2.4 (ก) โดยจะแบ่งระยะทางตามแกน z ในช่วง $0 < z < L$ ออกเป็นอีลีเมนต์ชนิดเส้น (line element) หรือแบ่งออกเป็นระยะทาง Δz เมตร สำหรับแกนเวลาจะแบ่งช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณตั้งแต่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ จนถึงเวลาสิ้นสุด $t = N_p \Delta t$ วินาที ออกเป็นช่วงเวลา Δt วินาที จำนวนทั้งหมด N_p ช่วง ดังรูปที่ 2.4 (ข)



(ก) โดเมนเชิงอวกาศ (spatial domain)

รูปที่ 2.4 การแบ่งอีลีเมนต์ในโดเมนของปัญหาที่พิจารณาตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์



(ข) โดเมนเวลา (time domain)

รูปที่ 2.4 (ต่อ) การแบ่งอีลีเมนต์ในโดเมนของปัญหาที่พิจารณาตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

ส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้า E_x และ E_y ภายในอีลีเมนต์หมายเลข m ที่อยู่ในช่วง $(m-1)\Delta z < z < m\Delta z$ ณ เวลา $t = n\Delta t$ จะถูกประมาณตามสมการต่อไปนี้

$$E_x((m-1)\Delta z < z < m\Delta z, n\Delta t) = E_x^m(n\Delta t) = \sum_{i=1}^3 N_i^m(z)\phi_i^m(n\Delta t) \tag{2.39}$$

$$E_y((m-1)\Delta z < z < m\Delta z, n\Delta t) = E_y^m(n\Delta t) = \sum_{i=1}^3 N_i^m(z)\psi_i^m(n\Delta t) \tag{2.40}$$

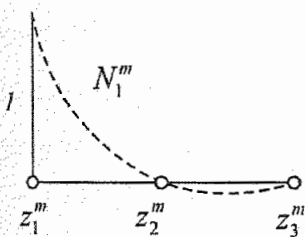
โดยที่ $N_i^m(z)$ ($i=1,2,3$) คือฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันควอดเรติก (Quadratic function) ของ z ดังต่อไปนี้

$$N_1^m = \frac{(z - z_2^m)(z - z_3^m)}{(z_1^m - z_2^m)(z_1^m - z_3^m)} \tag{2.41a}$$

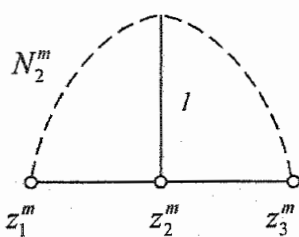
$$N_2^m = \frac{(z - z_1^m)(z - z_3^m)}{(z_2^m - z_1^m)(z_2^m - z_3^m)} \tag{2.41b}$$

$$N_3^m = \frac{(z - z_1^m)(z - z_2^m)}{(z_3^m - z_1^m)(z_3^m - z_2^m)} \tag{2.41c}$$

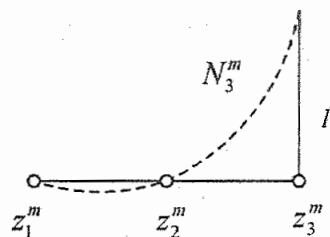
ในที่นี้ $z_1^m = (m-1)\Delta z$, $z_2^m = (m-\frac{1}{2})\Delta z$, $z_3^m = m\Delta z$ ขอให้สังเกตว่าฟังก์ชันรูปร่าง N_i^m , ($m=1,2,3$) จะมีค่าเท่ากับ 1 ที่ตำแหน่ง z_i^m และเท่ากับศูนย์ที่ 2 โหนด (node) ที่เหลือ



(ก) ฟังก์ชันรูปร่าง N_1^m



(ข) ฟังก์ชันรูปร่าง N_2^m



(ค) ฟังก์ชันรูปร่าง N_3^m

รูปที่ 2.5 แสดงฟังก์ชันรูปร่างของอีลีเมนต์แต่ละช่วง

เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่าง N_i^m ($i=1,2,3$) ตามสมการ (2.41a), (2.41b), และ (2.41c) แล้วเราจะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า $\phi_i^m(n\Delta t)$ และ $\psi_i^m(n\Delta t)$, ($i=1,2,3$) คือค่า $E_x(z_i^m, n\Delta t)$ และ $E_y(z_i^m, n\Delta t)$ ตามลำดับ

เมื่อรวมฟังก์ชัน $E_x^m(n\Delta t)$ ของอีลีเมนต์แต่ละชิ้นเข้าด้วยกันและกำหนดหมายเลขโนดของอีลีเมนต์ให้เป็นหมายเลขชุดใหม่ที่เรียกว่าหมายเลขโนดวงกว้าง(global node number) ดังรูปที่ 2.6 แล้ว ฟังก์ชันของ E_x ในช่วง $0 < z < L$ ณ เวลา $t = n\Delta t$ สามารถแสดงได้เป็น

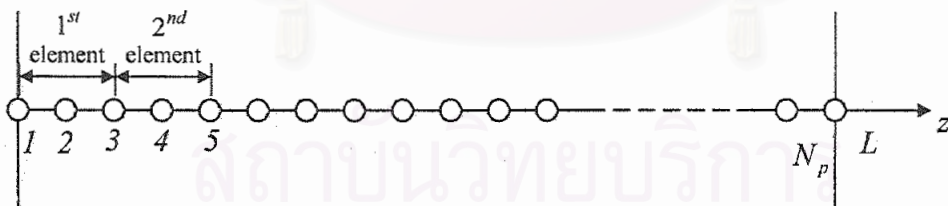
$$E_x(z, n\Delta t) = \sum_{p=1}^{N_p} U_p(z) \phi_p(n\Delta t) \quad (2.42)$$

โดยที่ $U_p(z)$ จะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันฐาน (basis function) และพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า $\phi_p(n\Delta t)$ คือ ค่า E_x ณ ตำแหน่งโนด p ที่เวลา $t = n\Delta t$, N_p คือจำนวนทั้งหมดของโนดวงกว้าง

ในทำนองเดียวกันเมื่อรวมฟังก์ชัน $E_y^m(n\Delta t)$ ของอีลีเมนต์แต่ละชิ้นเข้าด้วยกัน ผลลัพธ์ที่ได้สามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_y(z, n\Delta t) = \sum_{p=1}^{N_p} U_p(z) \psi_p(n\Delta t) \quad (2.43)$$

โดยที่ พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า $\psi_p(n\Delta t)$ คือค่า E_y ณ ตำแหน่งโนด p ที่เวลา $t = n\Delta t$ เช่นกัน



รูปที่ 2.6 หมายเลขโนดวงกว้าง (global node number)

ตามที่แสดงในสมการ (2.42) และ (2.43) เราจะเห็นได้ว่า $E_x(z, n\Delta t)$ และ $E_y(z, n\Delta t)$ จะแปรตามพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า $\phi_p(n\Delta t)$ และ $\psi_p(n\Delta t)$, ($p=1,2,\dots,N_p$) ตามลำดับ ด้วยเหตุนี้การหาผลเฉลยของ $E_x(z, n\Delta t)$ และ $E_y(z, n\Delta t)$ จึงจำเป็นต้องทราบค่า $\phi_p(n\Delta t)$ และ $\psi_p(n\Delta t)$ ที่โนด p ทุกจุด วิธีการหาผลเฉลยของพารามิเตอร์เหล่านี้ สามารถทำได้โดยใช้วิธีการเลอจิน (Galerkin method)

ตามระเบียบวิธีการเลอจิน เราจะเริ่มต้นด้วยการนำฟังก์ชันฐาน $U_p(z)$, ($p=1,2,\dots,N_p$) แต่ละตัวมาคูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ (2.26a) และ (2.26b) และ บังคับให้ปริพันธ์ (integration) ของผลคูณที่

ได้ทั้งสองสมการในช่วง $0 < z < L$ เป็นศูนย์ ผลที่ได้ คือ ชุดสมการ 2 ชุด ที่ประกอบด้วยสมการชุดละ N_p สมการ ดังแสดงต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \int_0^L U_p(z) \cdot \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} dz &= \int_0^L U_p(z) \cdot s_{11} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \right) dz + \int_0^L U_p(z) \cdot s_{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \right) dz \\ &+ \int_0^L U_p(z) \cdot t_{11} \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} dz + \int_0^L U_p(z) \cdot t_{12} \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial t^2} dz \\ &+ \int_0^L U_p(z) \cdot c_{11} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} dz + \int_0^L U_p(z) \cdot c_{12} \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} dz \end{aligned}$$

$p = 1, 2, 3, \dots, N_p$ (2.44)

$$\begin{aligned} \int_0^L U_p(z) \cdot \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial z^2} dz &= \int_0^L U_p(z) \cdot s_{21} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \right) dz + \int_0^L U_p(z) \cdot s_{22} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \right) dz \\ &+ \int_0^L U_p(z) \cdot t_{21} \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} dz + \int_0^L U_p(z) \cdot t_{22} \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial t^2} dz \\ &+ \int_0^L U_p(z) \cdot c_{21} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} dz + \int_0^L U_p(z) \cdot c_{22} \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} dz \end{aligned}$$

$p = 1, 2, 3, \dots, N_p$ (2.45)

เราจะพิจารณาพจน์ด้านซ้ายมือของสมการ (2.44) และ (2.45) ซึ่งสามารถแสดงในรูปของการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (integration by parts) ได้ดังนี้

$$\int_0^L U_p(z) \cdot \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} \cdot U_p(z) \Big|_{z=0}^{z=L} - \int_0^L \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} \cdot \frac{dU_p(z)}{dz} dz \quad (2.46)$$

$$\int_0^L U_p(z) \cdot \frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} \cdot U_p(z) \Big|_{z=0}^{z=L} - \int_0^L \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} \cdot \frac{dU_p(z)}{dz} dz \quad (2.47)$$

เมื่อแทนเงื่อนไขขอบเขตที่ $z = 0$ และ $z = L$ ตามสมการ (2.33), (2.36), (2.37) และ (2.38) ลงในสมการ (2.46) และ (2.47) แล้ว เราจะได้ว่า

$$\int_0^L U_p \left(\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} \right) dz = \frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_x^{inc}}{\partial t} - \frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_x}{\partial t} \Big|_{z=0} - \frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_x}{\partial t} \Big|_{z=L} - \int_0^L \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} \cdot \frac{dU_p(z)}{dz} dz \quad (2.48)$$

$$\int_0^L U_p \left(\frac{\partial^2 E_y(z,t)}{\partial z^2} \right) dz = \frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_y^{inc}}{\partial t} - \frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_y}{\partial t} \Big|_{z=0} - \frac{\cos \theta}{c_0} \frac{\partial E_y}{\partial t} \Big|_{z=L} - \int_0^L \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} \cdot \frac{dU_p(z)}{dz} dz \quad (2.49)$$

จากนั้นเราจะนำผลที่ได้ในสมการ (2.48) และ (2.49) แทนกลับลงไปในสมการ (2.44) และ (2.45) พร้อมกับแทน $E_x(z,t)$ และ $E_y(z,t)$ ดังที่แสดงในสมการ (2.42) และ (2.43) ลงในสมการ (2.44) และ (2.45) ด้วย ผลที่ได้สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$[T_{\phi\phi}] \frac{d^2\{\phi\}}{dt^2} + [T_{\phi\psi}] \frac{d^2\{\psi\}}{dt^2} + ([S_{\phi\phi}] + [C_{\phi\phi}]) \frac{d\{\phi\}}{dt} + ([S_{\phi\psi}] + [C_{\phi\psi}]) \frac{d\{\psi\}}{dt} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{f_\phi\} \quad (2.50)$$

$$[T_{\psi\phi}] \frac{d^2\{\phi\}}{dt^2} + [T_{\psi\psi}] \frac{d^2\{\psi\}}{dt^2} + ([S_{\psi\phi}] + [C_{\psi\phi}]) \frac{d\{\phi\}}{dt} + ([S_{\psi\psi}] + [C_{\psi\psi}]) \frac{d\{\psi\}}{dt} + [K_{\psi\psi}]\{\psi\} = \{f_\psi\} \quad (2.51)$$

ในที่นี้ $\{\phi\}$ และ $\{\psi\}$ คือเมทริกซ์แนวตั้ง (Column matrix) ที่มีสมาชิกประกอบไปด้วยพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า ϕ_p และ ψ_p , ($p = 1, 2, \dots, N_p$) ตามลำดับ $[T_{\phi\phi}]$, $[T_{\phi\psi}]$, $[T_{\psi\phi}]$, $[T_{\psi\psi}]$, $[S_{\phi\phi}]$, $[S_{\phi\psi}]$, $[S_{\psi\phi}]$, $[S_{\psi\psi}]$, $[C_{\phi\phi}]$, $[C_{\phi\psi}]$, $[C_{\psi\phi}]$, $[C_{\psi\psi}]$, $[K_{\phi\phi}]$ และ $[K_{\psi\psi}]$ คือ เมทริกซ์จัตุรัสขนาด $N_p \times N_p$ โดยสมาชิกตัวที่ (i, j) ($i = 1, 2, \dots, N_p$), ($j = 1, 2, \dots, N_p$) ของเมทริกซ์ทั้งหมดสามารถคำนวณได้ตามสมการดังนี้

$$[T_{\phi\phi}] = \int_0^L t_{11} U_i(z) U_j(z) dz, \quad [T_{\phi\psi}] = \int_0^L t_{12} U_i(z) U_j(z) dz \quad (2.52a)$$

$$[T_{\psi\phi}] = \int_0^L t_{21} U_i(z) U_j(z) dz, \quad [T_{\psi\psi}] = \int_0^L t_{22} U_i(z) U_j(z) dz \quad (2.52b)$$

$$[S_{\phi\phi}] = \int_0^L s_{11} U_i(z) \frac{dU_j(z)}{dz} dz + \frac{\cos \theta}{c_0} [U_i(L) U_j(L) + U_i(0) U_j(0)] \quad (2.52c)$$

$$[S_{\phi\psi}] = \int_0^L s_{12} U_i(z) \frac{dU_j(z)}{dz} dz \quad (2.52d)$$

$$[S_{\psi\phi}] = \int_0^L s_{21} U_i(z) \frac{dU_j(z)}{dz} dz \quad (2.52e)$$

$$[S_{\psi\psi}] = \int_0^L s_{22} U_i(z) \frac{dU_j(z)}{dz} dz + \frac{\cos \theta}{c_0} [U_i(L) U_j(L) + U_i(0) U_j(0)] \quad (2.52f)$$

$$[C_{\phi\phi}] = \int_0^L c_{11} U_i(z) U_j(z) dz, \quad [C_{\phi\psi}] = \int_0^L c_{12} U_i(z) U_j(z) dz \quad (2.52g)$$

$$[C_{\psi\phi}] = \int_0^L c_{21} U_i(z) U_j(z) dz, \quad [C_{\psi\psi}] = \int_0^L c_{22} U_i(z) U_j(z) dz \quad (2.52h)$$

$$[K_{\phi\phi}] = \int_0^L \frac{dU_i(z)}{dz} \frac{dU_j(z)}{dz} dz \quad (2.52i)$$

$$[K_{\psi\psi}] = \int_0^L \frac{dU_i(z)}{dz} \frac{dU_j(z)}{dz} dz \quad (2.52j)$$

$$\{f_\phi\} = \frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{dE_x^{inc}}{dt} [1, 0, 0, \dots, 0_p]^T \quad (2.52k)$$

$$\{f_\psi\} = \frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{dE_y^{inc}}{dt} [1, 0, 0, \dots, 0_p]^T \quad (2.52l)$$

จากสมการ (2.50) และ (2.51) เราสามารถจัดให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$[T] \frac{d^2[X]}{dt^2} + [S] \frac{d[X]}{dt} + [K][X] = [F] \quad (2.53)$$

โดยที่

$$[X] = \begin{bmatrix} \{\phi\} \\ \{\psi\} \end{bmatrix} \quad (2.54a)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_{\phi\phi}] & [T_{\phi\psi}] \\ [T_{\psi\phi}] & [T_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \quad (2.54b)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{\phi\phi}] + [C_{\phi\phi}] & [S_{\phi\psi}] + [C_{\phi\psi}] \\ [S_{\psi\phi}] + [C_{\psi\phi}] & [S_{\psi\psi}] + [C_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \quad (2.54c)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{\phi\phi}] & [O] \\ [O] & [K_{\psi\psi}] \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} \{F_\phi\} \\ \{F_\psi\} \end{bmatrix} \quad (2.54d)$$

2.5 การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเทียบกับเวลาด้วยวิธีนิวมาร์ก-บีตา

สมการ (2.53) คือระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเทียบกับเวลา การหาผลเฉลยของระบบสมการนี้จะใช้วิธีนิวมาร์ก-บีตา ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณที่นิยมใช้กันมากในการแก้ปัญหาคำนวณการส่งความร้อน (heat transfer) ตามวิธีนิวมาร์ก-บีตา (Gedney and Navsariwala, 1995) นั้นจะใช้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$[X]^{n+1} = [X]^n + \Delta t [\dot{X}]^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} (1 - 2\beta) [\ddot{X}]^n + (\Delta t)^2 \beta [\ddot{X}]^{n+1} \quad (2.55)$$

$$[\dot{X}]^{n+1} = [\dot{X}]^n + \Delta t (1 - \gamma) [\ddot{X}]^n + \Delta t \gamma [\ddot{X}]^{n+1} \quad (2.56)$$

โดยที่ ดรรชนีบน 'และ' หมายถึง การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับเวลาตามลำดับ, $n+1$ และ n หมายถึงค่าที่เวลา $t = (n+1)\Delta t$ และ $t = n\Delta t$ ตามลำดับ γ และ β เป็นพารามิเตอร์ที่ใช้ในการเร่งผลการคำนวณและความแม่นยำ ถ้าให้ $\gamma = 0.5$ และ $\beta \geq 0.25$ แล้วจะทำให้การคำนวณตามวิธีนิวมาร์ก-บีตาที่มีความเสถียรภาพแบบไร้เงื่อนไข ซึ่งทำให้เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ต่อไปนี้จากสมการ (2.55) และ (2.56) ได้เป็น

$$[X]'' = \beta[X]^{n+1} + (1-2\beta)[X]'' + \beta[X]^{n-1} \quad (2.57)$$

$$[\dot{X}]'' = \frac{[X]^{n+1} - [X]^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.58)$$

$$[\ddot{X}]^{n+1} = \frac{[X]^{n+1} - 2[X]'' + [X]^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.59)$$

เมื่อแทนความสัมพันธ์ตามสมการ (2.57), (2.58) และ (2.59) ลงในสมการ (2.53) และจัดรูปสมการใหม่ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} \left(\frac{[T]}{\Delta t^2} + \frac{[S]}{2\Delta t} + [K]\beta \right) [X]^{n+1} &= \left(\frac{2[T]}{\Delta t^2} - [K](1-2\beta) \right) [X]'' + \\ &\left(-\frac{[T]}{\Delta t^2} + \frac{[S]}{2\Delta t} - [K]\beta \right) [X]^{n-1} + [f]^{n+1} \end{aligned} \quad (2.60)$$

เมื่อ

$$[f]^{n+1} = \left[\frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{dE_x^{inc}}{dt}, 0, 0, \dots, 0_p, \frac{2 \cos \theta}{c_0} \frac{dE_y^{inc}}{dt}, 0, 0, \dots, 0_p \right]^T \quad (2.61a)$$

$$[X]^{n-1} = [\phi_1^{n-1}, \phi_2^{n-1}, \phi_3^{n-1}, \dots, \phi_p^{n-1}, \psi_1^{n-1}, \psi_2^{n-1}, \psi_3^{n-1}, \dots, \psi_p^{n-1}]^T \quad (2.61b)$$

$$[X]'' = [\phi_1'', \phi_2'', \phi_3'', \dots, \phi_p'', \psi_1'', \psi_2'', \psi_3'', \dots, \psi_p'']^T \quad (2.61c)$$

$$[X]^{n+1} = [\phi_1^{n+1}, \phi_2^{n+1}, \phi_3^{n+1}, \dots, \phi_p^{n+1}, \psi_1^{n+1}, \psi_2^{n+1}, \psi_3^{n+1}, \dots, \psi_p^{n+1}]^T \quad (2.61d)$$

และสามารถลดรูประบบสมการได้เป็นดังนี้

$$[A][X]^{n+1} = [B] \quad (2.62)$$

เมื่อ

$$[A] = \frac{[T]}{(\Delta t)^2} + \frac{[S]}{2\Delta t} + [K]\beta \quad (2.63a)$$

$$[B] = \left(\frac{2[T]}{\Delta t^2} - [K](1-2\beta) \right) [X]'' + \left(-\frac{[T]}{\Delta t^2} + \frac{[S]}{2\Delta t} - [K]\beta \right) [X]^{n-1} + [f]^{n+1} \quad (2.63b)$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นดังสมการ (2.62) นี้มีจำนวนครั้งของการหาผลเฉลยเท่ากับจำนวนขั้นเวลาและจะหาผลเฉลยที่แต่ละขั้นเวลา เริ่มต้นจากที่เวลาเท่ากับศูนย์ ค่าของ $[X]^{n-1}$ และ $[X]^n$ จะเท่ากับศูนย์ ทำให้ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่เวลาเท่ากับศูนย์นี้ ค่า $[X]^{n+1}$ ที่ได้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเพิ่มขั้นเวลาถัดไป การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นจะมีค่า $[X]^{n+1}$ เปลี่ยนแปลงและจะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดการเพิ่มขึ้นของขั้นเวลา ขบวนการกระทำมีลักษณะเช่นนี้จนถึงจำนวนขั้นเวลาที่ต้องการ

การเพิ่มขั้นเวลาแต่ละครั้ง เราจะต้องนำค่า $[X]^n$ แทนลงใน $[X]^{n-1} ([X]^n \rightarrow [X]^{n-1})$ และนำค่า $[X]^{n+1}$ แทนลงใน $[X]^n ([X]^{n+1} \rightarrow [X]^n)$ เสมอแล้วจึงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ผลสุดท้ายจะได้ $[X]^{n+1}$ คือ ความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x และ y จำนวน N ค่าบนแต่ละโนดในโดเมนเวลา การแปลงความเข้มสนามไฟฟ้าจากโดเมนเวลาให้อยู่ในโดเมนความถี่ใช้การแปลงฟูริเยร์แบบเร็ว

2.6 การวิเคราะห์สนามสะท้อนและสนามส่งผ่าน

การวิเคราะห์สนามสะท้อนและสนามส่งผ่านในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก ดังรูปที่ 2.7 เพื่อหาสัมประสิทธิ์การส่งผ่านและสัมประสิทธิ์การสะท้อน คลื่นระนาบตกกระทบบสามารถแยกส่วนประกอบเป็น คลื่น TE (transverse electric) และคลื่น TM (transverse magnetic) ตามลำดับ



รูปที่ 2.7 ตำแหน่งโนด i_f และโนด i_b ที่เกิดสนามสะท้อนและสนามส่งผ่านในตัวกลาง

โดยคลื่น TM มีโพลาไรเซชันขนานกับระนาบตกกระทบบส่วนคลื่น TE มีโพลาไรเซชันตั้งฉากกับระนาบตกกระทบบ คลื่น TE เมื่อตกกระทบบตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกทำให้เกิดสนามของคลื่นสะท้อนที่โนด i_f รวม 2 ค่า แยกเป็นโพลาไรเซชันตั้งฉากและโพลาไรเซชันขนาน และขณะเดียวกันที่โนด i_b มีสนามของคลื่นส่งผ่าน 2 ค่า แยกเป็นโพลาไรเซชันตั้งฉากและโพลาไรเซชันขนาน สำหรับคลื่น TM มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกัน ดังนั้นการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่โนด i_f และสัมประสิทธิ์การส่งผ่านที่โนด i_b มีสมการดังนี้ (Lin, Chen and Wu, 1993)

$$\begin{aligned}
 R_{11}(f) &= \frac{\text{สนามสะท้อนที่มีโพลาริเซชันขนาน}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันขนาน}}, & R_{12}(f) &= \frac{\text{สนามสะท้อนที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันขนาน}} \\
 R_{21}(f) &= \frac{\text{สนามสะท้อนที่มีโพลาริเซชันขนาน}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}, & R_{22}(f) &= \frac{\text{สนามสะท้อนที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}} \\
 T_{11}(f) &= \frac{\text{สนามส่งผ่านที่มีโพลาริเซชันขนาน}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันขนาน}}, & T_{12}(f) &= \frac{\text{สนามส่งผ่านที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันขนาน}} \\
 T_{21}(f) &= \frac{\text{สนามส่งผ่านที่มีโพลาริเซชันขนาน}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}, & T_{22}(f) &= \frac{\text{สนามส่งผ่านที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}{\text{สนามตกกระทบที่มีโพลาริเซชันตั้งฉาก}}
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

สมการ (2.64) วงเล็บหมายถึง สัมประสิทธิ์การสะท้อนและสัมประสิทธิ์การส่งผ่านที่แปรตามความถี่และเป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex number) ซึ่งสามารถแสดงในรูปแบบขนาดและเฟสได้ ถ้าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและสัมประสิทธิ์การส่งผ่านที่ความถี่แต่ละความถี่มีค่าเท่ากับ $A_n + jB_n$ เมื่อ $j = \sqrt{-1}$ แล้วขนาดและเฟสจะมีดังนี้

$$\text{ขนาด} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \text{เฟส} = \arctan\left(\frac{B_n}{A_n}\right)
 \tag{2.65}$$

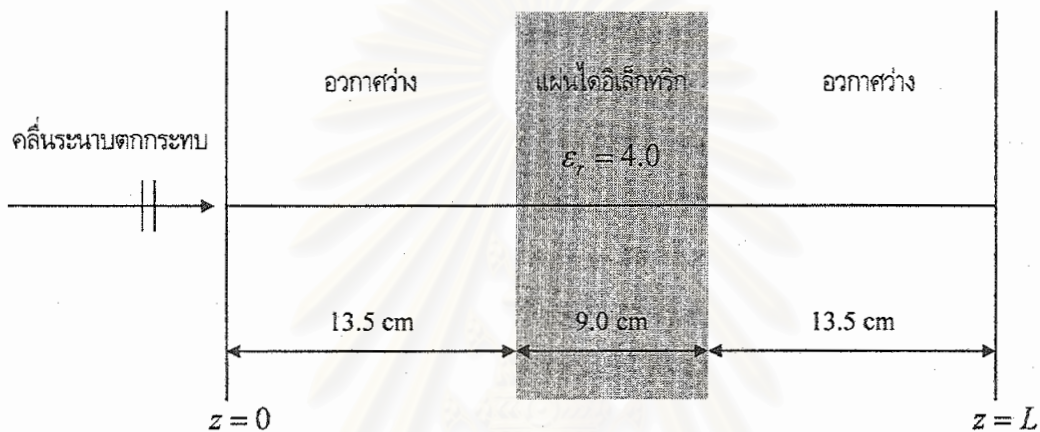
2.7 การทดสอบความใช้ได้ (Validation) ของวิธีการ

2.7.1 การส่งผ่านคลื่นระนาบผ่านแผ่นไดอิเล็กทริก 1 ชั้น

หัวข้อที่ผ่านมาของบทที่ 2 เป็นการอธิบายถึงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการตกกระทบของคลื่นระนาบยังแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น การคำนวณจะเริ่มต้นด้วยการป้อนฟังก์ชันของคลื่นตกกระทบที่แปรตามเวลาด้วยฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์ที่ระนาบเริ่มต้น (initial plane) ระนาบนี้อาจเป็นที่ผิวของแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหรือเป็นระนาบในอวกาศว่าง ที่ตำแหน่งหน้าแผ่นแอนไอโซทรอปิกก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความต้องการว่าจะพิจารณาคลื่นสะท้อนให้อยู่ในบริเวณอวกาศว่างหน้าแผ่นตัวกลางด้วยหรือไม่ เมื่อป้อนคลื่นตกกระทบและคำนวณตามโปรแกรมที่เขียนขึ้นตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยให้เวลา t เพิ่มขึ้นเท่ากับ Δt และคำนวณต่อกันไปเรื่อย ๆ แล้ว ผลการคำนวณที่ได้จะอยู่ในรูปของส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวแกน x และ y ณ เวลาแต่ละจุดที่แบ่งไว้ในแกนเวลา เราสามารถนำผลการคำนวณที่ได้ที่เวลาทุกจุดในแกนเวลามาหาผลตอบสองทางความถี่ได้โดยใช้การแปลงฟูริเยร์ นอกจากนี้ผลที่ได้ยังสามารถนำมาใช้คำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและสัมประสิทธิ์การส่งผ่านได้อีกด้วย

เพื่อเป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีการที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ เราได้ทดลองคำนวณในตัวอย่างที่เป็นปัญหาซึ่งทราบผลเฉลยกันดีอยู่แล้ว ตัวอย่างที่พิจารณาคือการตกกระทบของคลื่นระนาบยังแผ่นไดอิเล็กทริกที่ไม่มีการสูญเสียดังแสดงในรูปที่ 2.8 ตัวอย่างนี้ได้กำหนดให้แผ่นไดอิเล็กทริกมีความหนา

$d = 9$ เซนติเมตร และมีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ $\epsilon_r = 4$ คลื่นระนาบตกกระทบตั้งฉากกับแผ่นไดอิเล็กทริก การป้อนคลื่นตกกระทบนั้นจะให้เริ่มที่ระนาบซึ่งห่างจากแผ่นไดอิเล็กทริกเป็นระยะ 13.5 เซนติเมตร และวางขอบเขตดูดกลืน (absorbing boundary) ไว้ที่ระนาบซึ่งอยู่หลังของแผ่นไดอิเล็กทริกเป็นระยะ 13.5 เซนติเมตรเช่นกัน ขอบเขตดูดกลืนนี้เป็นระนาบเทียมที่มีจุดประสงค์เพื่อจำลองคลื่นให้ส่งผ่านไปได้อย่างเดียว โดยไม่มีการสะท้อนกลับ ความเข้มสนามไฟฟ้าที่ป้อนให้เป็นเกาส์เซียนพัลส์ มีขนาดสูงสุดเท่ากับ 1 V/m มีค่าความกว้างของพัลส์ (τ) เท่ากับ 50×10^{-12} วินาที อนึ่งจุดประสงค์ของการเลือกค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในตัวอย่างนี้ก็เพื่อเป็นตัวอย่างการคำนวณเท่านั้น



รูปที่ 2.8 ตัวอย่างการคำนวณกรณีคลื่นระนาบตกกระทบแผ่นไดอิเล็กทริก

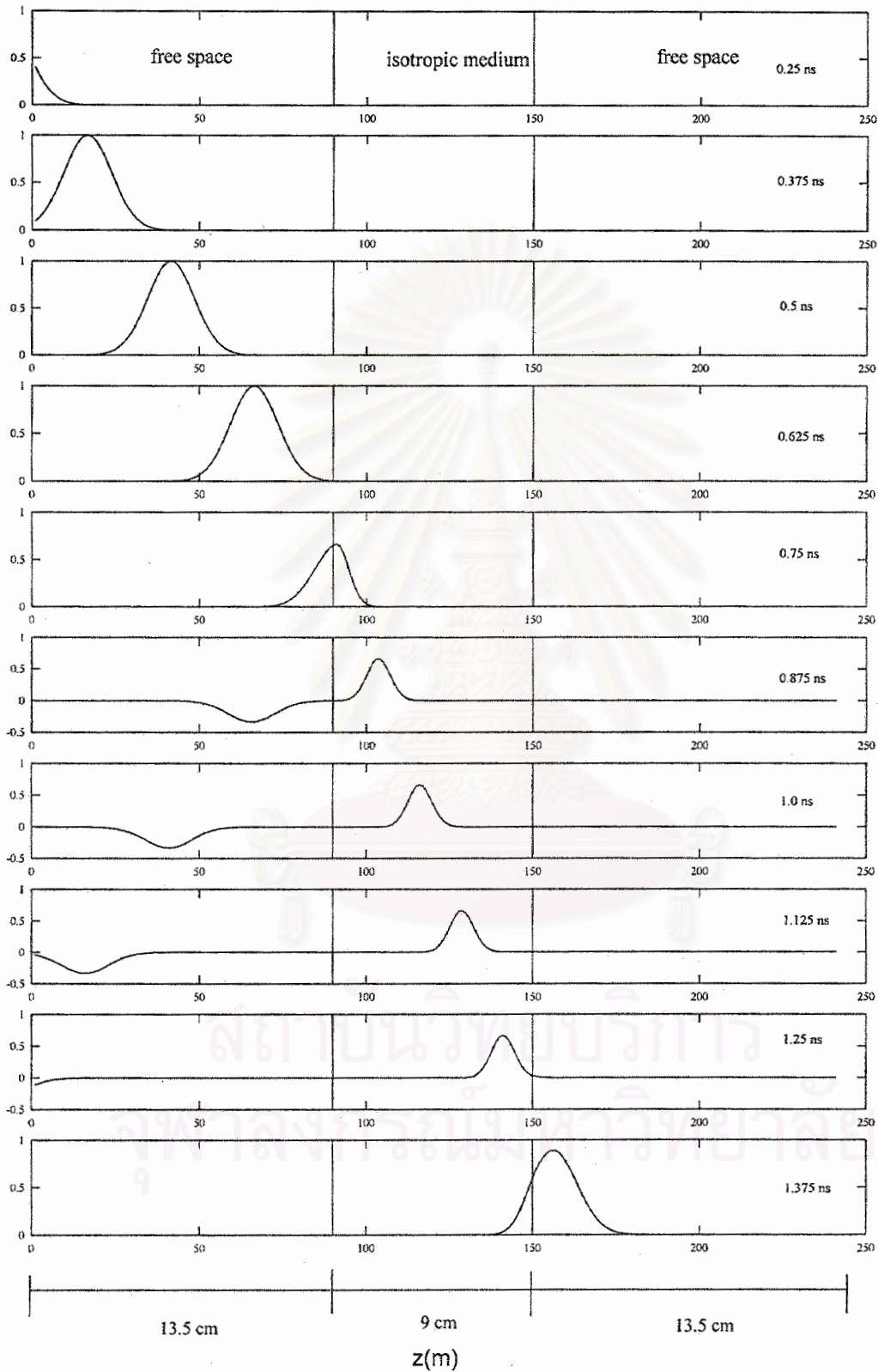
การคำนวณในตัวอย่างนี้ได้แบ่งโดเมนเชิงอวกาศหรือแกน z ออกเป็นอีลีเมนต์ชนิดเส้นจำนวน 240 ชั้น โดยความยาวของอีลีเมนต์แต่ละชั้นมีค่าเท่ากันหมดคือ Δz เท่ากับ 1.5 มิลลิเมตร การแบ่งโดเมนเวลานั้นจะกำหนดให้ช่วงเวลาของการคำนวณแต่ละชั้น Δt เท่ากับ 2.5×10^{-12} วินาที และเริ่มคำนวณตั้งแต่วเวลา t เท่ากับ 0 วินาที จนถึงเวลา t เท่ากับ 3.875×10^{-9} วินาที การเลือกขนาดของ Δt และ Δz จะสัมพันธ์กันตามเงื่อนไขของ Courant (Taflove, 1995) $c\Delta t = 0.5\Delta z$ โดยที่ $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ผลการคำนวณหาส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าในทิศทางตามแกน x ที่เวลาต่างๆ แสดงได้ในรูปที่ 2.9 (ก) - 2.9 (ค) กราฟที่อยู่ในรูปที่ 2.9(ก) - 2.9(ค) แต่ละรูปจะแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงขนาดของ E_x ตลอดช่วงการคำนวณตามแกน z ณ เวลาที่เท่ากับจำนวนชั้นเวลาที่ใช้ในการคำนวณ อย่างเช่นที่เวลา $t = 100$ ชั้นเวลา ก็ จะหมายความว่าถึงเวลา $t = 100\Delta t$ (s) เป็นต้น กล่าวอีกนัยหนึ่ง 1 ชั้นเวลาเท่ากับ 2.5×10^{-12} วินาที ผลการคำนวณดังแสดงในกราฟที่อยู่ในรูปที่ 2.9 (ก) ทำให้เราเห็นถึงการแพร่กระจายของคลื่นตกกระทบจากระนาบที่ป้อนคลื่นมายังแผ่นไดอิเล็กทริก และเกิดสนามของคลื่นขึ้นครั้งแรกที่ผิวไดอิเล็กทริกในช่วงเวลาประมาณ $t = 300\Delta t$ (s) จากนั้นคลื่นสะท้อนก็จะแพร่กระจายไปในทิศทาง $-z$ คลื่นส่งผ่านไปบนแผ่นไดอิเล็กทริกก็จะแพร่กระจายต่อไป จนกระทั่งเกิดการสะท้อนอีกครั้งก่อนที่จะส่งผ่านออกไปจากแผ่นไดอิเล็กทริกดังแสดงในกราฟที่เวลา $t = 550\Delta t$ (s) ผลการคำนวณในรูปที่ 2.9 (ข) และ 2.9 (ค) แสดงผลการคำนวณที่เวลาต่อจากรูปที่ 2.9 (ก) ตามลำดับ จากรูปที่ 2.9 (ข) และ 2.9 (ค) แสดงให้เห็นถึงการแพร่กระจายของคลื่น

ที่มีลักษณะการสะท้อนกลับไปมาในแผ่นไดอิเล็กทริกจนกระทั่งไม่มีคลื่นเหลืออยู่ในบริเวณปัญหา ทั้งนี้เนื่องจากเกิดการส่งผ่านกำลังคลื่นไปในทิศทาง $+z$ และสะท้อนกำลังกลับมากในทิศทาง $-z$ จนหมด ผลที่ได้จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณมีความสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพ และการใช้ขอบเขตดูดกลืนทำให้การคำนวณสามารถจำลองบริเวณอวกาศว่างที่อยู่ด้านหน้าและด้านหลังของแผ่นได้ อีกทั้งการเลือกความยาวของอีลีเมนต์ในโดเมนเชิงอวกาศ Δz และช่วงเวลาการคำนวณแต่ละขั้น Δt ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข Courant ก็ยังทำให้การคำนวณมีประสิทธิภาพ

เราได้นำผลการคำนวณความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อน ณ ตำแหน่งผิวด้านหน้าของแผ่นไดอิเล็กทริก และ ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นส่งผ่าน ณ ตำแหน่งผิวด้านหลังของแผ่นไดอิเล็กทริก มาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลา ดังมีรายละเอียดการคำนวณในภาคผนวก ก ผลการเปรียบเทียบแสดงในรูปที่ 2.10 (ก) และ 2.10 (ข) ตามลำดับ รูปที่ 2.10 (ก) แสดงขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ผลที่ได้ในรูปที่ 2.10 (ก) แสดงให้เห็นถึงการมีคลื่นสะท้อนออกมาจากแผ่นไดอิเล็กทริกหลายครั้ง (multiple reflections) และผลจากการเปรียบเทียบ พบว่าผลที่คำนวณได้ตามวิธีที่นำเสนอในงานวิทยานิพนธ์ คือวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาสอดคล้องกับผลที่คำนวณได้โดยใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลา (FD-TD) ในทำนองเดียวกัน เมื่อนำผลการคำนวณความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นส่งผ่าน ณ ตำแหน่งผิวด้านหลังของไดอิเล็กทริกที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังแสดงในรูปที่ 2.10 (ข) มาพิจารณา เราก็จะพบว่าผลจากการสะท้อนกลับภายในแผ่นไดอิเล็กทริกหลายครั้ง ทำให้มีคลื่นส่งผ่านออกมาหลายช่วงเวลา และเมื่อนำผลที่คำนวณได้มาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลา ก็พบว่ามีความสอดคล้องกัน

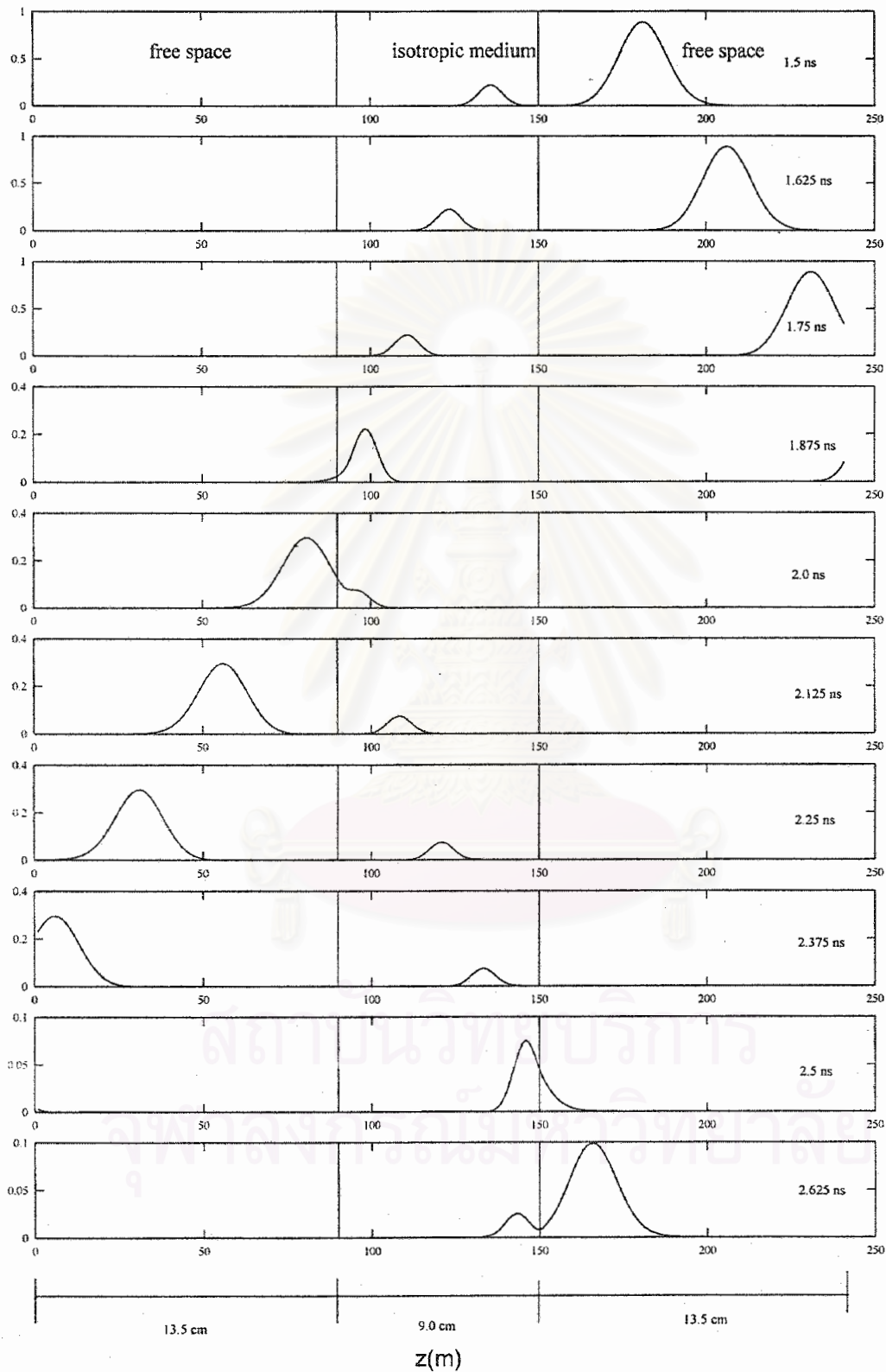
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Electric field (V/m)

(ก) เวลา 0 วินาที ถึง 1.375×10^{-9} วินาที

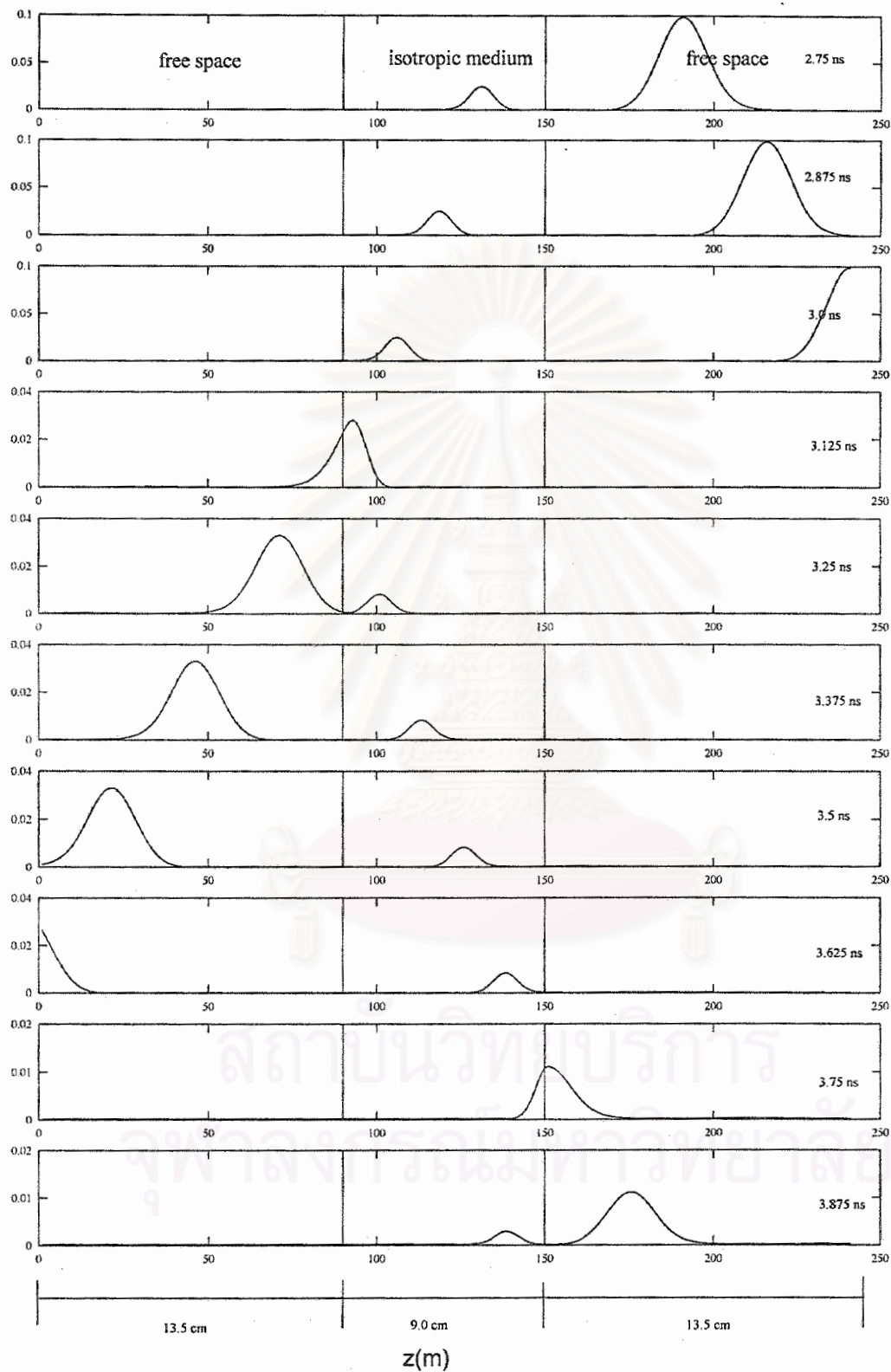
รูปที่ 2.9 การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริกที่แปรตามระยะทางและเวลา

Electric field (V/m)



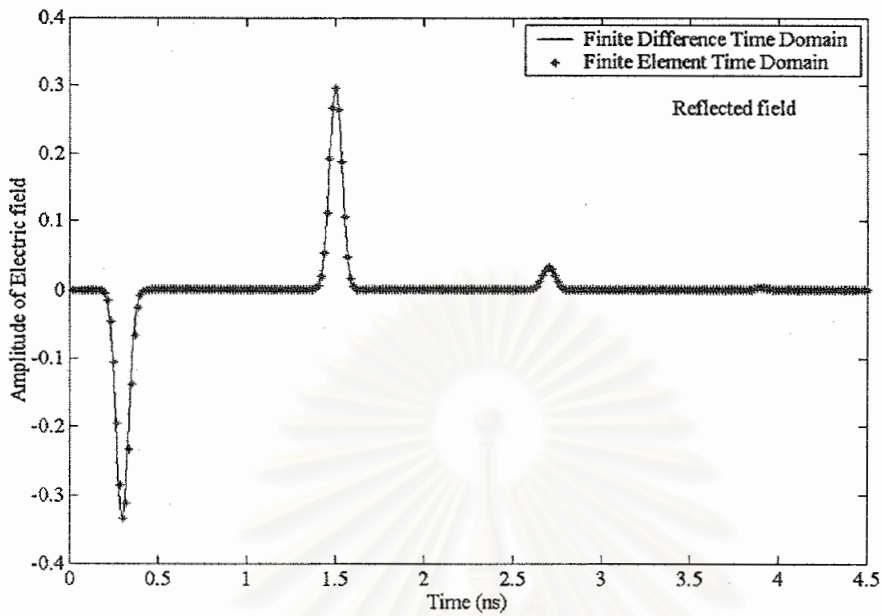
(ข) เวลา 1.5×10^{-9} วินาที ถึง 2.625×10^{-9} วินาที
 รูปที่ 2.9 (ต่อ) การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริก ที่แปรตามระยะทางและเวลา

Electric field (V/m)

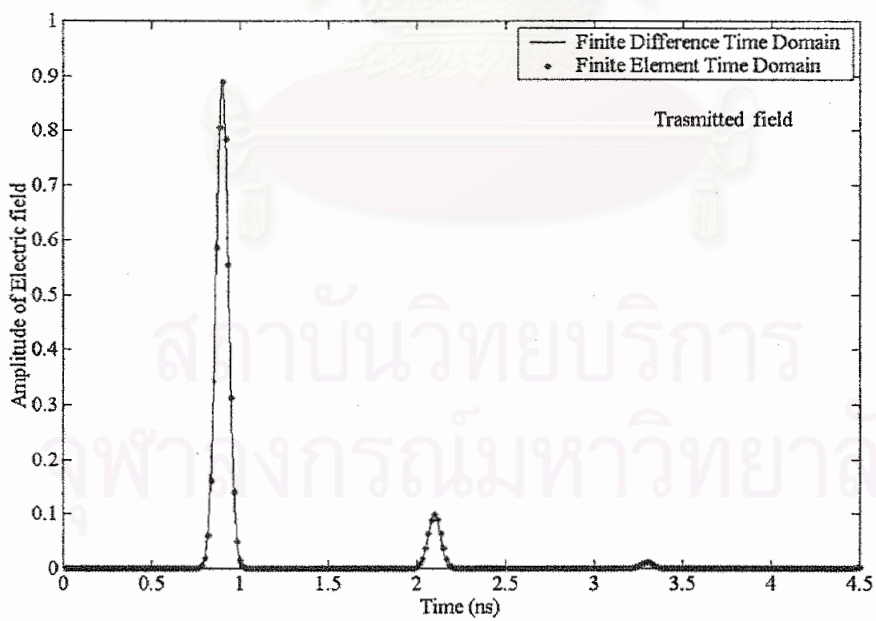


(ค) เวลา 2.75×10^{-9} วินาที ถึง 3.875×10^{-9} วินาที

รูปที่ 2.9 (ต่อ) การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริก ที่แปรตามระยะทางและเวลา



(ก) ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อนที่ตำแหน่งหน้าแผ่นไดอิเล็กทริก



(ข) ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นส่งผ่านที่ตำแหน่งหลังแผ่นไดอิเล็กทริก

รูปที่ 2.10 ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านในกรณีตัวอย่างของแผ่นไดอิเล็กทริกหนึ่งชั้น ที่มีสภาพยอมสัมพันธ์เท่ากับ 4.0

เพื่อเป็นการทดสอบความถูกต้องของผลการคำนวณในโดเมนเวลาของตัวอย่างในรูปที่ 2.8 เปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) และผลการคำนวณที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา (FD-TD) ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงได้นำผลการคำนวณในโดเมนเวลาดังแสดงในรูปที่ 2.10(ก) มาแปลงให้ได้ผลเฉลยในโดเมนความถี่ และนำผลที่ได้มาคำนวณสัมประสิทธิ์การสะท้อน (reflection coefficient) ซึ่งสามารถแสดงในรูปที่ 2.11(ก) และ 2.11(ข) โดยผลในรูปที่ 2.11(ก) แสดงถึงขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่แปรตามความถี่ในช่วง 0-10 GHz และผลในรูปที่ 2.11(ข) แสดงถึงเฟสของสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่แปรตามความถี่ ในช่วง 0-10 GHz เช่นกัน

ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้นำผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่ได้จากวิธีของวิทยานิพนธ์นี้มาเปรียบเทียบกับค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1991) ดังมีสมการของค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{22}e^{-j2k_2l}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23}e^{-j2k_2l}} \quad (2.66)$$

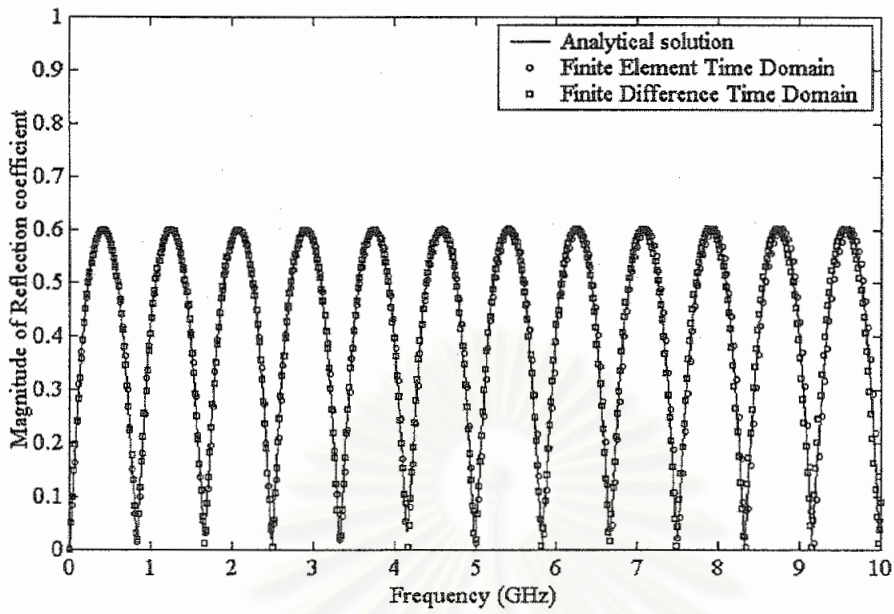
โดยที่

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ \Gamma_{23} &= \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \\ k_2 &= 2\pi f \sqrt{4\epsilon_0\mu_0} \quad , \quad L = 9cm \end{aligned}$$

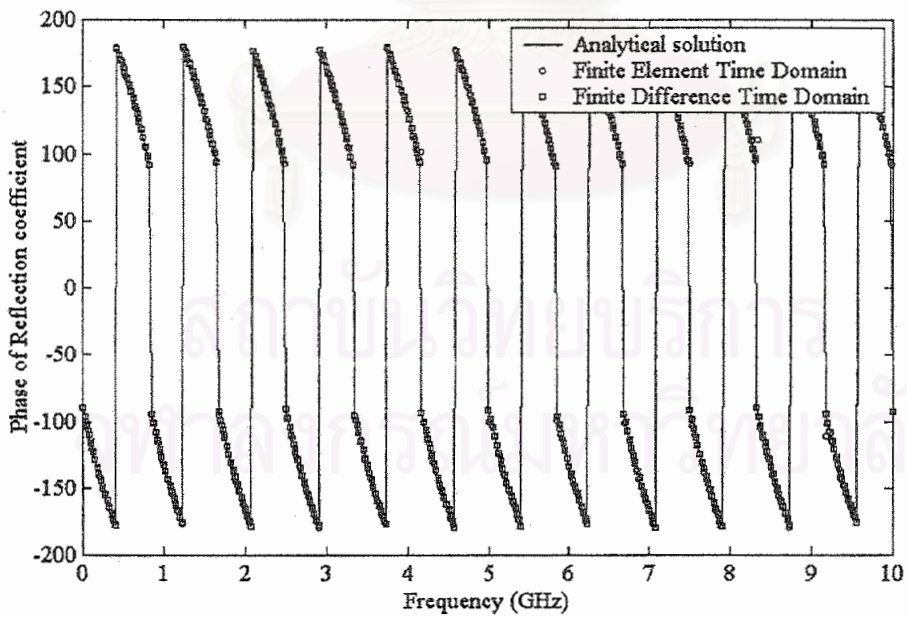
ในที่นี้ η_1, η_2 และ η_3 คือ intrinsic wave impedance ในตัวกลางอวกาศว่าง, แผ่นไดอิเล็กทริก และอวกาศว่าง ตามลำดับ, f คือความถี่, ϵ_0 และ μ_0 คือสภาพยอมไฟฟ้า และค่าความซึมได้ในอวกาศว่างตามลำดับ

ผลการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่คำนวณได้จากวิธีที่นำเสนอ วิธี FD-TD และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ตามสมการ (2.66) พบว่ามีความสอดคล้องกันดี ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าการหาผลตอบสนองทางความถี่จากผลเฉลยในโดเมนเวลา มีความถูกต้อง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน



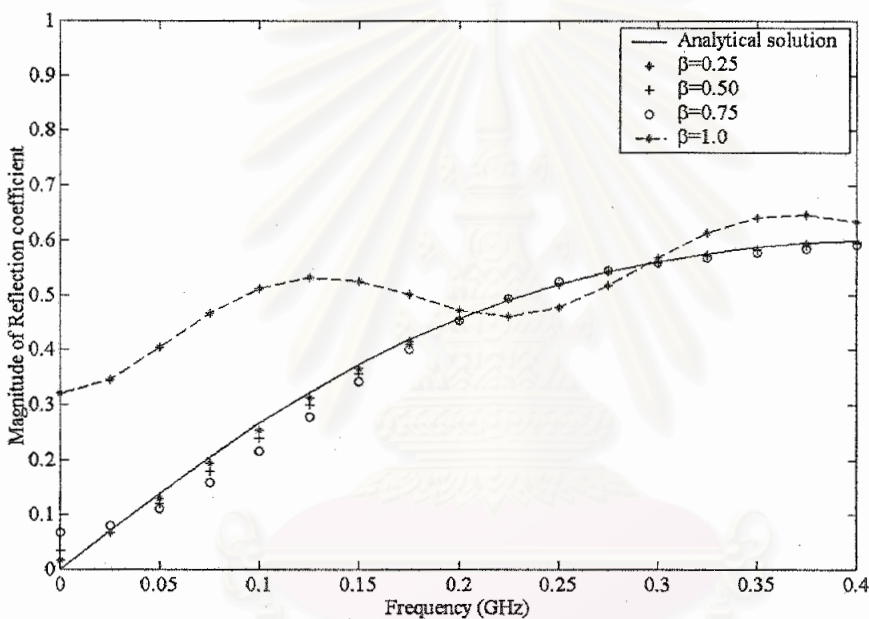
(ข) เฟสของสัมประสิทธิ์การสะท้อน

รูปที่ 2.11 การเปรียบเทียบผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนของ
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างเชิงเส้นในโดเมนเวลา

2.7.2 การเลือกค่า β ที่เหมาะสมในการคำนวณตามวิธีนิวมาร์ก-บีตา

ในหัวข้อนี้จะเป็นการทดสอบค่า β ที่เหมาะสมตามวิธีนิวมาร์ก-บีตา เพื่อให้ผลการคำนวณมีความผิดพลาดน้อยที่สุด ซึ่งค่า β จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0.25 ถึง 1.0 ในที่นี้ ได้เลือกค่าที่ใช้ในการทดสอบ 4 ค่าด้วยกัน คือ $\beta = 0.25, 0.50, 0.75$ และ 1.0 โดยใช้กรณีตัวอย่างเดียวกันกับหัวข้อที่ 2.7.1 และใช้ผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็นตัวชี้วัด ผลที่ได้แสดงในรูปที่ 2.12(ก)

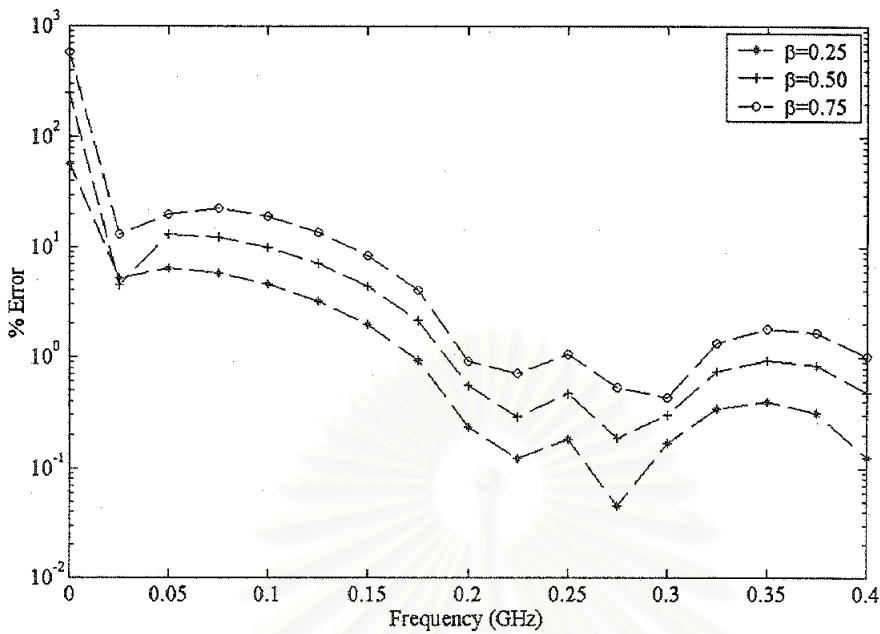
จากรูป พบว่า ค่า β ที่ทำให้ผลเฉลยของวิธี FE-TD มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยตามระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์มากที่สุด คือ $\beta = 0.25$ ในรูปที่ 2.12 (ข) เราได้แสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่แปรตามความถี่และค่า β และพบว่าค่า $\beta = 0.25$ ให้ผลความผิดพลาดต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับค่า β อีก 3 ค่า



(ก) สัมประสิทธิ์การสะท้อนแปรตามความถี่

รูปที่ 2.12 ผลของการเปลี่ยนแปลงค่า β ตามวิธีนิวมาร์ก-บีตา

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

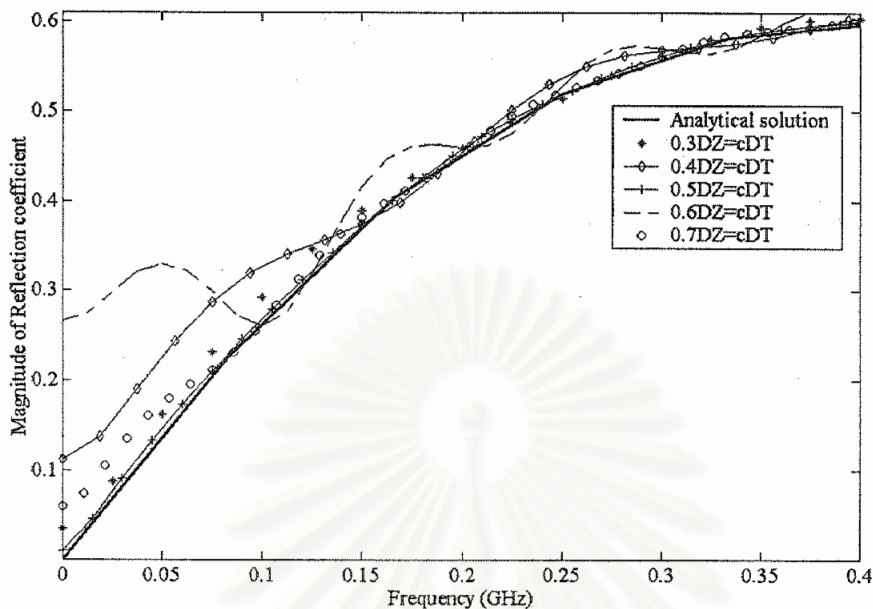
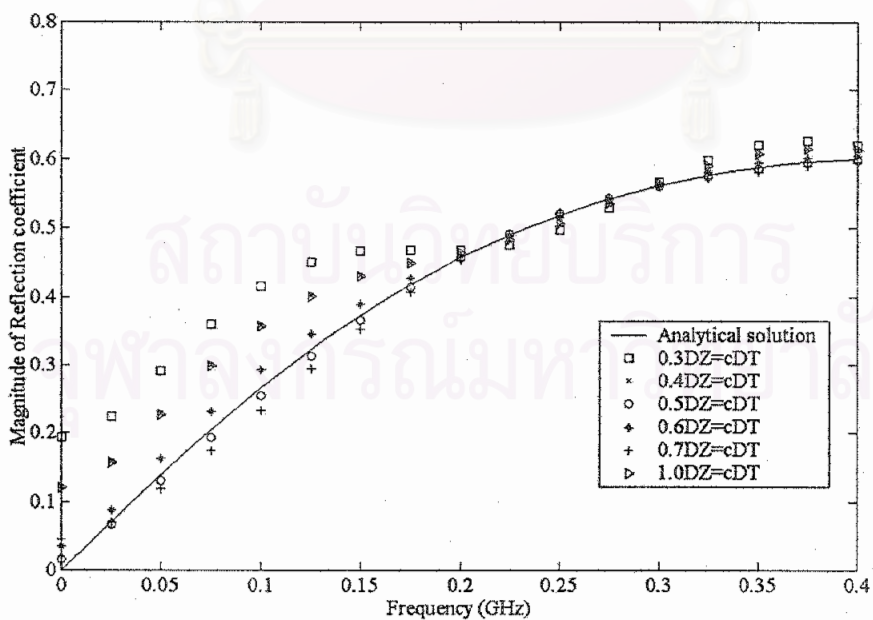


(ข) เปอร์เซนต์ความผิดพลาดแปรตามความถี่
รูปที่ 2.12 (ต่อ) ผลของการเปลี่ยนแปลงค่า β ตามวิธีนิวมาร์ก-บีตา

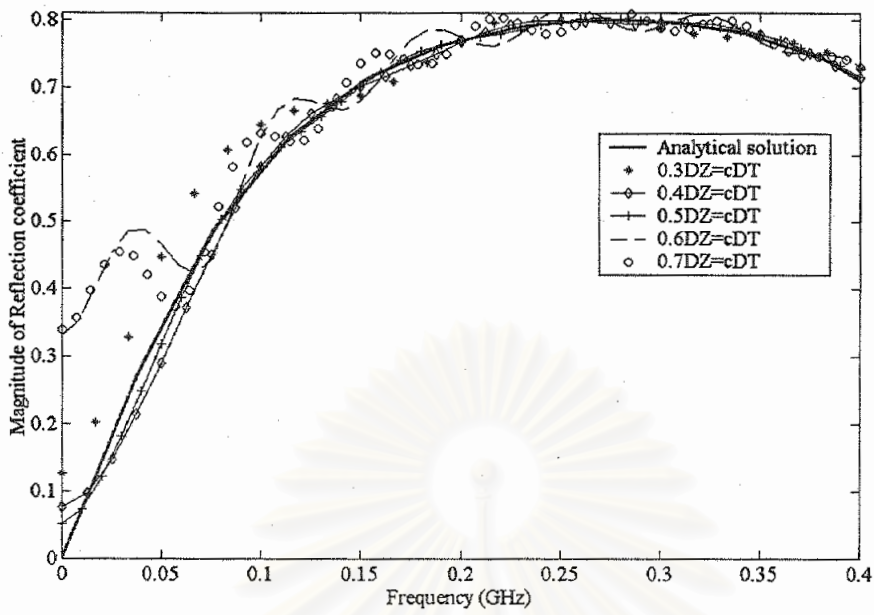
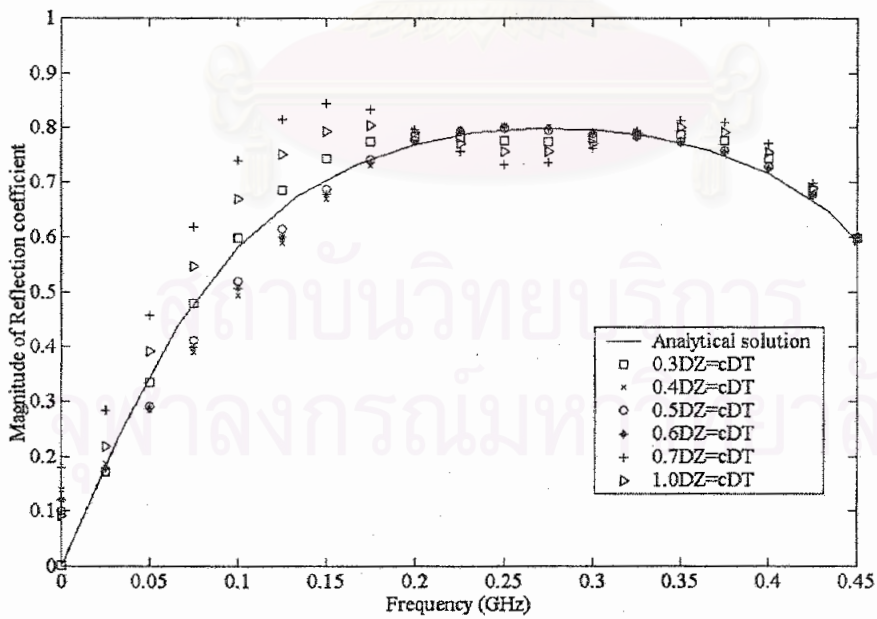
2.7.3 ความสัมพันธ์ของขนาดขั้นระยะทางและขั้นเวลา

การกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดขั้นระยะทาง (Δz) และขั้นเวลา (Δt) จะเป็นสิ่งที่สำคัญของวิธีการคำนวณในโดเมนเวลา เนื่องจากการกำหนดค่าทั้งสองนี้ที่เหมาะสม จะทำให้ผลคำนวณมีค่าความผิดพลาดต่ำ ซึ่งในที่นี้ ได้ใช้ความสัมพันธ์ตามเงื่อนไข Courant คือ $c \cdot \Delta t \leq \Delta z$ เพื่อเป็นการทดสอบหาความสัมพันธ์ของ Δz และ Δt ที่ดีที่สุด ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงทดสอบโดยกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดขั้นระยะทางและขั้นเวลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไข Courant จำนวน 5 ความสัมพันธ์ ใช้ในการคำนวณ FE-TD แล้วทดสอบเปอร์เซนต์ความผิดพลาดของผลเฉลย

ผลที่ได้แสดงในรูปที่ 2.13 และ 2.14 ซึ่งเป็นการแสดงผลเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนในช่วงความถี่ 0 ถึง 0.4 GHz ของกรณีคลื่นตกกระทบยังแผ่นไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพันธ์เท่ากับ 4 และ 9 ตามลำดับ มีความหนาเท่ากับ 9 เซนติเมตร เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของ Courant ต่างกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.13 (ก) และ 2.14 (ก) กำหนดให้ Δz คงที่และเปลี่ยนแปลง Δt ให้สอดคล้องกับเงื่อนไข Courant จากรูป พบว่า การกำหนดความสัมพันธ์ $c \cdot \Delta t = 0.5 \Delta z$ จะทำให้ผลการคำนวณสอดคล้องกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) มากที่สุดเมื่อเทียบกับการกำหนดความสัมพันธ์ในกรณีอื่น ๆ ส่วนในรูปที่ 2.13 (ข) และ 2.14 (ข) ใช้เงื่อนไข Courant ต่างกัน ที่มี Δt คงที่และเปลี่ยนแปลง Δz ผลการเปรียบเทียบพบว่า การกำหนดความสัมพันธ์ $c \cdot \Delta t = 0.5 \Delta z$ ยังคงให้ผลการคำนวณสอดคล้องกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์มากที่สุดเช่นกัน แม้ว่าในช่วงความถี่ 0 ถึง 0.15 GHz จะมีความผิดพลาดสูงเมื่อเทียบกับกรณีอื่น ๆ แต่แนวโน้มของความผิดพลาดจะมีค่าลดต่ำลงเมื่อความถี่สูงกว่าช่วงนี้

(ก) กำหนด Δz คงที่(ข) กำหนด Δt คงที่

รูปที่ 2.13 การเปรียบเทียบความถูกต้องของสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในแผ่นไดอิเล็กทริก
ที่มีค่าสภาพยอมสัมพันธ์เท่ากับ 4.0 เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของ Courant ต่างกัน

(ก) กำหนด Δz คงที่(ข) กำหนด Δt คงที่

รูปที่ 2.14 การเปรียบเทียบความถูกต้องของสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในแผ่นไดอิเล็กทริก
ที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 9.0 เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของ Courant ต่างกัน

2.8 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสะท้อนและการส่งผ่านคลื่นระนาบในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น วิธีการที่นำเสนอเป็นวิธีที่มีการสร้างสมการคลื่นให้สอดคล้องกับปัญหา ก่อน จากนั้นจึงนำระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลามาประยุกต์ใช้ สมการคลื่นที่นำเสนอสำหรับปัญหานี้จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองของเวลาและระยะทางใน 1 มิติ โดยมีฟังก์ชันไม่ทราบค่าคือส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าในทิศทางขนานกับแผ่นตัวกลางจำนวน 2 ตัว การใช้ฟังก์ชันไม่ทราบค่าเพียง 2 ตัว ทำให้วิธีมีจุดเด่นเนื่องจากทำให้ตัวแปรในการคำนวณลดลง ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทดสอบความใช้งานได้ของวิธีที่นำเสนอในกรณีตัวอย่างที่เป็น แผ่นไดอิเล็กทริกชั้นเดียวและเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ และวิธี FD-TD ผลการเปรียบเทียบพบว่าสอดคล้องกันดี และเพื่อเป็นการศึกษาวิธี FE-TD ที่นำเสนอ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้นำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของชั้นเวลาและชั้นระยะทางว่าควรจะมีความสัมพันธ์อย่างไรจึงจะให้ผลเฉลยที่แม่นยำตรง



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การวิเคราะห์ความเข้มสนามไฟฟ้าในตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น

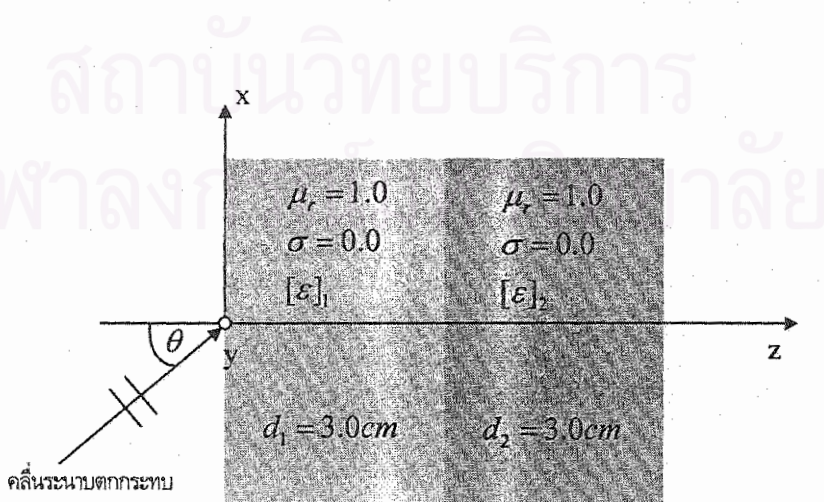
3.1 บทนำ

ในบทนี้จะนำเสนอตัวอย่างการวิเคราะห์ เพื่อทดสอบความใช้ได้ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาที่ผู้เสนอนิพนธ์ได้นำเสนอมาแล้วในบทที่ 2 ผลการวิเคราะห์ในบทนี้จะวิเคราะห์ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นเพื่อศึกษาการส่งผ่านคลื่นระนาบ ผลตอบสนองในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ของคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่าน โดยมีตัวอย่างการวิเคราะห์ 3 ตัวอย่าง ในตัวอย่างแรกเป็นการวิเคราะห์ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติแสดงด้วยเทนเซอร์สภาพยอม และมีความซาบซึมได้แสดงด้วยสเกลาร์ตัวกลางวางอยู่ในอวกาศว่างและกำหนดให้ที่ตำแหน่ง $z=0$ มีคลื่นตกกระทบเป็นมุมใด ๆ ตัวอย่างที่สองวิเคราะห์ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของตัวกลางเช่นเดียวกับตัวอย่างแรก แต่ต่างตรงที่ตำแหน่ง $z \geq L$ ได้กำหนดให้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ โดยผลการคำนวณจากตัวอย่างทั้งสองนี้ได้เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ของ (Titchener and Willis, 1991) สำหรับตัวอย่างที่สามได้วิเคราะห์ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีคุณสมบัติแสดงด้วยเทนเซอร์สภาพยอม ตัวกลางวางอยู่ในอวกาศว่างและกำหนดให้ที่ตำแหน่ง $z=0$ มีคลื่นตกกระทบตั้งฉากกับตัวกลาง ผลการคำนวณจากตัวอย่างนี้ได้เปรียบเทียบกับวิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลาของ (Schneiber and Hudson, 1993) มีรายละเอียด ดังนี้

3.2 ผลการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 1 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอม

วัตถุประสงค์ของการนำเสนอในตัวอย่างนี้ เพื่อทดสอบความใช้ได้ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาในการวิเคราะห์ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นดังแสดงในรูปที่ 3.1 กำหนดคลื่นตกกระทบมีทิศการตกกระทบทำมุม θ กับแกน z และมีคุณสมบัติของตัวกลางที่วิเคราะห์ดังแสดงในตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอม

ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่วิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 1

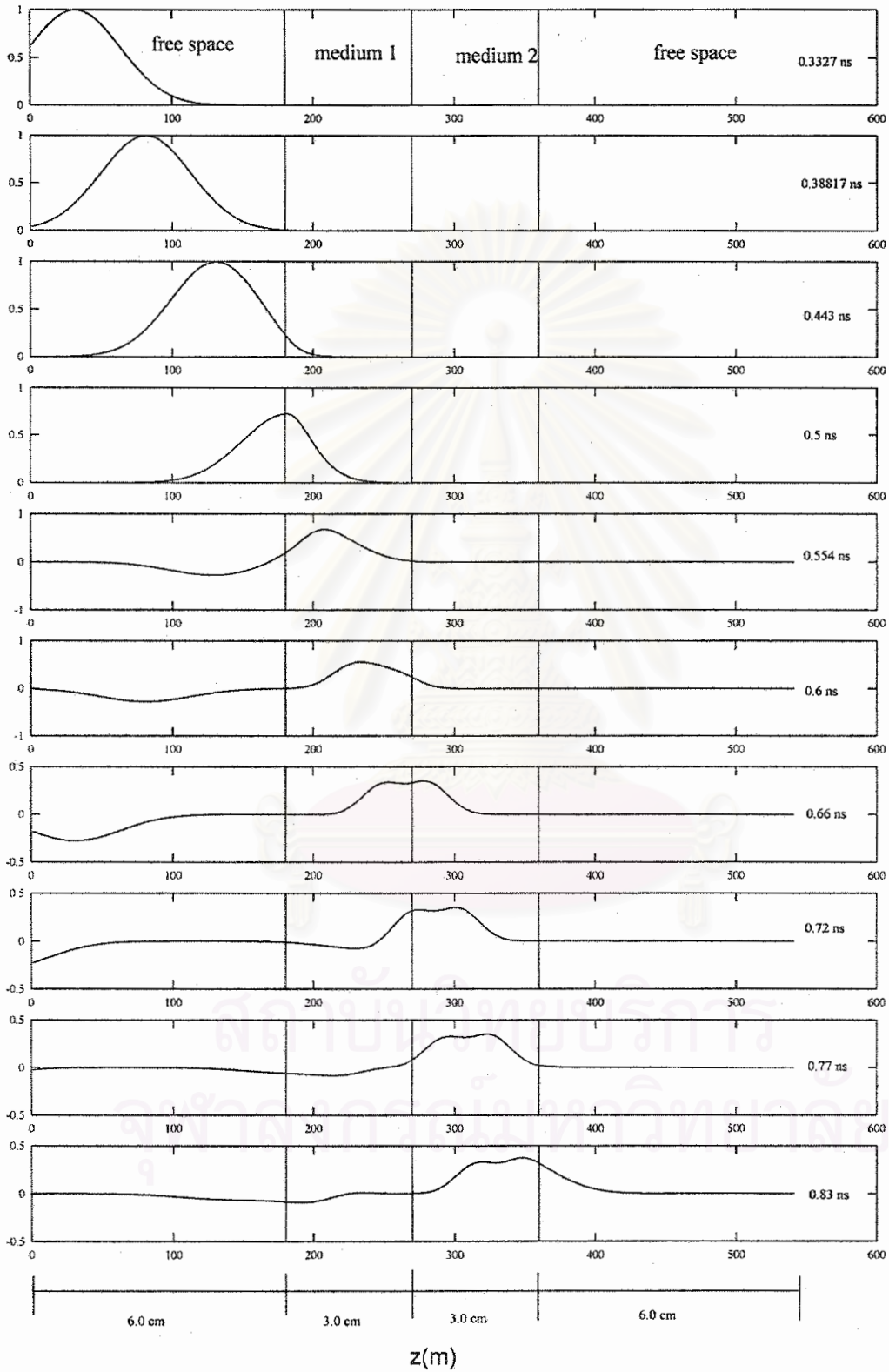
ชั้นของตัวกลาง	ความหนา	ค่าความซึมได้	ค่าสภาพยอม	ค่าสภาพนำ
1	3.0 ซม.	$\mu = \mu_0$	$\epsilon_0 \begin{bmatrix} 3.5 & -1.5 & 0.0 \\ -1.5 & 3.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$	0.0
2	3.0 ซม.	$\mu = \mu_0$	$\epsilon_0 \begin{bmatrix} 5.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$	0.0

คุณสมบัติของคลื่นตกกระทบที่กำหนดในที่นี้ จะเป็นคลื่นระนาบที่อยู่ในรูปของความเข้มสนามไฟฟ้า และเป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์ที่มีขนาดสูงสุดเท่ากับ 1 โวลต์ต่อเมตร, ค่าเวลา ณ ตำแหน่งที่มีขนาดสูงสุด (t_0) มีค่าเท่ากับ 0.3×10^{-9} วินาที, ค่าความกว้างของพัลส์ (τ) เท่ากับ 0.05×10^{-9} วินาที

ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างนี้ ได้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกวิเคราะห์การส่งผ่านคลื่นระนาบตกกระทบ ที่มีมุมตกกระทบตั้งฉากกับแผ่นตัวกลางและส่วนที่สองวิเคราะห์สัมประสิทธิ์การสะท้อนที่แปรตามความถี่ เมื่อกำหนดให้คลื่นตกกระทบมีมุมการตกกระทบเท่ากับ 30, 45 และ 60 องศา ตามลำดับ

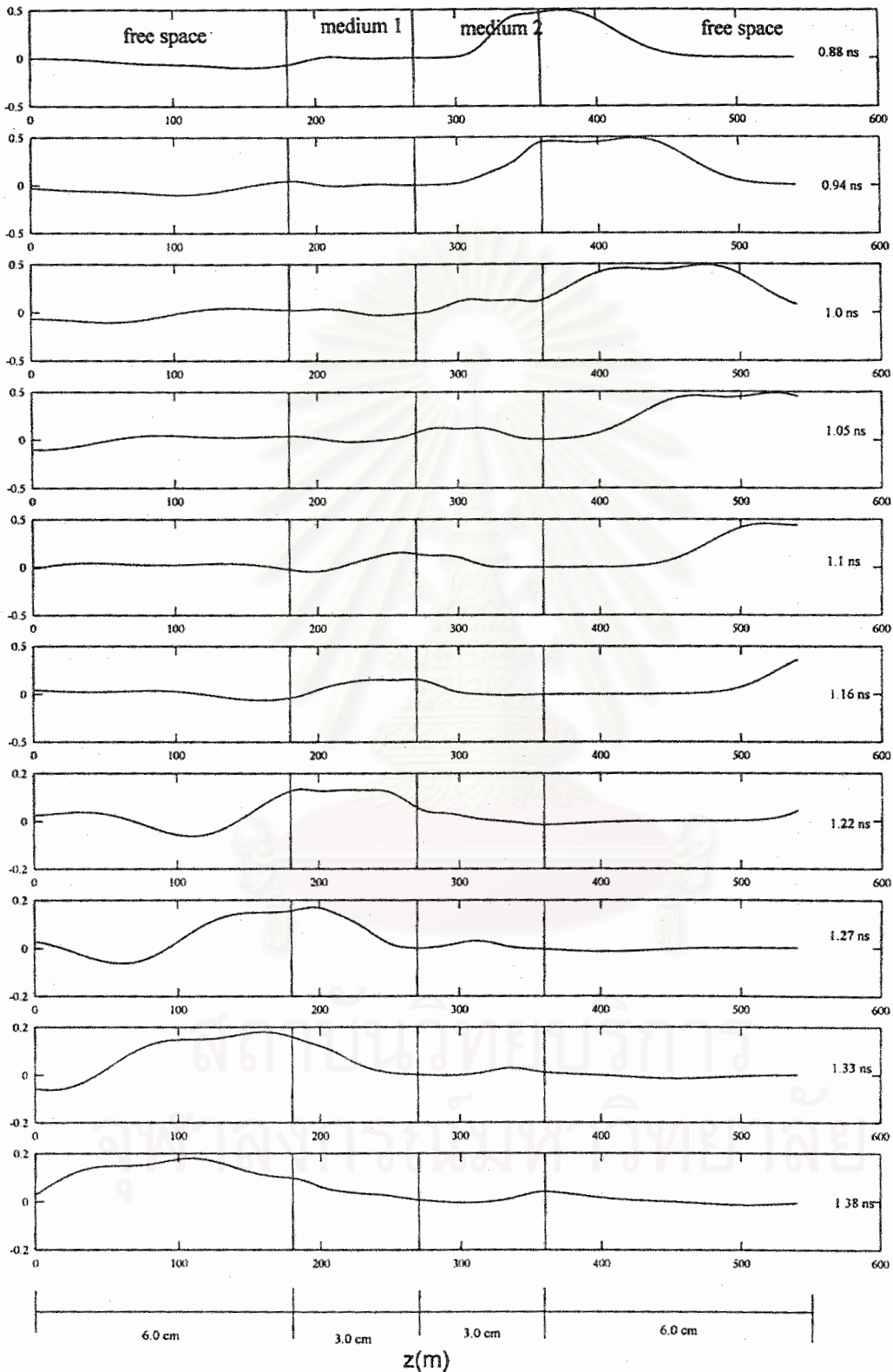
ส่วนแรกดังแสดงในรูปที่ 3.2 การส่งผ่านคลื่นระนาบตกกระทบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น กำหนดความยาวของอวกาศว่างในแต่ละด้านเท่ากับ 6 เซนติเมตรและมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 90 อีลีเมนต์ ส่วนความยาวของแผ่นตัวกลางสองชั้นเท่ากับ 6 เซนติเมตรและมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 90 อีลีเมนต์เช่นกัน ดังนั้นจะมีจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมด 270 อีลีเมนต์, จำนวนโนดทั้งหมด 541 โหนดและมีจำนวนความเข้มสนามไฟฟ้าไม่รู้ค่าตามแนวแกน x และ y รวมกันเท่ากับ 1080 ค่า เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ตามที่กล่าวมานี้ จะทำให้ได้ค่า Δz เท่ากับ 3.33×10^{-4} เมตร และได้ค่า Δt เท่ากับ 5.54×10^{-13} วินาทีตามความสัมพันธ์ $\Delta z = 2c\Delta t$ จากรูปที่ 3.2 คลื่นตกกระทบเดินทางในอวกาศว่างในทิศทาง $+z$ กระทบแผ่นตัวกลางที่เวลาประมาณ 3.87×10^{-10} วินาที (700 ชั้นเวลา) ทำให้เกิดสนามของคลื่นสะท้อนและสนามของคลื่นส่งผ่าน จากนั้นสนามของคลื่นสะท้อนจะแพร่กระจายไปในทิศทาง $-z$ จนจางหายไปเป็นเวลาประมาณ 8.81×10^{-10} วินาที (1500 ชั้นเวลา) ณ ขอบเขตดูดกลืน สนามของคลื่นส่งผ่านจะแพร่กระจายไปในทิศทาง $+z$ ในแผ่นตัวกลางที่หนึ่งสู่แผ่นตัวกลางที่สองและแพร่กระจายไปในอวกาศว่าง สนามของคลื่นส่งผ่านนี้จะจางหายไปเป็นเวลาประมาณ 1.27×10^{-9} วินาที (2300 ชั้นเวลา) ณ ขอบเขตดูดกลืน สำหรับสนามที่เกิดขึ้นในแผ่นตัวกลางจะมีการสะท้อนกลับไปมาจนไม่มีคลื่นเหลืออยู่ในบริเวณปัญหา จากที่กล่าวมานี้ พบว่าการส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกมีลักษณะของการเกิดของคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านเช่นเดียวกับกรณีการส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริกดังแสดงในบทที่ 2

Electric field (V/m)



(ก) เวลาตั้งแต่ 0.3327×10^{-9} วินาที ถึง 0.83×10^{-9} วินาที
 รูปที่ 3.2 การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น
 ที่แปรตามระยะทางและเวลา เมื่อคุณสมบัติของตัวกลางดังแสดงในตารางที่ 3.1

Electric field (V/m)

(ข) เวลาตั้งแต่ 0.88×10^{-9} วินาที ถึง 1.38×10^{-9} วินาที

รูปที่ 3.2 (ต่อ) การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น
ที่แปรตามระยะทางและเวลา เมื่อคุณสมบัติของตัวกลางดังแสดงในตารางที่ 3.1

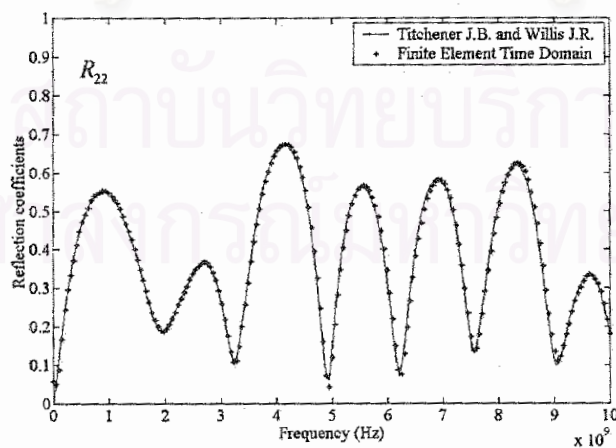
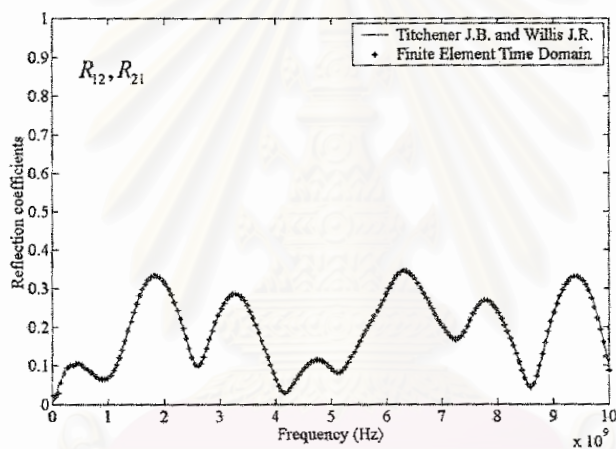
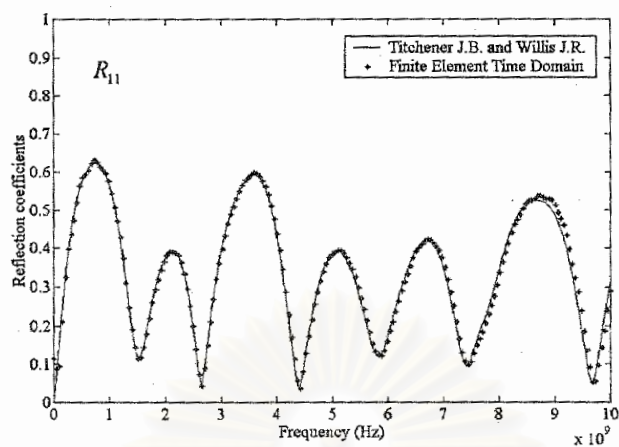
ในส่วนที่สองนี้ แสดงการทดสอบความใช้ได้ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาที่นำมาวิเคราะห์ แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น โดยมีคุณสมบัติของตัวกลางดังตาราง 3.1 และกำหนดให้คลื่นตกกระทบมีมุม 30 องศา 45 องศา และ 60 องศา ตามลำดับ การกำหนดอีลีเมนต์และจำนวนชั้นเวลามีจำนวนเท่ากับผลการคำนวณในส่วนที่หนึ่ง ผลการคำนวณที่น่าเสนอนี้จะแสดงค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน ที่มีขั้นตอนจากการนำค่าความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x และแนวแกน y ณ ตำแหน่ง $z = 0$ หรือโนดที่ 1 ที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลามาแปลงในโดเมนความถี่ด้วยการแปลงฟูริเยร์และนำค่าความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบในโดเมนเวลามาแปลงในโดเมนความถี่ด้วยการแปลงฟูริเยร์เช่นเดียวกัน แล้วจึงหาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11}, R_{12}, R_{21} และ R_{22} ที่แปรตามความถี่ในช่วง 0 ถึง 10 GHz โดยใช้สมการ (2.64) และ (2.65)

รูปที่ 3.3 ถึง รูปที่ 3.5 แสดงค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11}, R_{12}, R_{21} และ R_{22} ที่แปรตามความถี่ในช่วง 0 GHz ถึง 10 GHz โดยได้เปรียบเทียบผลการคำนวณกับงานวิจัยของ (Titchener and Willis, 1991) มีรายละเอียดดังแสดงในภาคผนวก ข พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลามีค่าใกล้เคียงและสอดคล้องกับงานวิจัยของ (Titchener and Willis, 1991) โดยได้แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ R_{11} ดังในตารางที่ 3.2 ที่ค่าความถี่ 0.9×10^9 Hz, 1.8×10^9 Hz และ 2.7×10^9 Hz ตามลำดับ จากตาราง ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลามีค่าไม่เกิน 1.755 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งเป็นเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่สามารถยอมรับได้

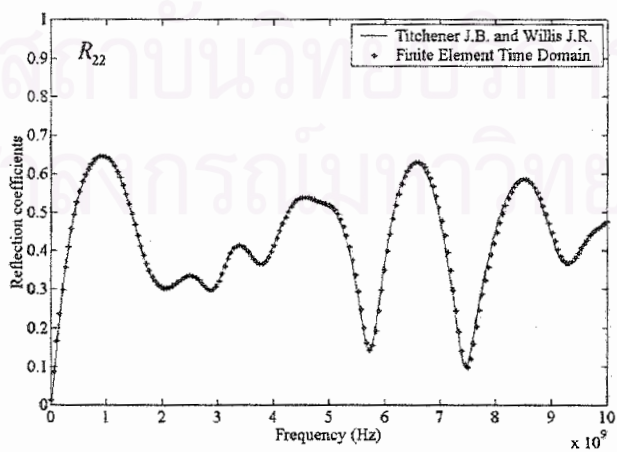
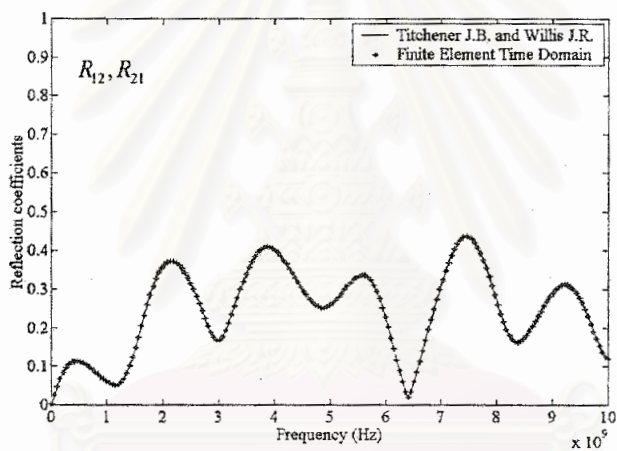
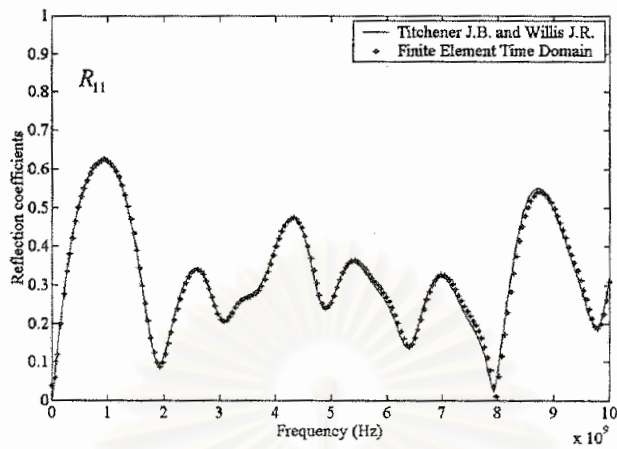
ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} ในตัวอย่างที่ 1

f (Hz)	$\theta = 30^\circ$			$\theta = 45^\circ$			$\theta = 60^\circ$		
	FETD	งานวิจัย*	% Error	FETD	งานวิจัย*	% Error	FETD	งานวิจัย*	% Error
0.9×10^9	0.6046	0.6023	0.3818	0.6196	0.622	0.3922	0.5666	0.5703	0.6487
1.8×10^9	0.2798	0.2848	1.755	0.1370	0.1348	1.6015	0.5478	0.5452	0.4768
2.7×10^9	0.3300	0.3285	0.4566	0.3300	0.3290	0.3039	0.2172	0.2168	0.1845

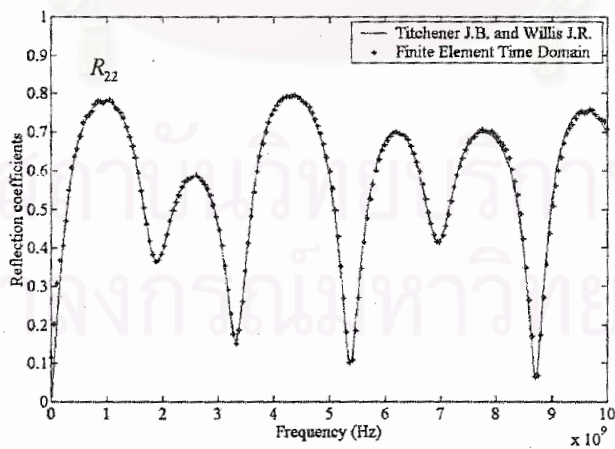
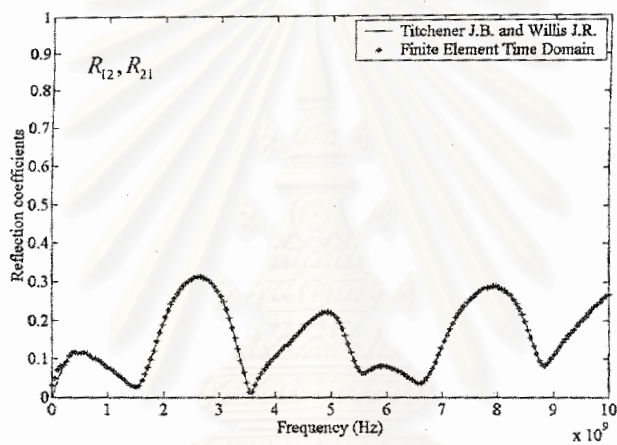
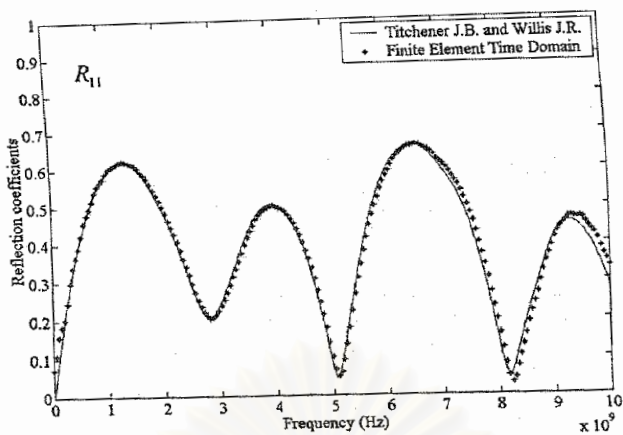
* : (Titchener and Willis, 1991)



รูปที่ 3.3 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น
เมื่อคลื่นตกกระทบมีมุม 30 องศา

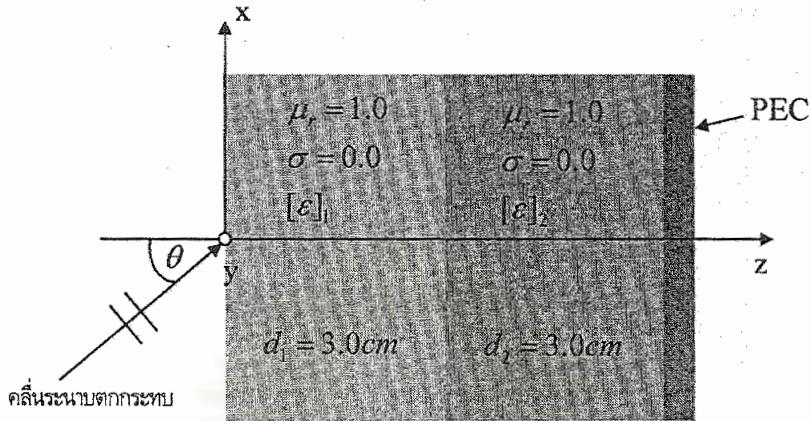


รูปที่ 3.4 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น
เมื่อคลื่นตกกระทบมีมุม 45 องศา



รูปที่ 3.5 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น
เมื่อคลื่นตกกระทบมีมุม 60 องศา

ตัวอย่างที่ 2 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอมและมีแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ $z \geq L$



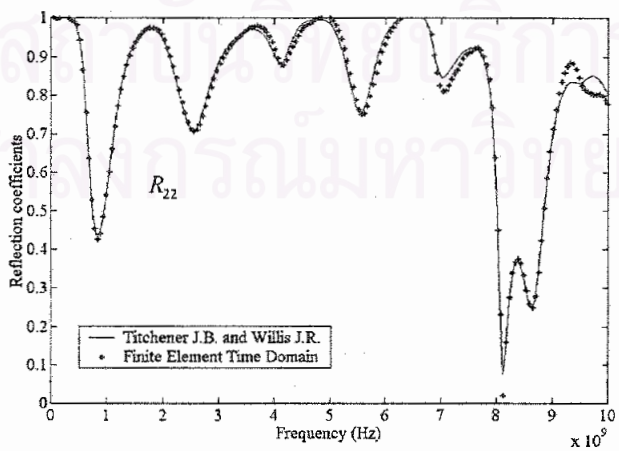
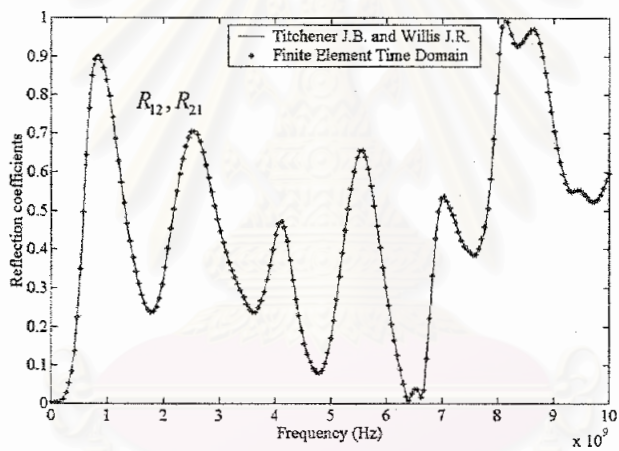
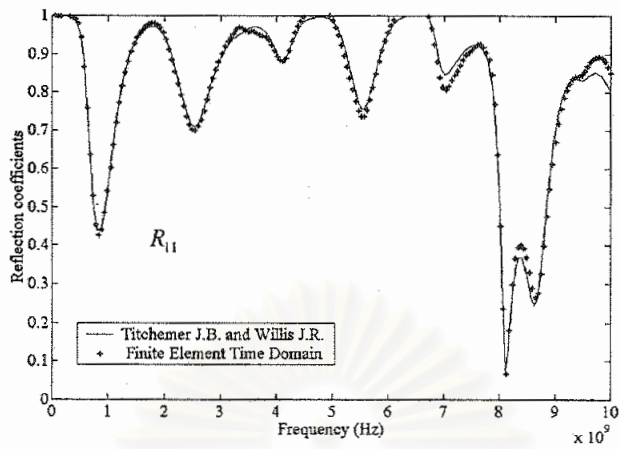
รูปที่ 3.6 แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอมและมีแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ $z \geq L$

ในตัวอย่างนี้ได้วิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11}, R_{12}, R_{21} และ R_{22} ในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ $z \geq L$ เพื่อศึกษาผลของตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ที่มีต่อค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในตัวอย่างนี้มีค่าเหมือนกับตัวอย่างที่ 1 ผลการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 3.7 ถึง รูปที่ 3.9 พบว่า การวางแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ที่ $z \geq L$ มีผลทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนมีขนาดใหญ่กว่ากรณีที่ไม่มีแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ที่ $z \geq L$ (เปรียบเทียบจากผลของตัวอย่างที่ 1) เนื่องจากคลื่นตกกระทบไม่สามารถส่งผ่านที่ $z \geq L$ ได้จึงมีเพียงคลื่นสะท้อนเท่านั้น นอกจากนี้ ผลการคำนวณที่นำเสนอได้เปรียบเทียบกับงานวิจัยของ (Titchener and Willis, 1991) ดังแสดงรายละเอียดในภาคผนวก ข พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลามีค่าใกล้เคียงและสอดคล้องกับงานวิจัยของ (Titchener and Willis, 1991) โดยได้แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ R_{11} ดังในตารางที่ 3.3 ที่ค่าความถี่ 0.9×10^9 Hz, 1.8×10^9 Hz และ 2.7×10^9 Hz ตามลำดับ ซึ่งมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดสูงสุดเท่ากับ 3.467 เปอร์เซ็นต์ โดยถือว่ามีความไม่สูงมากนัก

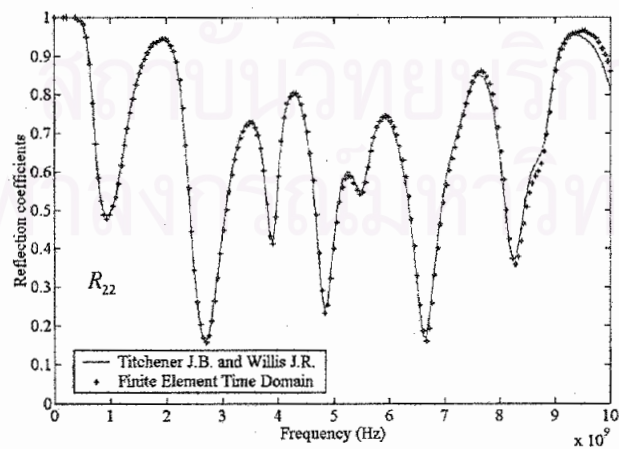
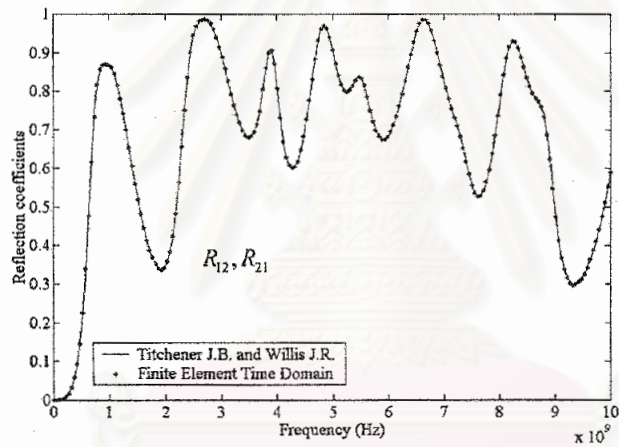
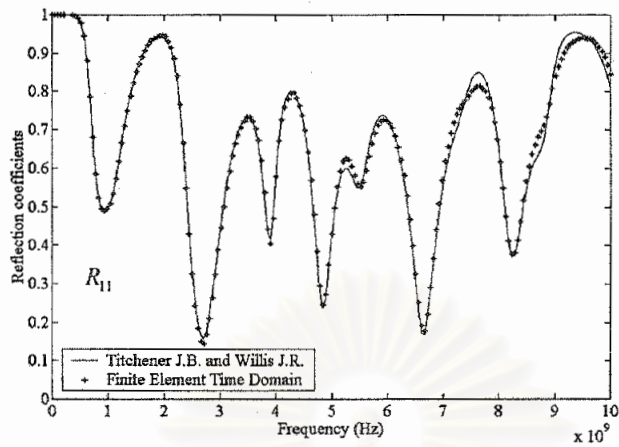
ตารางที่ 3.3 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} ในตัวอย่างที่ 2

f (Hz)	$\theta = 30^\circ$			$\theta = 45^\circ$			$\theta = 60^\circ$		
	FETD	งานวิจัย*	% Error	FETD	งานวิจัย*	% Error	FETD	งานวิจัย*	% Error
0.9×10^9	0.4666	0.4568	2.155	0.4982	0.4900	1.675	0.789	0.781	1.049
1.8×10^9	1.0052	0.9715	3.467	0.9162	0.9337	1.874	0.857	0.858	0.1281
2.7×10^9	0.7716	0.7555	2.136	0.1542	0.1571	1.846	0.796	0.781	1.931

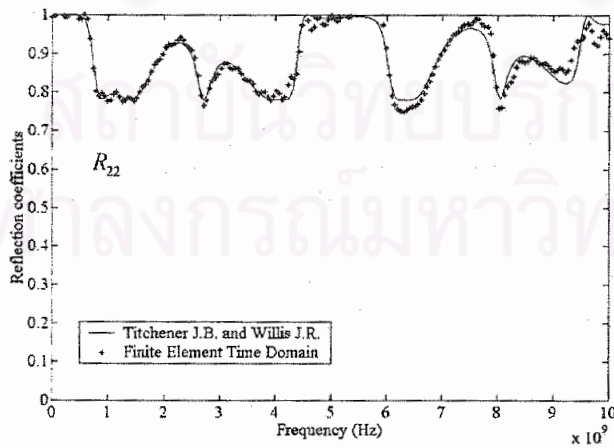
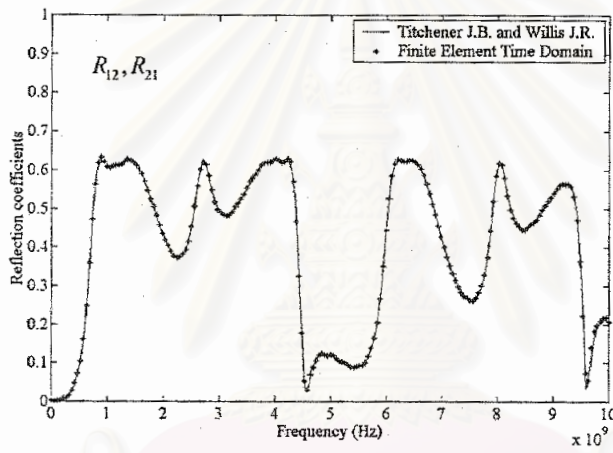
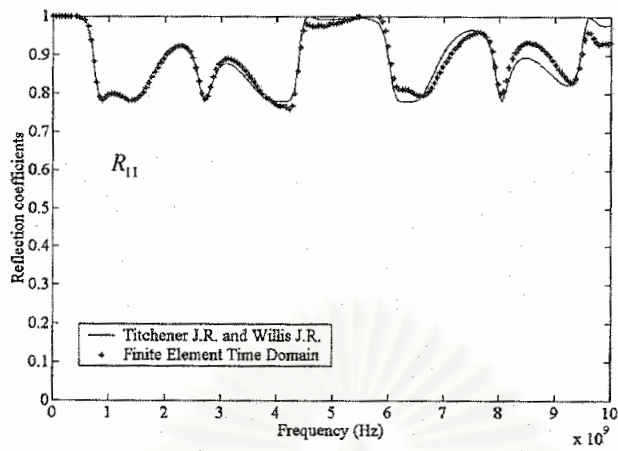
* : (Titchener and Willis, 1991)



รูปที่ 3.7 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มี $z \geq L$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และกำหนดคลื่นตกกระทบมีมุม 30 องศา

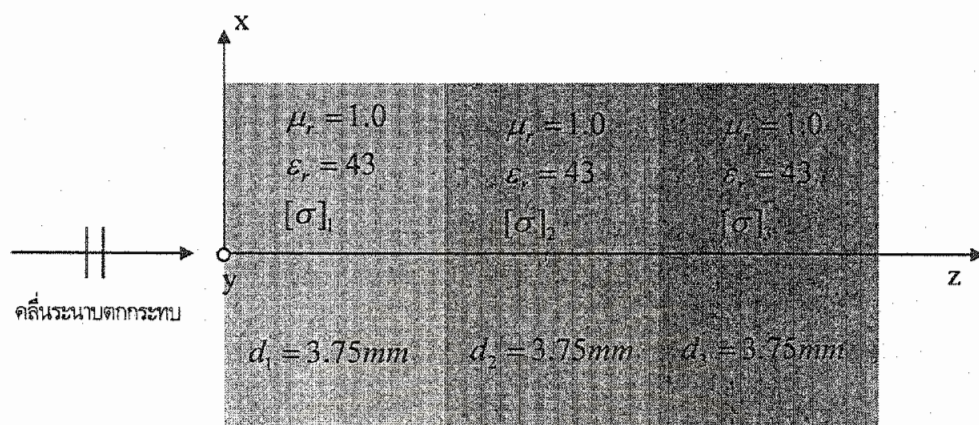


รูปที่ 3.8 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มี $z \geq L$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และกำหนดคลื่นตกกระทบมีมุม 45 องศา



รูปที่ 3.9 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มี $z \geq L$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และกำหนดคลื่นตกกระทบมีมุม 60 องศา

ตัวอย่างที่ 3 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพนำ



รูปที่ 3.10 แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพนำ

การนำเสนอผลการคำนวณในตัวอย่างที่ 3 นี้ เพื่อทดสอบความใช้ได้ของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่น่าวิเคราะห์แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้น โดยมีคุณสมบัติของตัวกลางดังตาราง 3.4 เมื่อกำหนดให้คลื่นตกกระทบตั้งฉากกับแผ่นตัวกลาง นอกจากนี้ยังศึกษาผลของความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x และแนวแกน y ในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพนำ

แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่มีคุณสมบัติของตัวกลางดังตารางที่ 3.4 นี้จะเป็นตัวกลางที่มีคุณสมบัติของคาร์บอนไฟเบอร์ (carbon fiber) ที่กำหนดค่าความซบซึ่มได้และค่าสภาพยอมเป็นแบบไอโซทรอปิกหรือเป็นแบบสเกลาร์ ส่วนค่าสภาพนำอยู่ในรูปเทนเซอร์ โดยแต่ละชั้นของแผ่นตัวกลางมีค่าสภาพนำที่ขึ้นกับการวางไฟเบอร์ คือชั้นที่หนึ่งจะมีไฟเบอร์วางในแนวขนานแกน y และจะขนานแนวแกน x ในชั้นที่สาม ส่วนชั้นที่สองจะมีไฟเบอร์ทำมุม 45 องศากับแกน x และ y (Schneider and Hudson, 1993)

ตารางที่ 3.4 คุณสมบัติของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีค่าสภาพนำในรูปเทนเซอร์

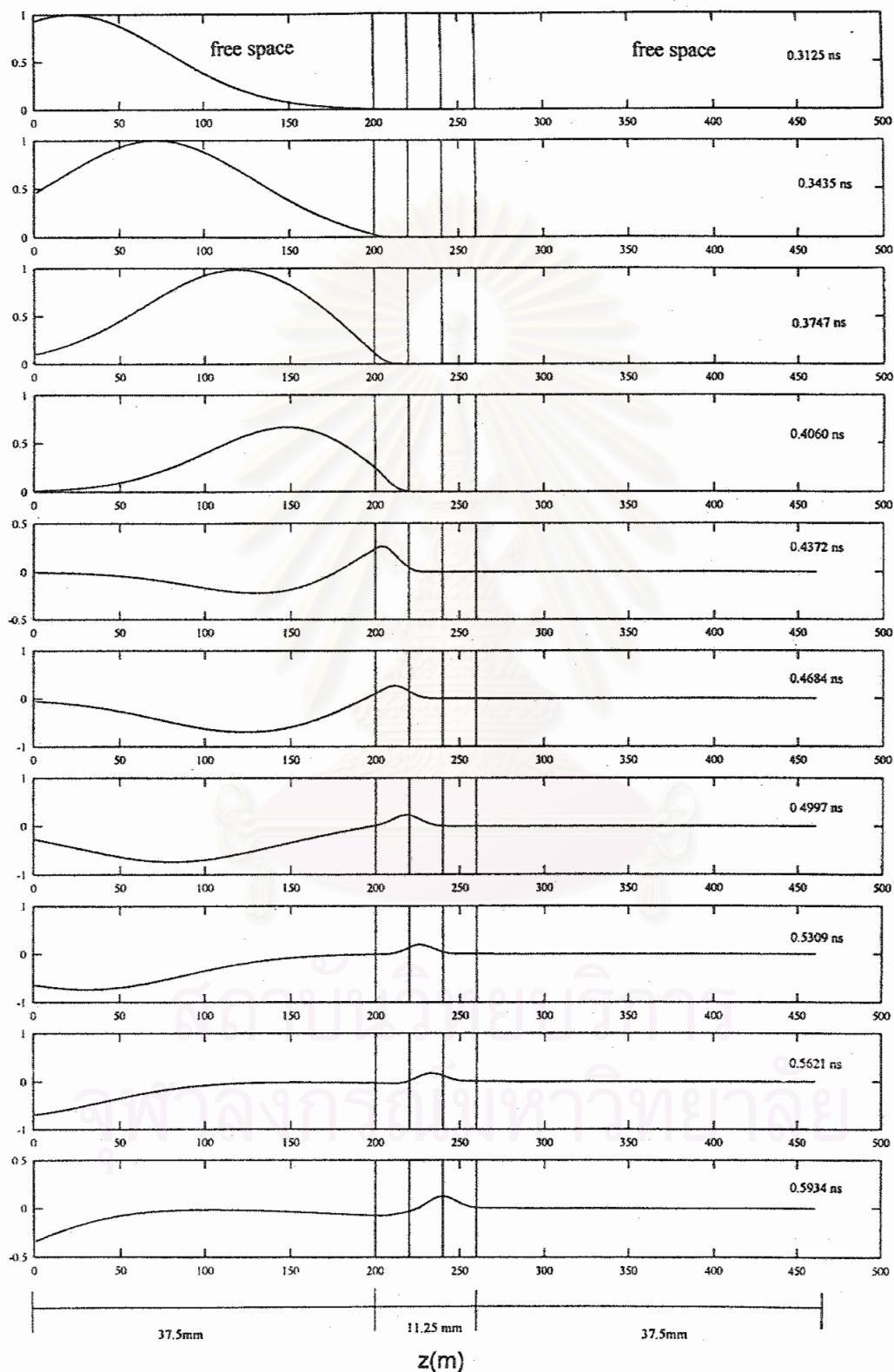
ชั้นของตัวกลาง	ความหนา	ค่าความซบซึ่มได้	ค่าสภาพยอม	ค่าสภาพนำ
1	3.75 มม.	$\mu = \mu_0$	$43\epsilon_0$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$
2	3.75 มม.	$\mu = \mu_0$	$43\epsilon_0$	$\begin{bmatrix} 8.5 & 8.5 & 0.0 \\ 8.5 & 8.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$
3	3.75 มม.	$\mu = \mu_0$	$43\epsilon_0$	$\begin{bmatrix} 12.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$

ผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างที 3 นี้ ได้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกแสดงการส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลาง และส่วนที่สองแสดงผลตอบสนองในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ของสนามสะท้อน มีดังนี้

รูปที่ 3.11 การส่งผ่านคลื่นระนาบตกกระทบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้น ที่แปรตามระยะทางแกน z และเวลา t กำหนดความยาวของอวกาศว่างในแต่ละด้านเท่ากับ 37.5 มิลลิเมตรและมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 100 อีลีเมนต์ ส่วนความยาวของแผ่นตัวกลางสามชั้นเท่ากับ 11.25 มิลลิเมตรและมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 30 อีลีเมนต์ ดังนั้นจะมีจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมด 230 อีลีเมนต์, จำนวนโนดทั้งหมด 461 โหนดและมีจำนวนความเข้มสนามไฟฟ้าไม่รู้ค่าแนวแกน x และ y รวมกันเท่ากับ 922 ค่า เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ตามที่กล่าวมานี้ จะทำให้ได้ค่า Δz เท่ากับ 1.875×10^{-4} เมตรและได้ค่า Δt เท่ากับ 3.125×10^{-13} วินาทีตามความสัมพันธ์ $\Delta z = 2c\Delta t$ จากรูปที่ 3.11 พบว่า คลื่นตกกระทบเดินทางในอวกาศว่างในทิศทาง $+z$ กระทบแผ่นตัวกลางที่เวลาประมาณ 3.75×10^{-10} วินาที (1200 วัฏจักร) ทำให้เกิดสนามของคลื่นสะท้อนที่แพร่กระจายไปในทิศทาง $-z$ และเกิดสนามของคลื่นส่งผ่านที่แพร่กระจายไปในทิศทาง $+z$ ซึ่งสนามทั้งสองนี้จะจางหายไป ณ ขอบเขตดูดกลืน สำหรับสนามที่เกิดขึ้นในแผ่นตัวกลางจะถูกลดทอนลงและมีการสะท้อนกลับไปมาจนไม่มีคลื่นเหลืออยู่ในบริเวณปัญหา

Electric field (V/m)

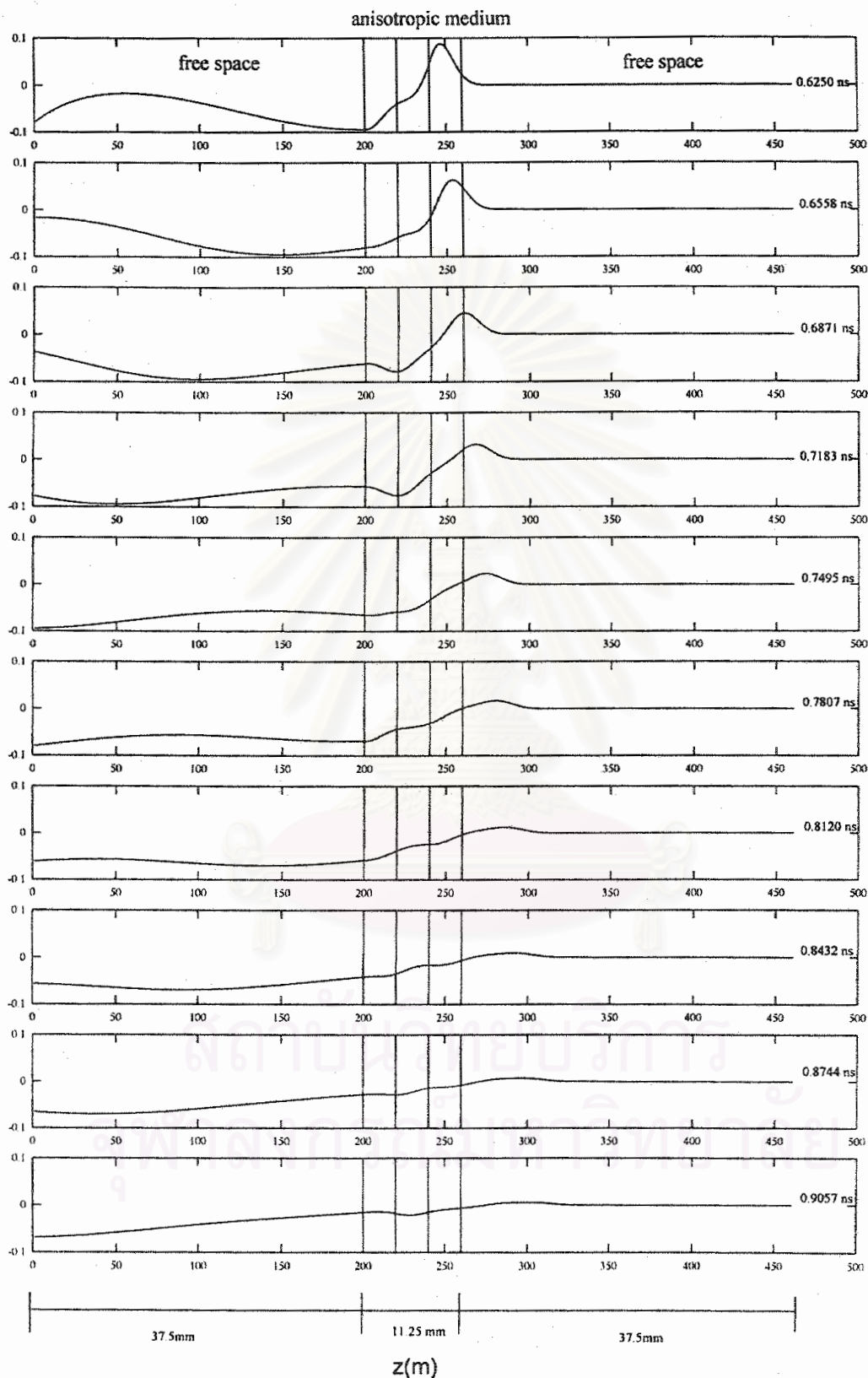
anisotropic medium



(ก) เวลาตั้งแต่ 0.3125×10^{-9} วินาที ถึง 0.593×10^{-9} วินาที

รูปที่ 3.11 การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้น
ที่แปรตามระยะทางและเวลา เมื่อคุณสมบัติของตัวกลางดังแสดงในตารางที่ 3.4

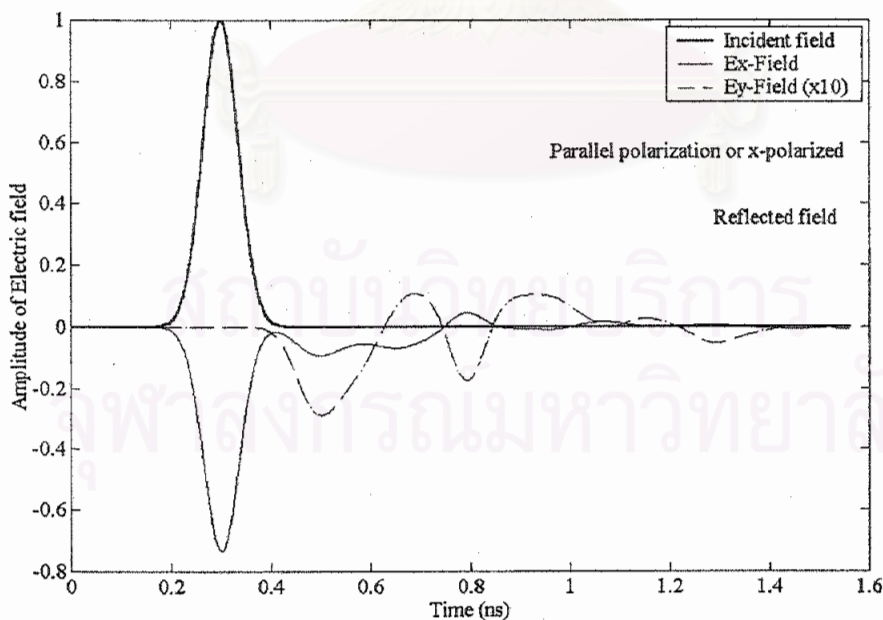
Electric field (V/m)



(ข) เวลาตั้งแต่ 0.624×10^{-9} วินาที ถึง 0.9×10^{-9} วินาที

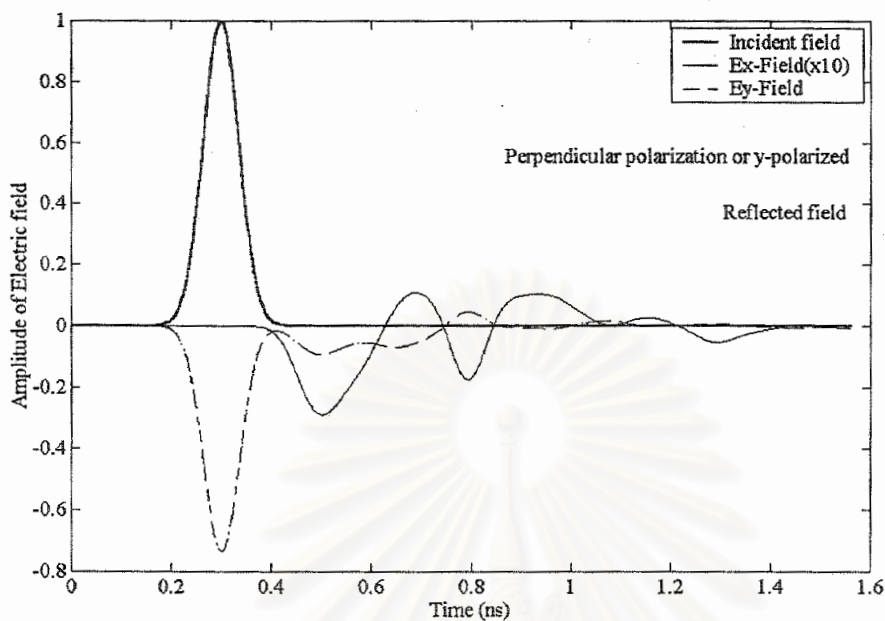
รูปที่ 3.11 (ต่อ) การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้น
ที่แปรตามระยะทางและเวลา เมื่อคุณสมบัติของตัวกลางดังแสดงในตารางที่ 3.4

รูปที่ 3.12 (ก) แสดงผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งก่อนแผ่นตัวกลางชั้นที่หนึ่ง เมื่อกำหนดให้ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบที่ป้อนให้กับแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกเป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์และมีโพลาไรเซชันขนานหรือการโพลาไรเซชันแนวแกน x ทำให้เกิดสนามสะท้อนในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ โดยมีช่วงเวลาการเกิดไม่ถึง 1 วินาที การเปลี่ยนแปลงของสนามสะท้อนที่เกิดขึ้นนี้ จะสังเกตได้ว่าขนาดของสนามสะท้อนแนวแกน x มีขนาดใหญ่กว่าสนามสะท้อนแนวแกน y (ขนาดที่แสดงคูณ 10) มาก เนื่องจากแผ่นตัวกลางชั้นที่หนึ่งมีค่าเทนเซอร์สภาพนำเท่ากับ 12 S/m เกิดในแนวแกน y เท่านั้น ทำให้สนามสะท้อนแนวแกน y มีค่าความสูญเสียมาก ถ้าเราสลับการวางแผ่นตัวกลางระหว่างตัวกลางชั้นที่หนึ่งและชั้นที่สาม จากนั้นกำหนดให้ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบมีโพลาไรเซชันตั้งฉากหรือการโพลาไรเซชันแนวแกน y ผลการคำนวณที่ได้แสดงในรูปที่ 3.12 (ข) พบว่าขนาดของสนามสะท้อนแนวแกน x และแนวแกน y มีค่าสลับกับค่าที่แสดงในรูปที่ 3.12 (ก) ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากแผ่นตัวกลางชั้นที่หนึ่งมีค่าเทนเซอร์สภาพนำเท่ากับ 12 S/m เกิดในแนวแกน x ทำให้สนามสะท้อนในแกนนี้จะมีค่าความสูญเสีย จากที่กล่าวมานี้ สรุปได้ว่าการสลับการวางแผ่นตัวกลางจะมีผลทำให้ค่าสนามสะท้อนที่คำนวณได้มีค่าต่างกัน



(ก) ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันขนาน

รูปที่ 3.12 ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้น

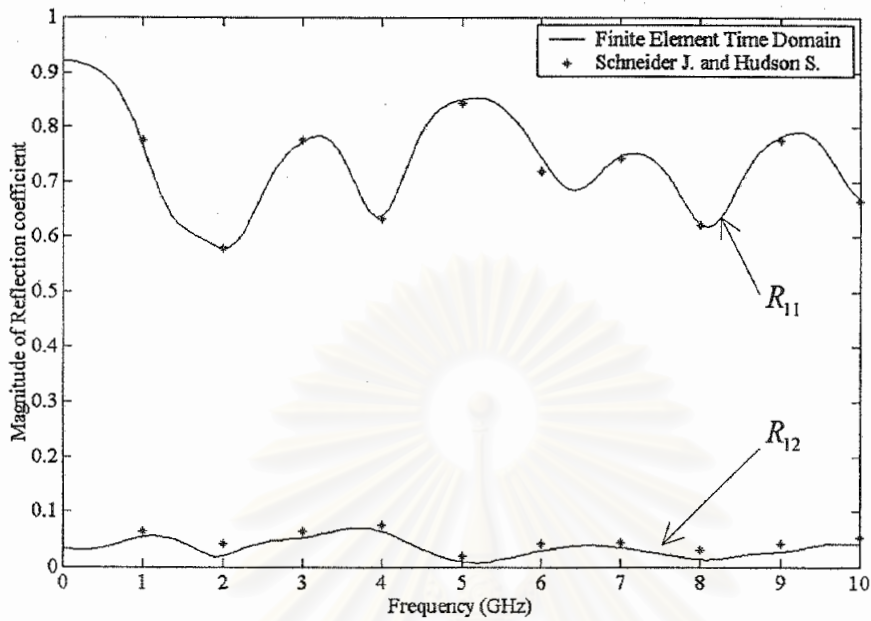


(ข) ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันตั้งฉาก

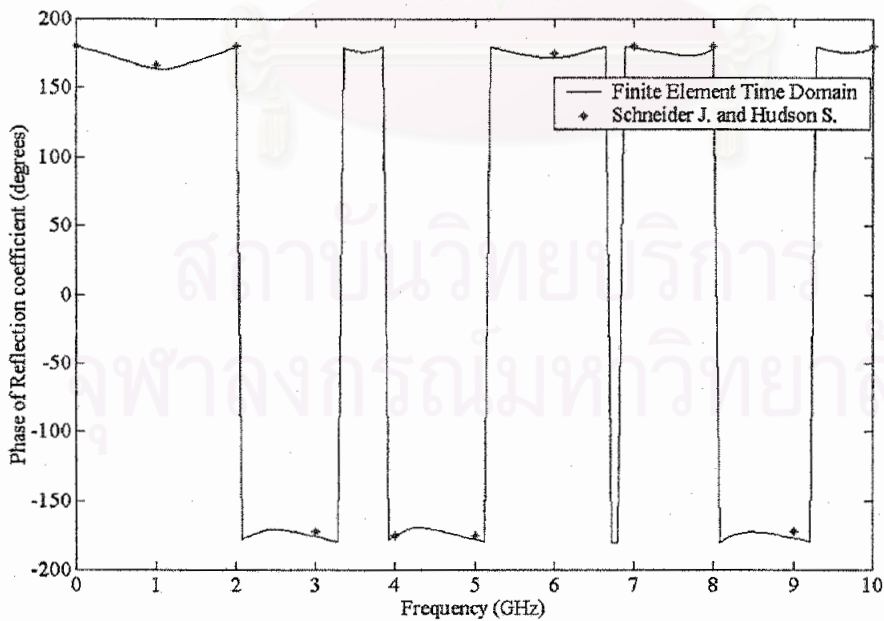
รูปที่ 3.12 (ต่อ) ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสามชั้น

รูปที่ 3.13 และรูปที่ 3.14 แสดงการเปรียบเทียบขนาดและเฟสของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} และ R_{12} ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาที่นำเสนอไว้กับวิธีผลต่างสลับเนื่องในโดเมนเวลาในงานวิจัยของ (Schneider and Hudson, 1993) เมื่อกำหนดให้ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบมีโพลาไรเซชันขนาน ผลการเปรียบเทียบพบว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาให้ผลการคำนวณที่สอดคล้องหรือใกล้เคียงกับงานวิจัย (Schneider and Hudson, 1993) นอกจากนี้ยังพบว่าขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} มีขนาดใหญ่กว่า R_{12} ที่ค่าความถี่ทุกค่า ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน y มีการลดทอน (เกิดจากค่าสภาพหน้า) ของขนาดมากกว่าความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

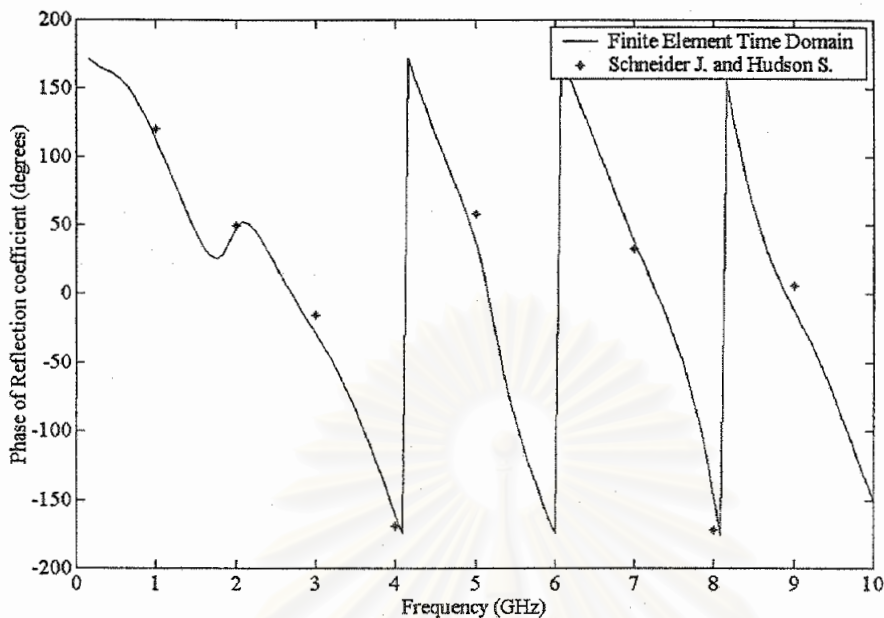


รูปที่ 3.13 การเปรียบเทียบขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} และ R_{12} ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมในโดเมนเวลาของ (Schneider and Hudson, 1993)



(ก) เฟส R_{11}

รูปที่ 3.14 การเปรียบเทียบเฟสของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} และ R_{12} ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมในโดเมนเวลาของ (Schneider and Hudson, 1993)

(ข) เฟส R_{12}

รูปที่ 3.14 (ต่อ) การเปรียบเทียบเฟสของสัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{11} และ R_{12} ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลากับวิธีผลต่างสปีนนิ่งในโดเมนเวลาของ (Schneider and Hudson, 1993)

3.3 สรุป

ผลการคำนวณหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาจากบทที่ 2 ทำให้ทราบว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาจะให้ผลการคำนวณที่มีความสอดคล้องหรือใกล้เคียงกับงานวิจัย (Titchener and Willis, 1991) และงานวิจัย (Schneider and Hudson, 1993) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตัวอย่างที่ 1 ถึงตัวอย่างที่ 3 โดยมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดไม่เกิน 3.5 เปอร์เซ็นต์ ดังแสดงในตารางที่ 3.2 และ 3.3 แต่อย่างไรก็ตามผลการคำนวณจะมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเพิ่มมากขึ้น ในกรณีหาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน เมื่อกำหนดให้ความเข้มสนามไฟฟ้าตกกระทบมีมุมตกกระทบมากกว่า 60 องศาและมีตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ $z \geq L$ ซึ่งการลดความผิดพลาดในการคำนวณสามารถกระทำได้ โดยการแบ่งจำนวนอีลีเมนต์ให้มีจำนวนมากขึ้นหรือการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสูง

การวิเคราะห์การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก ผลที่ได้จะมีสนามของคลื่นสะท้อนและสนามของคลื่นส่งผ่านเกิดขึ้นตามแนวแกน x และแนวแกน y โดยสิ่งสำคัญที่เกิดขึ้นจะพบว่า ถ้าคลื่นที่แพร่กระจายจากตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์มากไปสู่ตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ที่ต่ำกว่า จะมีผลทำให้ขนาดของสนามมีค่าเป็นลบดังแสดงในรูปที่ 3.2 (ก) ณ เวลา 0.5×10^{-9} วินาที ถึง 0.6×10^{-9} วินาที และถ้าคลื่นที่แพร่กระจายจากตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ต่ำไปสู่ตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ที่สูงกว่า จะมีผลทำให้ขนาดของสนามมีค่าขนาดใหญ่ขึ้น ณ ตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์สูง จากที่กล่าวมานี้จะลักษณะการเกิดที่เหมือนกับกรณีการส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริกในบทที่ 2

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 บทนำ

บทนี้กล่าวถึงสรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาในการวิเคราะห์ปัญหาตัวกลางแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นมีโดเมนอวกาศหนึ่งมิติ

4.2 สรุปผลการวิจัย

บทที่ 2 ได้เสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาเพื่อวิเคราะห์ปัญหาตัวกลางแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นที่ประกอบด้วยเทนเซอร์สภาพยอม เทนเซอร์ความขบขี้มได้และเทนเซอร์สภาพนำในแนวตามขวาง โดยสมการที่สอดคล้องกับปัญหาที่วิเคราะห์จะมีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองมีตัวไม่รู้ค่า คือ ความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x และแนวแกน y วางอยู่บนระนาบที่ตั้งฉากกับทิศทางเคลื่อนที่ของคลื่นดังแสดงในสมการ (2.26a) และสมการ (2.26b) เงื่อนไขขอบเขตในสมการดังกล่าวนี้ เป็นแบบดุดกลืนดังสมการ (2.33), (2.36) ถึง (2.38) มีลักษณะที่สำคัญคือ จะไม่มีสนามสะท้อนกลับในตำแหน่งขอบเขตหรือพลังงานของความเข้มสนามไฟฟ้าจะถูกดุดกลืนไป การหาผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x และแนวแกน y ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาจะประกอบด้วยองค์ประกอบสองส่วน คือ โดเมนเชิงอวกาศและโดเมนเวลา ผลสุดท้ายจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสมการ $[A][X]=[B]$ เมื่อ X แทนความเข้มสนามไฟฟ้าแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ ผลการคำนวณที่แสดงประกอบด้วย

- การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นไดอิเล็กทริก ที่มีคลื่นระนาบในรูปของความเข้มสนามไฟฟ้าและเป็นฟังก์ชันแกาส์เซียนพัลส์ พบว่าเมื่อคลื่นระนาบหนึ่งลูกคลื่นมากระทบแผ่นตัวกลาง จะเกิดสนามที่สะท้อนกลับไปมาหรือการสะท้อนหลายครั้งภายในตัวกลาง โดยขนาดจะค่อย ๆ ลดลงไปเรื่อย ๆ ตามเวลาที่เพิ่มขึ้น นอกจากนี้ ถ้าคลื่นที่แพร่กระจายจากตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์มากไปสู่ตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ที่ต่ำกว่า มีผลทำให้ขนาดของสนามมีค่าเป็นลบดังแสดงในรูปที่ 2.9 (ก) ณ เวลา 1.25×10^{-9} วินาที ถึง 1.375×10^{-9} วินาที และถ้าคลื่นที่แพร่กระจายจากตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ต่ำไปสู่ตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ที่สูงกว่า มีผลทำให้ขนาดของสนามมีขนาดใหญ่ขึ้น ณ ตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์สูง

- ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนและสนามส่งผ่านในรูปของความเข้มสนามไฟฟ้า มีช่วงเวลาการเกิดที่สั้นไม่ถึง 1 วินาทีและขนาดมีค่าสูง การวิเคราะห์ผลตอบสนองในโดเมนความถี่จะแสดงในรูปการหาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน

- การทดสอบหาค่า β ในวิธีนิวมาร์ก-บีตา เพื่อให้ผลการคำนวณมีค่าความผิดพลาดต่ำ จากการทดสอบพบว่าค่า β เท่ากับ 0.25 ทำให้ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดต่ำประมาณ 3 เปอร์เซ็นต์

• กำหนดความสัมพันธ์ของขนาดขั้นระยะทางและขั้นเวลา ได้ใช้ความสัมพันธ์ตามเงื่อนไข Courant คือ $c \cdot \Delta t \leq \Delta z$ ซึ่งผลการวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน ที่กำหนดค่าขั้นระยะทาง Δz และขั้นเวลา Δt สอดคล้องตามเงื่อนไข Courant พบว่าความสัมพันธ์ที่เหมาะสมในการกำหนด คือ $c \cdot \Delta t = 0.5\Delta z$

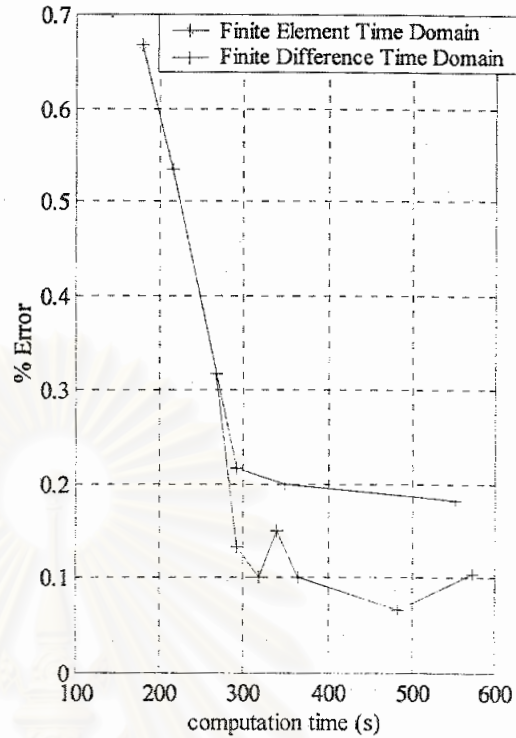
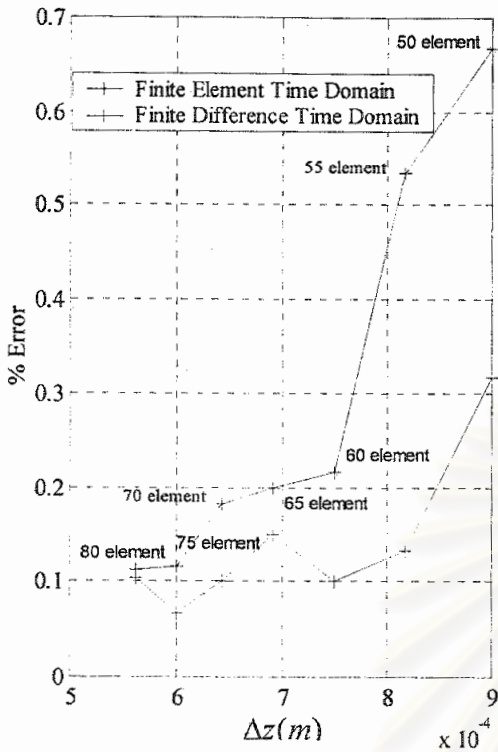
• การเปรียบเทียบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาและวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ก) ในการวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนของแผ่นไดอิเล็กทริก ที่มีค่าสภาพยอมสัมพันธ์เท่ากับ 4.0 และกำหนดความถี่ที่ทดสอบ $f = 0.4$ GHz โดยผลการคำนวณจากทั้งสองวิธีนี้ เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) ที่มีผลเฉลยเท่ากับ 0.5992

ตารางที่ 4.1 การกำหนดพารามิเตอร์ในการคำนวณและผลการคำนวณ

จำนวนอีลีเมนต์	ขั้นระยะทาง (เมตร)	ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน		%Error		เวลาในการคำนวณ (s)	
		FETD	FDTD	FETD	FDTD	FETD	FDTD
50	9.0×10^{-4}	0.6032	0.6011	0.667	0.317	179	267
55	8.18×10^{-4}	0.6024	0.5984	0.534	0.133	215	291
60	7.50×10^{-4}	0.5979	0.5998	0.216	0.100	291	318
65	6.92×10^{-4}	0.5980	0.6001	0.200	0.150	349	339
70	6.42×10^{-4}	0.5981	0.5998	0.183	0.100	552	365
75	6.0×10^{-4}	0.5985	0.5996	0.116	0.066	675	484
80	5.62×10^{-4}	0.59988	0.59982	0.113	0.104	895	573

ผลการเปรียบเทียบได้แสดง เปอร์เซนต์ความผิดพลาดและเวลาในการคำนวณ ดังแสดงในตารางที่ 4.1 และแสดงเป็นกราฟดังในรูปที่ 4.1 โดยในรูปที่ 4.1 (ก) พบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาให้ผลเฉลยที่มีเปอร์เซนต์ความผิดพลาดสูงกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเราพิจารณาค่าเปอร์เซนต์ความผิดพลาดของการคำนวณ พบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาให้ค่าเปอร์เซนต์ความผิดพลาดต่ำกว่า 1 เปอร์เซนต์ ซึ่งถือได้ว่าเป็นวิธีการที่มีความแม่นยำในการคำนวณในระดับที่ยอมรับได้ นอกจากนี้การเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้มีจำนวนมากขึ้น จะทำให้ค่าเปอร์เซนต์ความผิดพลาดมีแนวโน้มลดต่ำลง

รูปที่ 4.1 (ข) แสดงเปอร์เซนต์ความผิดพลาดที่แปรตามเวลาในการคำนวณ เมื่อกำหนดคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ เพนเทียม 166 MHz และมีหน่วยความจำ 32 Mbyte จากรูป วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาจะมีเวลาในการคำนวณที่ต่ำกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา เมื่อมีจำนวนอีลีเมนต์ไม่มากนักประมาณ 55 อีลีเมนต์ แต่ถ้ามีจำนวนอีลีเมนต์เพิ่มมากกว่านี้ จะทำให้เวลาในการคำนวณสูงกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา เนื่องจากขนาดของเมทริกซ์มีขนาดที่ใหญ่ขึ้น



(ก) แปรตามขนาดขั้นระยะทาง

(ข) แปรตามเวลาในการคำนวณ

รูปที่ 4.1 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดระหว่างวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ในโดเมนเวลา กับวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาในการวิเคราะห์แผ่นไดอิเล็กทริก 1 ชั้น

บทสุดท้ายแสดงผลการคำนวณค่าความเข้มสนามไฟฟ้าในตัวกลางแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นโดยใช้วิธีการคำนวณที่นำเสนอในบทที่ 2 มีตัวอย่างการวิเคราะห์ประกอบด้วย

- แผ่นตัวกลางแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของตัวกลางดังตารางที่ 3.1 เมื่อกำหนดให้คลื่นระนาบตกกระทบมีมุมตกกระทบเป็นมุมใด ๆ โดยในที่นี้ ได้เลือกทดสอบมุมตกกระทบเท่ากับ 30 องศา, 45 องศาและ 60 องศา โดยได้เปรียบเทียบผลการคำนวณกับงานวิจัย (Titchener and Willis, 1991) พบว่าค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ในโดเมนเวลามีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดไม่เกิน 2 เปอร์เซ็นต์

- แผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นที่มีคุณสมบัติของตัวกลางดังตารางที่ 3.1 และมีแผ่นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางอยู่ที่ตำแหน่ง $z \geq L$ ผลการคำนวณในกรณีนี้จะมีความผิดพลาดสูง เมื่อมีมุมการตกกระทบที่สูงกว่า ประมาณ 60 องศา

- แผ่นตัวกลางแอนไอโซทรอปิกสามชั้นที่มีคุณสมบัติของตัวกลางดังตารางที่ 3.4 ซึ่งเป็นตัวกลางที่มีคุณสมบัติของคาร์บอนไฟเบอร์ (carbon fiber) ผลตอบสนองในโดเมนเวลาของสนามสะท้อนที่คำนวณได้เมื่อความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบมีโพลาไรเซชันขนานและตั้งฉาก จะพบว่าขนาดของสนามไฟฟ้ามีการลดทอนตามค่าสภาพนำที่เกิดขึ้นในแนวแกนนั้นๆ และการสลับตำแหน่งการวางของตัวกลางจะมีผลทำให้

ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้มีค่าที่ต่างกัน นอกจากนี้ผลการวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่ได้มีความสอดคล้องกับงานวิจัยของ (Schneider and Hudson, 1993)

ดังนั้นผลการวิจัยสรุปได้ว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ กล่าวได้ว่าสามารถวิเคราะห์การส่งผ่านคลื่นระนาบในแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น ในโดเมนหนึ่งมิติได้และวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและสัมประสิทธิ์การส่งผ่านที่สัมพันธ์กับโพลาริเซชัน ซึ่งผลการคำนวณด้วยวิธีนี้มีความสอดคล้องกับผลการคำนวณด้วยวิธีอื่น จึงเป็นวิธีการหนึ่งที่มีความสนใจในการแก้ปัญหาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าต่อไปในอนาคต

4.3 ข้อเสนอแนะ

การปรับปรุงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาให้มีประสิทธิภาพการคำนวณที่สูงขึ้น หรือการขยายผลการวิเคราะห์สนามในตัวกลางชนิดอื่น ๆ ยังคงมีความสำคัญ ซึ่งผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้แสดงไว้ดังนี้

1. การศึกษาหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเทียบเวลาด้วยวิธีการอื่น
2. การขยายการวิเคราะห์การสะท้อนและการส่งผ่านของสนามในปัญหาสามมิติ (three dimension)

รายการอ้างอิง

- Ali, H.O., and Costache, G., Finite-Element Time-Domain Analysis of Axisymmetrical Radiators. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 42 (February 1994): 272-275.
- Balanis, C.A., *Advanced engineering electromagnetics*. United States of America: John Wiley & Sons, 1989.
- Barkovskii, L.M., and Borzdov, G.N., Reflection of Electromagnetic waves from layered continuously inhomogeneous anisotropic media: Multiple reflection method. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 45 (October 1978): 701-705.
- Cangellaris, A.C., Mei, K.K., and Lin, C.C., Point-Matched Time Domain Finite Element Methods for Electromagnetic Radiation and scattering. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 35 (October 1987): 1160-1173.
- Celozzi, S., and Sparvoli G., FE-TD Analysis of Multiple Nonlinear Electromagnetic Shields. *IEEE Trans. Magnetics* 32 (May 1996): 1485-1488.
- Chui, C.-N., and Chen, C.H., Plane-Wave Shielding Properties of Anisotropic Laminated Composite Cylindrical Shells. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility* 37 (February 1995): 109-113.
- Chu, H.K., and Lin, M.S., Near field Shielding and reflection characteristics of anisotropic laminated planar composites. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility* 39 (November 1997): 332-339.
- Gedney, S.D., An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 44 (December 1996): 1630-1639.
- Gedney, S.D., and Navsariwala U., An Unconditionally Stable Finite Element Time-Domain Solution of the Vector Wave Equation. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 5 (October 1995): 332-334.
- Han, F., and Zhang, L., Degeneration of Shielding Effectiveness of Planar Shields Due to Incident Plane Waves. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility* 23 (November 1981): 82-86.
- Hughes, Thomas J.R., *The Finite Element Method*. United States of America: Prentice Hall, 1987.

- Jin, J.M., The Finite Element Method in Electromagnetics. United States of America: John Wiley & Sons, 1993.
- Kellali, S., Jecko B., and Reineix A., Implementation of a Surface Impedance Formalism at Oblique Incidence in FDTD Method. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility 35 (August 1993): 347-356.
- Kong, J.A., Electromagnetic Wave Theory. United States of America: John Wiley & Sons, 1990.
- Kraus, J.D., and Fleisch D.A., Electromagnetics with applications. Singapore: McGraw-Hill, 1999.
- Lee, J.F., WETD-A Finite Element Time-Domain Approach for Solving Maxwell's Equations. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 4 (January 1994): 11-13.
- Lee, J.F., and Sacks, Z.S., Whitney Element Time Domain (WETD) Methods. IEEE Trans. Magnetics 31 (May 1995): 1325-1329.
- Lee, J.F., Lee, R., and Cangellaris, A.C., Time-Domain Finite-Element Methods. IEEE Trans. Antennas and Propagation 45 (March 1997): 430-442.
- Lin, M.S., and Chen, C.H., Plane-Wave Shielding Characteristics of Anisotropic Laminated Composites. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility 35 (February 1993): 21-27.
- Lin, M.S., Chen, C.H., and Wu, R.B., Transient Propagation in Anisotropic Laminated Composites. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility 35 (August 1993): 357-365.
- Lin, M.S., Wu, R.B., and Chen, C.H., Time-Domain Analysis of Propagation in Inhomogeneous Anisotropic Lossy Slabs. IEEE Trans. Antennas and Propagation 41 (October 1993): 1456-1459.
- Luebbers, R.J., Kunz, K.S., and Chamberlin K.A., An Interactive Demonstration of Electromagnetic Wave Propagation Using Time-Domain Finite Differences. IEEE Trans. Educations 33 (February 1990): 60-68.
- Luebbers, R.J., Kumagai, K., Adachi, S., and Uno, T., FDTD Calculation of Transient Pulse Propagation Through a Nonlinear Magnetics Sheet. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility 35 (February 1993): 90-94.
- Lynch, D.R., and Paulsen, K.D., Time-Domain Integration of the Maxwell's Equations on Finite Elements. IEEE Trans. Antennas and Propagation 38 (December 1990): 1933-1942.

- Monorchio, A., and Mittra R., A Hybrid Finite-Element Finite-Difference Time-Domain (FE/FDTD) Technique for Solving Complex Electromagnetic Problems. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 8 (February 1998): 93-95.
- Mur, G., Absorbing Boundary Condition for Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility 23 (November 1981): 381-385.
- Navsariwala U., and Gedney, S.D., An Unconditionally Stable Parallel Finite Element Time Domain Algorithm. IEEE Trans. Antennas and Propagation 46 (July 1996): 332-334.
- Roden, J.A, and Gedney, S.D., Time-Domain Analysis of Periodic Structures at oblique Incidence: Orthogonal and Nonorthogonal FDTD Implementations. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 46 (April 1998): 420-426.
- Roy, T., Sarkar, T.K., Djordjevic, A.R., and Salazar, M., Time-Domain Analysis of TM Scattering from Conducting Cylinders Using a Hybrid Method. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 46 (October 1998): 1471-1477.
- Rubio, A., Monorchio A., Hybrid technique combining finite element, finite difference and integral equation methods in time domain. Electronics Letters 16 (March 2000): 506-508.
- Sacks, Z.S., Kingsland, D.M., Lee, R., and Lee, J.F., A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use As an Absorbing Boundary Condition. IEEE Trans. Antennas and Propagation 43 (December 1995): 1460-1463.
- Sarto, M.S., and Holloway, C.L., Effective boundary conditions for the time-domain analysis of the EMC performances of fiber composites. IEEE International Symposium on Published 1 (1990):462-467.
- Schneider, J., and Hudson S., The Finite-Difference Time-Domain Method Applied to Anisotropic Material. IEEE Trans. Antennas and Propagation 41 (July 1993): 994-999.
- Taflove, A., Computational Electrodynamics. United States of America: Prentice Hall, 1995.
- Taflove, A., and Brodwin, M.E., Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equation. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 23 (August 1975): 623-630.
- Teitler, S., and Henvis B.W., Refraction in Stratified, anisotropic media. Journal of Optmization 60 (June 1970): 830-834.
- Titchener, J.B., and Willis, J.R., The Reflection of electromagnetic waves from stratified anisotropic media. IEEE Trans. Antennas and Propagation 39 (Jan 1991): 35-39.

- Trenkler, Y., and McBride L.E., Shielding improvement by multi-layer design. IEEE International Symposium on Published (1990):1-4.
- Yang, R., and Mittra, R., Coupling between two arbitrary oriented dipoles through multilayered shields. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility 27 (August 1985): 131-136.
- Yee, K.S., Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equation in Isotropic Media. IEEE Trans. Antennas and Propagation 14 (May 1966): 302-307.



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก
วิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา

ภาคผนวกนี้กล่าวถึงวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา ในการวิเคราะห์ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงหนึ่งมิติในตัวกลางแบบไอโซทรอปิกหลายชั้น เมื่อมีการตกกระทบของคลื่นระนาบตั้งฉากกับตัวกลาง โดยตัวกลางไม่พิจารณาค่าความสูญเสียของตัวกลาง กำหนดค่าสภาพยอมและความซาบซึมได้ในรูปของสเกลาร์มีค่าเปลี่ยนแปลงในแต่ละชั้นตัวกลางหรือตัวกลางไม่เอกพันธ์ ความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในตัวกลางมีการเปลี่ยนแปลงเทียบกับระยะทางแกน z หรือเปลี่ยนแปลงหนึ่งมิติ เมื่อแทนความสัมพันธ์เหล่านี้ลงในสมการของแมกซ์เวลล์ จะได้ดังนี้

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} \quad (ก.1a)$$

$$\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \quad (ก.1b)$$

$$\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x(z,t)}{\partial t} \quad (ก.2a)$$

$$\frac{\partial H_x(z,t)}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \quad (ก.2b)$$

จากสมการ (ก.1) และ (ก.2) ประกอบด้วยสนามจำนวน 4 ส่วนประกอบคือ $E_x(z,t)$, $E_y(z,t)$, $H_x(z,t)$ และ $H_y(z,t)$ ผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x(z,t)$ และความเข้มสนามไฟฟ้า $E_y(z,t)$ จะเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นในที่นี้จะพิจารณาหาผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x(z,t)$ เท่านั้น ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาและวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา โดยใช้สมการคลื่นแบบสเกลาร์ที่มาจากการจัดรูปสมการ (ก.1) คือ

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (ก.3)$$

วิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลา

การหาผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x(z,t)$ ที่เกิดขึ้นของแต่ละชั้นในตัวกลางแบบไอโซทรอปิก ดังสมการ (ก.3) เริ่มจากการแทน $E_x(z,t)$ เท่ากับผลรวมของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบและความเข้มสนามไฟฟ้าการกระจัดกระจาย ดังนี้

$$E_x(z,t) = E_x^{inc}(z,t) + E_x^{scat}(z,t) \quad (ก.4)$$

เมื่อ $E_x^{inc}(z, t)$ แทน ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในแนวแกน x
 $E_x^{scat}(z, t)$ แทน ความเข้มสนามไฟฟ้าการกระจัดกระจายในแนวแกน x
 ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในแนวแกน x ดังสมการ (ก.4) เดินทางในอวกาศว่างจะ
 สอดคล้องกับสมการคลื่นในโดเมนเวลาสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E_x^{inc}(z, t)}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x^{inc}(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{ก.5})$$

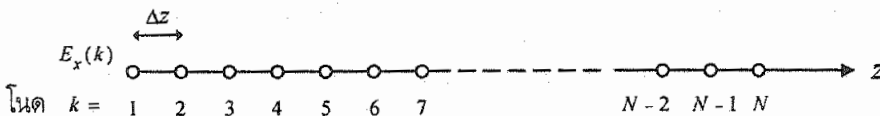
เมื่อนำสมการ (ก.4) แทนลงในสมการ (ก.3) จะได้พจน์ที่ประกอบด้วยความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่น
 ตกกระทบและความเข้มสนามไฟฟ้าการกระจัดกระจายที่เปลี่ยนแปลงตามระยะทางและเวลา ในพจน์ที่
 ประกอบด้วยความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบเปลี่ยนแปลงตามระยะทางให้แทนด้วยสมการคลื่นในโด-
 เมนเวลา (ก.5) ผลที่ได้คือ

$$\frac{\partial^2 E_x^{scat}(z, t)}{\partial t^2} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 E_x^{scat}(z, t)}{\partial z^2} + (\alpha \mu_0 \epsilon_0 - 1) \cdot \frac{\partial^2 E_x^{inc}(z, t)}{\partial t^2}, \quad \text{เมื่อ } \alpha = \frac{1}{\mu \epsilon} \quad (\text{ก.6})$$

จากสมการ (ก.6) กล่าวได้ว่าพจน์ด้านซ้ายมือจะมีเพียงความเข้มสนามไฟฟ้าการกระจัดกระจายที่เปลี่ยนแปลง
 ตามเวลา t และพจน์ด้านขวามือจะมีความเข้มสนามไฟฟ้าการกระจัดกระจายที่เปลี่ยนแปลงตามแกน z
 รวมกับความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ $E_x^{inc}(z, t)$ ส่วนความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x^{scat}(z, t)$ คือความ
 เข้มสนามไฟฟ้าที่ทราบค่าจากการคำนวณหรือเป็นผลเฉลยของสมการนี้ ส่วนต่อไปของวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมใน
 โดเมนเวลา คือ การประมาณพจน์อนุพันธ์ย่อยของความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x^{scat}(z, t)$ จากสมการ (ก.6) ด้วยวิธี
 ผลต่างสี่เหลี่ยมแบบผลต่างตรงกลาง (central difference) มีสมการดังนี้ (Taflove, 1995)

$$\frac{d^2 E}{dz^2} \approx \frac{E^n(k+1) - 2E^n(k) + E^n(k-1)}{(\Delta z)^2} \quad (\text{ก.7a})$$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} \approx \frac{E^{n+1}(k) - 2E^n(k) + E^{n-1}(k)}{(\Delta t)^2} \quad (\text{ก.7b})$$



รูปที่ ก.1 ความเข้มสนามไฟฟ้าแต่ละโนดในตัวกลาง

จากสมการ (ก.7) ความเข้มสนามไฟฟ้า $E^n(k)$ หมายถึง ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $k\Delta z$ และมีเวลา $n\Delta t$,
 ขนาดขั้นระยะทาง Δz หมายถึง ขนาดความยาวของโนดที่ $k+1$ กับโนดที่ k ดังรูปที่ ก.1 และขั้นเวลา

Δt หมายถึง ผลต่างของเวลาที่ $n+1$ กับ n จากนั้นแทนการประมาณพจน์อนุพันธ์ย่อยของความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x^{scat}(z,t)$ จากสมการ (ก.6) ด้วยสมการ (ก.7) และจัดรูปแบบสมการ ผลสุดท้ายจะได้ดังนี้

$$E_x^{n+1}(k) = \left\{ \alpha \left[\frac{E_x^n(k+1) - 2E_x^n(k) + E_x^n(k-1)}{\Delta z^2} \right] + \left(\alpha \mu_0 \epsilon_0 - 1 \right) \frac{\partial^2 E_x^{inc}(z,t)}{\partial t^2} \right\} \cdot \Delta t^2 + 2E_x^n(k) - E_x^{n-1}(k) \quad (\text{ก.8})$$

ความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x^{n+1}(k)$ จะเกิดขึ้นที่โนดแต่ละโนดของตัวกลางและเปลี่ยนแปลงตามค่า n ดังรูปที่ ก.1 ซึ่งการหาผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้าจากสมการ (ก.8) อาศัยการคำนวณที่เรียกว่าการวนซ้ำมีลักษณะ คือ เทอมด้านซ้ายมือของสมการ (ก.8) ความเข้มสนามไฟฟ้าที่ขั้นเวลา $n+1$ หรือขั้นเวลาใหม่ (new time step) ที่ตำแหน่ง k เมื่อเพิ่มจำนวนขั้นเวลา การคำนวณจะต้องนำค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าที่ขั้นเวลา $n-1$ หรือขั้นเวลาก่อน (previous time step) ที่ตำแหน่ง k รวมกับค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าที่ขั้นเวลา n ที่ตำแหน่ง $k-1$, k และ $k+1$ รวมกับเทอมอนุพันธ์ย่อยเทียบเวลาของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ $\partial^2 E_x^{inc}(z,t)/\partial t^2$ ซึ่งจะทราบค่า ณ เวลาใด ๆ การคำนวณวนซ้ำจะสิ้นสุดเมื่อการเพิ่มขึ้นของขั้นเวลาถึงจำนวนขั้นเวลาที่ต้องการและความเข้มสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จะอยู่ในโดเมนเวลา

เสถียรภาพในการคำนวณ

ส่วนต่อไปพิจารณาความแม่นยำ (accuracy) และเสถียรภาพ (stability) ในการกำหนดขนาดขั้นระยะทาง Δz และขั้นเวลา Δt เนื่องจากการกำหนดค่าทั้งสองนี้ที่เหมาะสมมีผลทำให้การคำนวณมีค่าผิดพลาดต่ำ ความแม่นยำของวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาจะกำหนดให้ค่า Δz มีขนาดน้อยกว่าความยาวคลื่นที่เราสนใจมาก ๆ และต้องมีขนาดน้อยกว่าขนาดของตัวกลางที่วิเคราะห์ด้วย (ประมาณสิบเท่า) สำหรับเสถียรภาพจะเกิดขึ้นได้โดยใช้เงื่อนไข Courant จาก (Luebbers et al, 1990) และ (Taflove, 1995) เพราะเงื่อนไขนี้ทำให้แน่ใจได้ว่าการคำนวณวนซ้ำจะมีการลู่เข้า (convergence) และมีเสถียรภาพ ซึ่งปัญหาหนึ่งมิติมีเสถียรภาพได้ก็ต่อเมื่อ $c \cdot \Delta t \leq \Delta z$ เมื่อ c คือ ความเร็วของคลื่นที่เดินทางในตัวกลาง

เงื่อนไขขอบเขตแบบดูดกลืน

การหาผลเฉลยของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในปัญหาการกระจายตัวระยะยาวด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะพบอุปสรรคที่สำคัญ คือ โดเมนของปัญหามีลักษณะเป็น ปัญหาเปิด (open problem) ทำให้การหาผลเฉลยของสนามที่เกิดขึ้นในโดเมนไม่มีขอบเขต (boundary) ที่จำกัดหรือมีขอบเขตเป็นอนันต์ จำนวนข้อมูลที่คำนวณมีขนาดใหญ่ ส่งผลให้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ไม่สามารถเก็บข้อมูลได้ ดังนั้นการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นเราจึงต้องมีการจำกัดขอบเขตของโดเมนเพื่อให้สามารถหาผลเฉลยของความเข้มสนามได้ แต่ขอบเขตที่กำหนด

ซึ่งจะต้องมีขนาดที่ใหญ่พอที่จะครอบคลุมตัวกลางที่เคลื่อนที่ตกกระทบและจุดที่ต้องการทราบค่าสนามมีลักษณะที่สำคัญ คือการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่พื้นผิวภายนอกให้สอดคล้องตามธรรมชาติของสนาม

สมการ (ก.8) แสดงการหาผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้า $E_x^{n+1}(k)$ ที่เกิดขึ้นในตัวกลางแบบไอโซทรอปิก โดยอาศัยการคำนวณซ้ำของความเข้มสนามไฟฟ้าจนถึงจำนวนขั้นเวลาที่สนใจ การคำนวณซ้ำจะต้องทราบความเข้มสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $k=1$ และ $k=N$ เมื่อ $k=1$ คือตำแหน่งโนดที่ 1 และ $k=N$ คือตำแหน่งโนดสุดท้ายหรือที่ N ซึ่งการหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งทั้งสองนี้ทราบมาจากเงื่อนไขขอบเขตมีสมการดังนี้ (Mur, 1981)

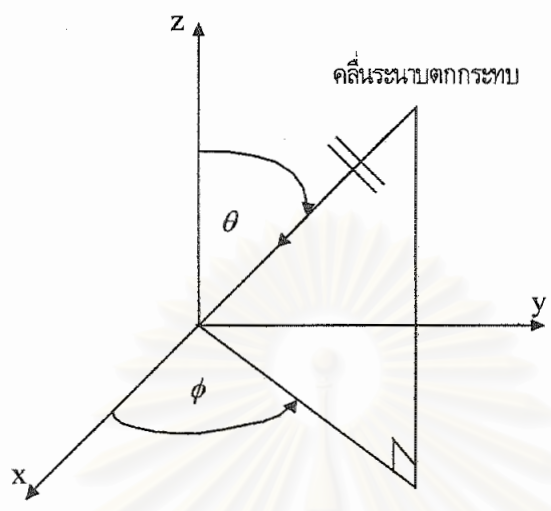
$$E_x^{n+1}(1) = E_x^n(2) + \frac{c\Delta t - \Delta z}{\Delta t + \Delta z} (E_x^{n+1}(2) - E_x^n(1)), \quad \text{ที่ตำแหน่ง } k=1 \quad (\text{ก.9a})$$

$$E_x^{n+1}(N) = E_x^n(N-1) + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (E_x^{n+1}(N-1) - E_x^n(N)), \quad \text{ที่ตำแหน่ง } k=N \quad (\text{ก.9b})$$

สมการ (ก.9) แสดงเงื่อนไขขอบเขตแบบดุดกลืนที่ตำแหน่ง $k=1$ หรือ $z=0$ และ $k=N$ หรือ $z=L$ ตามลำดับ โดยวงเล็บหนึ่ง (1) หมายถึงที่ตำแหน่ง $z=0$ หรือที่ $k=1$ และวงเล็บสอง (2) หมายถึงตำแหน่งที่ต่อจาก $z=0$ หนึ่งขั้นระยะทางหรือที่ $k=2$ การคำนวณซ้ำของสมการ (ก.9a) มีลักษณะคือความเข้มสนามไฟฟ้าที่ขั้นเวลา $n+1$ ที่ตำแหน่ง $k=1$ ด้านซ้ายมือของสมการ เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของขั้นเวลาการคำนวณจะต้องนำค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าที่ขั้นเวลา n ที่ตำแหน่ง $k=1$ และที่ตำแหน่ง $k=2$ รวมกับค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าที่ขั้นเวลา $n+1$ ที่ตำแหน่ง $k=2$ ส่วนสมการ (ก.9b) มีการคำนวณซ้ำเช่นเดียว

สรุปการหาผลเฉลยของความเข้มสนามไฟฟ้าในแนวแกน x บนโนดแต่ละโนดของตัวกลางด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องในโดเมนเวลาจะนำสมการ (ก.8) และ (ก.9) มาคำนวณซ้ำ โดยสมการ (ก.8) แสดงความเข้มสนามไฟฟ้าที่มีโนดอยู่ระหว่าง $k=2$ ถึง $k=N-1$ ส่วนสมการ (ก.9) แสดงความเข้มสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งขอบของปัญหาคือ โนดที่ $k=1$ และโนด $k=N$

สนามตกกระทบ



รูปที่ ก.2 ระบบพิกัดทรงกลมในการกำหนดสนามตกกระทบ

คลื่นระนาบตกกระทบในโดเมนเวลาที่กำหนดในที่นี้เป็นคลื่นระนาบเกาส์เซียนพัลส์ โดยประกอบด้วยความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบและความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบ ส่วนความเข้มสนามตกกระทบหมายถึงความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ E^{inc} หรือความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบ H^{inc} การตกกระทบของความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบไปยังตัวกลางที่วิเคราะห์พิจารณาบนระบบพิกัดทรงกลม ดังรูปที่ ก.2 โดยมีจุดกำเนิดเดียวกับระบบพิกัดฉาก (cartesian coordinate system) ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลา

จากรูปที่ ก.2 คลื่นระนาบตกกระทบมีมุม θ วัดจากแกน z และมุม ϕ วัดจากแกน x ดังนั้นทิศการตกกระทบของคลื่นระนาบตกกระทบจะมาจากมุม θ และมุม ϕ ถ้ากำหนดให้ \mathbf{a}_r คือเวกเตอร์หน่วย มีพิกัดจากจุดกำเนิดไปยังทิศทางมุม θ และมุม ϕ การกำหนดคลื่นระนาบตกกระทบจากทิศทางนี้ คือ

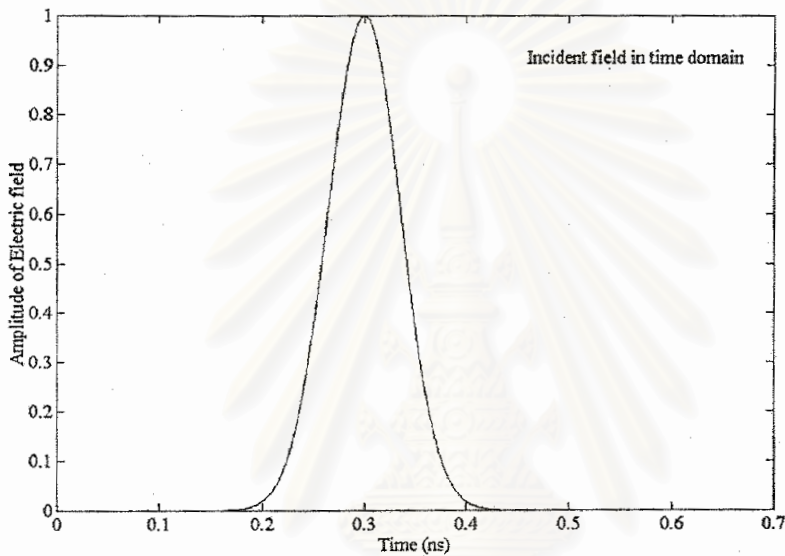
$$\mathbf{E}^{inc} = [E_{\theta}^{inc} \mathbf{a}_{\theta} + E_{\phi}^{inc} \mathbf{a}_{\phi}] f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \tag{ก.10}$$

$$\mathbf{H}^{inc} = \left[\frac{E_{\phi}^{inc}}{\eta} \mathbf{a}_{\theta} - \frac{E_{\theta}^{inc}}{\eta} \mathbf{a}_{\phi} \right] f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \tag{ก.11}$$

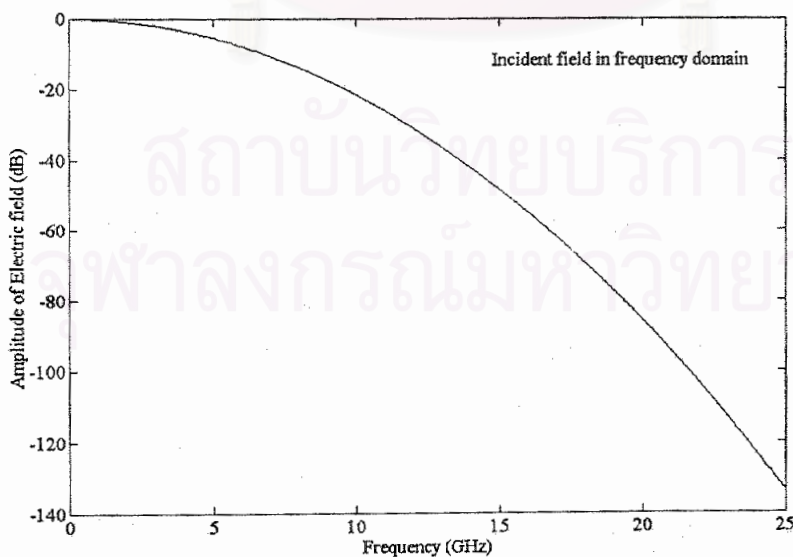
โดย \mathbf{a}_{θ} และ \mathbf{a}_{ϕ} คือเวกเตอร์หน่วยของระบบพิกัดทรงกลม, E_{θ}^{inc} และ E_{ϕ}^{inc} คือส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในทิศทาง \mathbf{a}_{θ} และ \mathbf{a}_{ϕ} ตามลำดับ, η คืออิมพีแดนซ์ของอวกาศว่าง (impedance of free space), \mathbf{r}' คือเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดที่ต้องให้เกิดความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบ และ R คือระยะจุดอ้างอิงใด ๆ ฟังก์ชัน $f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c)$ คือฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาโดยในที่นี้กำหนดเป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์ มีสมการ (Ming-Shing et al. 1993)

$$f(t) = e^{-[(t-t_0)/\tau]^2} \quad (ก.12)$$

เมื่อ t_0 คือ เวลา ณ. ตำแหน่งที่ขนาดมีค่าสูงสุด, τ คือ ความกว้างของพัลส์ โดยรูปที่ ก.3 (ก). แสดงขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในโดเมนเวลาที่มีสมการดังสมการ (ก.12) และรูป (ข) ในโดเมนความถี่ที่เกิดจากผลการแปลงฟูริเยร์แบบเร็วของรูป (ก) โดยพิจารณาในหน่วยของ dB.



(ก) ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในโดเมนเวลา



(ข) ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในโดเมนความถี่

รูปที่ ก.3 ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบที่เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนพัลส์ในโดเมนเวลาและความถี่

ในสมการ (ก.10) และสมการ (ก.11) ส่วนประกอบของความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบอยู่ในระบบพิกัดทรงกลม เราสามารถแสดงส่วนประกอบของความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบในระบบพิกัดฉาก ดังนี้

$$E_x^{inc} = [E_\theta \cos\theta \cos\phi - E_\phi \sin\phi]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.13a)$$

$$E_y^{inc} = [E_\theta \cos\theta \sin\phi + E_\phi \cos\phi]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.13b)$$

$$E_z^{inc} = [-E_\theta \sin\theta]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.13c)$$

$$H_x^{inc} = [(E_\theta \sin\phi + E_\phi \cos\theta \cos\phi)/\eta]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.13d)$$

$$H_y^{inc} = [(-E_\theta \cos\phi + E_\phi \cos\theta \sin\phi)/\eta]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.13e)$$

$$H_z^{inc} = [(-E_\phi \sin\phi)/\eta]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.13f)$$

สมการ (ก.13) ส่วนประกอบของความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบมีขนาดที่ขึ้นกับมุม θ และมุม ϕ ส่วนส่วนประกอบ E_θ และ E_ϕ จะกำหนดโพลาไรเซชันของความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบ ถ้าโพลาไรเซชันแบบ θ (θ polarization) ส่วนประกอบ E_ϕ มีค่าเท่ากับศูนย์และถ้าโพลาไรเซชันแบบ ϕ (ϕ polarization) ส่วนประกอบ E_θ มีค่าเท่ากับศูนย์

เมื่อพิจารณาคลื่นระนาบที่ตกกระทบในดักกลางจะพบว่า มีระนาบตกกระทบ (plane of incidence) คือระนาบ $x-z$ ซึ่งมีมุมตกกระทบ θ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง 90 องศาและมุม ϕ มีค่าศูนย์องศา จากที่กล่าวมาข้างต้นโพลาไรเซชันแบบ θ มีขนาดของ E_θ เท่ากับศูนย์ ถ้าเรากำหนดให้ E_θ มีค่าเท่ากับ 1 โวลต์ต่อเมตรและมุม ϕ มีค่าศูนย์องศา เมื่อเรานำความสัมพันธ์เหล่านี้แทนลงในสมการ (ก.13a) - (ก.13c) จะมีส่วนประกอบ E_y^{inc} มีค่าเท่ากับศูนย์แต่ส่วนประกอบ E_x^{inc} และ E_z^{inc} มีค่าไม่เท่ากับศูนย์และทิศทางของเวกเตอร์หน่วย E_x^{inc} และ E_z^{inc} จะขนานกับระนาบตกกระทบ จึงสามารถกล่าวได้ว่าความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบมีโพลาไรเซชันขนาน (parallel polarization) มีส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ ดังนี้

$$E_x^{inc} = [1.0 \cdot \cos\theta]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.14a)$$

$$E_y^{inc} = 0 \quad (ก.14b)$$

$$E_z^{inc} = [-1.0 \cdot \sin\theta]f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.14c)$$

สำหรับโพลาไรเซชันแบบ ϕ ถ้าเรากำหนดให้ E_ϕ มีค่าเท่ากับ 1 โวลต์ต่อเมตรและมุม ϕ มีค่าศูนย์องศา เมื่อแทนความสัมพันธ์เหล่านี้ลงในสมการ (ก.13a) - (ก.13c) จะมีส่วนประกอบ E_x^{inc} และ E_z^{inc} มีค่าเท่ากับศูนย์แต่ส่วนประกอบ E_y^{inc} มีค่าไม่เท่ากับศูนย์และมีขนาดที่เป็นอิสระกับมุมตกกระทบ นอกจากนี้ ทิศทางเวกเตอร์หน่วยของ E_y^{inc} จะตั้งฉากกับระนาบตกกระทบ จึงกล่าวได้ว่าความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในกรณีนี้มีโพลาไรเซชันตั้งฉาก (perpendicular polarization) มีส่วนประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ ดังนี้

$$E_x^{inc} = 0 \quad (ก.15a)$$

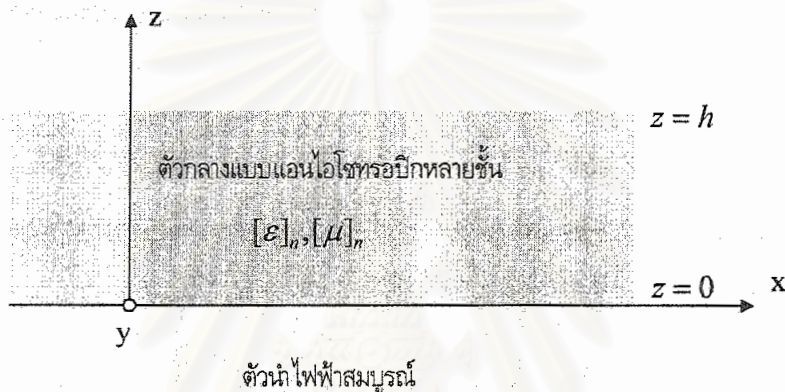
$$E_y^{inc} = 1.0 \cdot f(t + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}')/c + R/c) \quad (ก.15b)$$

$$E_z^{inc} = 0 \quad (ก.15c)$$

ภาคผนวก ข

คลื่นสะท้อนจากแผ่นตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิก

การตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์สัมประสิทธิ์การสะท้อนของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าบนตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้นของ วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาและวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในโดเมนเวลาได้นำระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์จากงานวิจัยของ (Titchener and Willis, 1991) มาเป็นวิธีที่ใช้เปรียบเทียบ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้เขียนขั้นตอนของวิธีการดังกล่าว โดยใช้ข้อความที่กระชับและเปลี่ยนแปลงสัญลักษณ์บางส่วนเพื่อความเหมาะสม นอกจากนี้ยังแยกเป็นหัวข้อตามงานวิจัย แสดงดังข้างล่างนี้



รูปที่ ข.1 ตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกหลายชั้น

สมการบังคับ (governing equations)

จากรูปที่ ข.1 กำหนดให้แกนคาร์ทีเซียน (cartesian axes) แทนด้วยแกน x, y และ z โดยที่แกน z วางตัวในแนวนอนและตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกมีความยาวจาก $z=0$ ถึง $z=h$ ซึ่งตัวกลาง $z > h$ จะอวกาศว่างและเป็นบริเวณที่มีคลื่นตกกระทบ (incident wave) โดยปัญหาที่ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับสมการของแมกซ์เวลล์ในโดเมนเวลา คือ

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{ข.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (\text{ข.2})$$

สมการ (ข.1) และสมการ (ข.2) จะมีความสัมพันธ์ของส่วนประกอบความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ากับส่วนประกอบความเข้มสนามไฟฟ้าด้วยเทนเซอร์สภาพยอม และมีความสัมพันธ์ของส่วนประกอบความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กกับส่วนประกอบความเข้มสนามแม่เหล็กด้วยเทนเซอร์ความซึมซับได้ มีดังนี้

$$\mathbf{D} = [\epsilon]\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_i = [\mu]\mathbf{H}_i \quad (\text{ข.3})$$

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตคือ ความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กแนวสัมผัสจะมี ความต่อเนื่อง ถ้าให้ \mathbf{n} คือเวกเตอร์หน่วยมีทิศทางตั้งฉากกับรอยต่อจากตัวกลางที่หนึ่งมาสอง ดังนั้นเงื่อนไข ขอบเขต มีดังนี้

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (\text{ข.4})$$

หลักการทั่วไป (general formulation)

ในปัญหาการสะท้อนที่พิจารณาี้ เราจะกำหนดให้ความเข้มสนามมีการเปลี่ยนแปลงที่เป็นอิสระกับ แกน y ดังนั้นรูปแบบของคลื่น ในบริเวณที่ $z > h$

$$\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (\text{ข.5})$$

เมื่อ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{k} = k_0(\sin \theta, 0, -\cos \theta)$ และ $k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$ สำหรับบริเวณที่ $0 < z < h$ จะมีรูปแบบสมการความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กที่มาจากผลเฉลยในสมการของแมกซ์-เวลล์ คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_x(z), E_y(z), E_z(z)) e^{i(k_0 \sin \theta x - \omega t)} \\ \mathbf{H} &= (H_x(z), H_y(z), H_z(z)) e^{i(k_0 \sin \theta x - \omega t)} \end{aligned} \quad (\text{ข.6})$$

แทนสมการ (ข.6) ลงในสมการของแมกซ์เวลล์ (ข.1) และ (ข.2) โดยผลที่ได้จะมีหกสมการ มีจำนวนตัวไม่รู้ค่า จำนวนหกตัว คือ E_x, E_y, E_z, H_x, H_y และ H_z ตามลำดับ จากนั้นกำจัด E_z และ H_z เพื่อลดจำนวนสนาม ให้เหลือเพียง E_x, E_y, H_x และ H_y เท่านั้น ซึ่งผลสุดท้ายจะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\begin{bmatrix} E_t \\ H_t \end{bmatrix}' = i\omega \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \\ H_t \end{bmatrix} \quad (\text{ข.7})$$

โดยที่

$$E_t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad H_t = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad (\text{ข.8})$$

จากสมการ (ข.7) นี้ ดรรชนีบน ' (prime) หมายถึงอนุพันธ์เทียบกับ z และ Γ_{ij} ($i, j = 1, 2$) คือเมทริกซ์ย่อย ขนาด 2×2 มีรายละเอียดดังนี้

$$\Gamma_{11} = \frac{k_0 \sin \theta}{\omega} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} & \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{zz} & \mu_{zz} & \epsilon_{zz} \\ 0 & -\frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} & \end{bmatrix}, \Gamma_{12} = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{\mu_{yx}}{\mu_0} & \frac{\mu_{yz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}\mu_0} & -\frac{\epsilon_0 \sin^2 \theta}{\epsilon_{zz}} + \frac{\mu_{yy}}{\mu_0} - \frac{\mu_{yz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}\mu_0} \\ \mu_0 & \mu_{zz}\mu_0 & \mu_0 \\ \frac{\mu_{xz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}\mu_0} - \frac{\mu_{xx}}{\mu_0} & \frac{\mu_{xz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}\mu_0} & \frac{\mu_{xy}}{\mu_0} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{21} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_0} + \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}\epsilon_0} & \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{\mu_{zz}} + \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}\epsilon_0} - \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_0} \\ \epsilon_0 & \epsilon_{zz}\epsilon_0 & \epsilon_0 \\ -\frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}\epsilon_0} + \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0} & -\frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}\epsilon_0} + \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} & \end{bmatrix}, \Gamma_{22} = \frac{k_0 \sin \theta}{\omega} \begin{bmatrix} -\frac{\mu_{zx}}{\mu_{zz}} & \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} & \frac{\mu_{zy}}{\mu_{zz}} \\ \mu_{zz} & \epsilon_{zz} & \mu_{zz} \\ 0 & -\frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} & \end{bmatrix} \quad (ข.9)$$

หลักการแอดมิตแตนซ์ (admittance formulation)

จากสมการ (ข.7) มีจำนวน 4 สมการและมีจำนวนสนามไม่รู้ค่าจำนวน 4 ตัวแปรเช่นกัน เราสามารถจัดรูปแบบสมการนี้ให้เหลือเพียง 2 สมการได้ โดยนำหลักการเมทริกซ์แอดมิตแตนซ์ (admittance matrix)

$$H_i = Y(z)E_i \quad (ข.10)$$

และสามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเข้มสนามของคลื่นตกกระทบ E_i^{inc} และ H_i^{inc} ที่แสดงในสมการ (ข.5) ในบริเวณที่ $z > h$ ได้ดังนี้

$$H_i^{inc} = Y_0 E_i^{inc} \quad \text{โดยที่} \quad Y_0 = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta \\ -\frac{1}{\cos \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (ข.11)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ z ในสมการ (ข.10) และนำสมการ (ข.7) มาแทน ผลที่ได้มีดังนี้

$$\begin{aligned} H_i' &= Y E_i + i\omega Y (\Gamma_{11} E_i + \Gamma_{12} H_i) \\ &= i\omega (\Gamma_{21} E_i + \Gamma_{22} H_i) \end{aligned} \quad (ข.12)$$

และจากสมการ (ข.12) เราสามารถจัดรูปแบบสมการ โดยให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แอดมิตแตนซ์และมีรูปแบบสมการเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบสมการรีคาดี มีดังนี้

$$Y' + i\omega (Y\Gamma_{11} - \Gamma_{21} + Y\Gamma_{12}Y - \Gamma_{22}Y) = 0 \quad (ข.13)$$

โดยที่ Y คือเมทริกซ์แอดมิตแตนซ์ที่มีขนาด 2×2 ถ้าตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่ตำแหน่ง $z = 0$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์จะทำให้ $E_i = 0$ บน $z = 0$

รูปแบบของการสะท้อน (reflectance formulation)

ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อนในแนวสัมผัส ที่ระยะ $z = h$ ใดๆ จะมีค่าเท่ากับเมทริกซ์สะท้อน R คูณด้วยความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบในแนวสัมผัสที่ระยะ $z = h$ ใด ๆ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_t^{ref}(h) = RE_t^{inc}(h) \quad (ข.14)$$

ส่วนความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นสะท้อนในแนวสัมผัสที่ระยะเดียวกันนี้ เราสามารถหาได้จากความเข้มสนามไฟฟ้ามีดังนี้

$$H_t^{ref}(h) = -Y_0 E_t^{ref}(h) = -Y_0 RE_t^{inc}(h) \quad (ข.15)$$

จากความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อนและความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นสะท้อนในแนวสัมผัสที่ระยะ $z = h$ ในสมการ (ข.14) และสมการ (ข.15) นี้จะเกิดขึ้นในบริเวณที่เป็นอวกาศว่าง ซึ่งในบริเวณที่เป็นอวกาศว่างนี้ก็มีสนามตกกระทบรวมอยู่ด้วย ถ้าเรากำหนดให้ความเข้มสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสบนตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่ระยะ $z = h$ ใด ๆ คือ $H_t(h)$ ดังนั้นเมื่อเรานำความสัมพันธ์ของสนามที่กล่าวมาข้างต้น แทนลงในเงื่อนไขขอบเขตตั้งสมการ (ข.4) ผลที่ได้ คือ

$$\begin{aligned} H_t(h) &= H_t^{inc}(h) + H_t^{ref}(h) = Y_0(I - R)E_t^{inc}(h) \\ &= YE_t(h) = Y(I + R)E_t^{inc}(h) \end{aligned} \quad (ข.16)$$

โดยที่ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ขนาด 2×2 ดังนั้น

$$Y_0^{-1}Y = (I - R)(I + R)^{-1} \quad (ข.17)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ z ในสมการ (ข.17) และแทนลงในสมการ (ข.13) ผลสุดท้ายจะได้ เมทริกซ์การสะท้อน R อยู่ในรูปสมการวิภาคที่

$$R' = \frac{i\omega}{2}(A - RB + CR - RDR) \quad (ข.18)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A &= \Gamma_{11} - Y_0^{-1}\Gamma_{21} + \Gamma_{12}Y_0 - Y_0^{-1}\Gamma_{22}Y_0 \\ B &= \Gamma_{11} + Y_0^{-1}\Gamma_{21} + \Gamma_{12}Y_0 + Y_0^{-1}\Gamma_{22}Y_0 \\ C &= \Gamma_{11} - Y_0^{-1}\Gamma_{21} - \Gamma_{12}Y_0 + Y_0^{-1}\Gamma_{22}Y_0 \end{aligned}$$

$$D = \Gamma_{11} + Y_0^{-1}\Gamma_{21} - \Gamma_{12}Y_0 - Y_0^{-1}\Gamma_{22}Y_0 \quad (\text{ข.19})$$

ถ้าที่ $z < 0$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ ทำให้เงื่อนไขขอบเขตบน R ที่ $z = 0$ คือ $R = -I$ และถ้าที่ $z < 0$ เป็นตัวกลางชนิดใด ๆ เช่น ตัวกลางไดอิเล็กทริก (dielectric) แล้ว เงื่อนไขขอบเขตบน R ที่ $z = 0$ คือ เมทริกซ์การสะท้อนที่เกิดการสะท้อนจากตัวกลางชนิดนั้น ๆ

ข้อพิจารณาพลังงาน (energy considerations)

ในหัวข้อนี้ กล่าวถึงสมการ (ข.18) ในการที่จะแปลงเมทริกซ์การสะท้อน R ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์สลับ (alternative matrix) R ซึ่งจะต้องเป็นแบบยูนิทารี (unitary) เมื่อชั้นของตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกไม่มีการสูญเสียและที่ $z = 0$ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ มีชั้นตอนเริ่มจากความเข้มสนามไฟฟ้าทุกส่วนประกอบจะเป็นอิสระกับแกน y ดังนั้นรูปแบบของความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบดังสมการ (ข.5) และความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นสะท้อน คือ

$$E^{inc} = (E_{TM}^{inc} \cos \theta, E_{TE}^{inc}, E_{TM}^{inc} \sin \theta) e^{ik_0(\sin \alpha x - \cos \alpha z) - i\omega t} \quad (\text{ข.20})$$

$$E^{ref} = (E_{TM}^{ref} \cos \theta, E_{TE}^{ref}, -E_{TM}^{ref} \sin \theta) e^{ik_0(\sin \alpha x + \cos \alpha z) - i\omega t} \quad (\text{ข.21})$$

กำหนดให้เมทริกซ์สะท้อนมีสมาชิกภายในเมทริกซ์ แสดงได้ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{ข.22})$$

แทนสมการ (ข.20) และสมการ (ข.21) ลงในสมการ (ข.14) จะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} E_{TM}^{ref} \\ E_{TE}^{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12}/\cos \theta \\ R_{21} \cos \theta & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{TM}^{inc} \\ E_{TE}^{inc} \end{bmatrix} e^{-2ik_0 h \cos \theta} \quad (\text{ข.23})$$

ในบริเวณที่ $z \geq h$ พลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่สะท้อนจะเท่ากับพลังงานของคลื่นที่ตกกระทบมีสมการ

$$|E_{TM}^{ref}|^2 + |E_{TE}^{ref}|^2 = |E_{TM}^{inc}|^2 + |E_{TE}^{inc}|^2 \quad (\text{ข.24})$$

หรือมีเมทริกซ์การสะท้อน คือ

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12}/\cos\theta \\ R_{21}\cos\theta & R_{22} \end{bmatrix} \quad (ข.25)$$

จากสมการ (ข.25) นี้สามารถเป็นแบบยูนิทารี ดังนั้น เมื่อตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกที่ไม่มีการสูญเสียและมีตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางดังรูป ข.1 ซึ่งจะทำให้เมทริกซ์ \bar{R} จะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\bar{R}^* \bar{R} = I \quad (ข.26)$$

โดยที่ สัญลักษณ์ * แทนสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) กำหนดให้

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ข.27)$$

แล้วจะได้ $\bar{R} = P^{-1} R P$ (ข.28)

และสมการ (ข.18) สามารถแปลงให้อยู่ในรูป

$$\bar{R}' = \frac{i\omega}{2} (\bar{A} - \bar{R}\bar{B} + \bar{C}\bar{R} - \bar{R}\bar{D}\bar{R}) \quad (ข.29)$$

โดยที่ $\bar{A} = P^{-1} A P$ และมีความหมายเช่นเดียวกันสำหรับ \bar{B}, \bar{C} และ \bar{D} นอกจากนี้การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตบน \bar{R} ที่ $z=0$ คือ $\bar{R} = -I$ ถ้าชั้นของตัวกลางมีตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์วางดังรูป ข.1

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method)

การหาผลเฉลยหรือคำตอบของเมทริกซ์สะท้อนในสมการ (ข.29) จะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คือวิธีผลต่างสืบเนื่อง โดยการแทนด้วยสมการ

$$\bar{R} = Z X^{-1} \quad (ข.30)$$

ดังนั้นสมการ (ข.29) สามารถลดรูปโดยเขียนในรูปแบบเชิงเส้น (linear form) ได้

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}' = \frac{i\omega}{2} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{D} \\ \bar{A} & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \quad (ข.31)$$

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตบน X และ Z จะไม่แบบยูนิทารี แต่ถ้าค่า $\bar{R}(0) = \text{ค่าคงที่}$ แล้ว ค่า $X(0) = I$ และ $Z(0) = \bar{R}(0)$ จะสามารถหาค่าได้ ในส่วนต่อไปจะแทน X' ด้วย $(X_{n+1} - X_n)/\Delta$ และแทน X ด้วย $(X_{n+1} + X_n)/2$ ส่วน Z' และ Z จะแทนในลักษณะเดียวกัน โดยที่สัญลักษณ์ Δ แทนความยาวที่แบ่งย่อยซึ่งจะมีค่าสม่ำเสมอ X_n และ Z_n หมายถึงค่าของ X และ Z ตามลำดับที่ตำแหน่งโนด n จากนั้นนำค่าการประมาณแทนลงในสมการ (ข.31) ผลสุดท้ายจะได้

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Z_n \end{bmatrix} \quad (\text{ข.32})$$

โดยที่

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - i\delta\bar{B} & -i\delta\bar{D} \\ -i\delta\bar{A} & I - i\delta\bar{C} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I + i\delta\bar{B} & i\delta\bar{D} \\ i\delta\bar{A} & I + i\delta\bar{C} \end{bmatrix} \quad (\text{ข.33})$$

และ $\delta = \omega\Delta/4$ ถ้าเรากำหนดให้ \bar{R}_n หมายถึงเมทริกซ์สะท้อน \bar{R} ที่ตำแหน่งโนด n แล้วสมการ (ข.32) จะได้

$$\bar{R}_{n+1} = (M_{21} + M_{22}\bar{R}_n)(M_{11} + M_{12}\bar{R}_n)^{-1} \quad (\text{ข.34})$$

และแทนการคำนวณเริ่มต้นด้วย $\bar{R}_0 = \bar{R}(0)$ รายละเอียดของเมทริกซ์ M_{ij} ($i, j = 1, 2$) ในสมการ (ข.33) จะแสดงในเทอมของเมทริกซ์ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ และ \bar{D} มีดังนี้

$$M_{11} = ((I - i\delta\bar{C})\bar{D}^{-1}(I - i\delta\bar{B}) + \delta^2\bar{A})^{-1} \cdot ((I - i\delta\bar{C})\bar{D}^{-1}(I + i\delta\bar{B}) - \delta^2\bar{A}) \quad (\text{ข.35})$$

$$M_{12} = 2i\delta((I - i\delta\bar{C})\bar{D}^{-1}(I - i\delta\bar{B}) + \delta^2\bar{A})^{-1} \quad (\text{ข.36})$$

$$M_{21} = 2i\delta((I - i\delta\bar{B})\bar{A}^{-1}(I - i\delta\bar{C}) + \delta^2\bar{D})^{-1} \quad (\text{ข.37})$$

$$M_{22} = ((I - i\delta\bar{B})\bar{A}^{-1}(I - i\delta\bar{C}) + \delta^2\bar{D})^{-1} \cdot ((I - i\delta\bar{B})\bar{A}^{-1}(I + i\delta\bar{C}) - \delta^2\bar{D}) \quad (\text{ข.38})$$

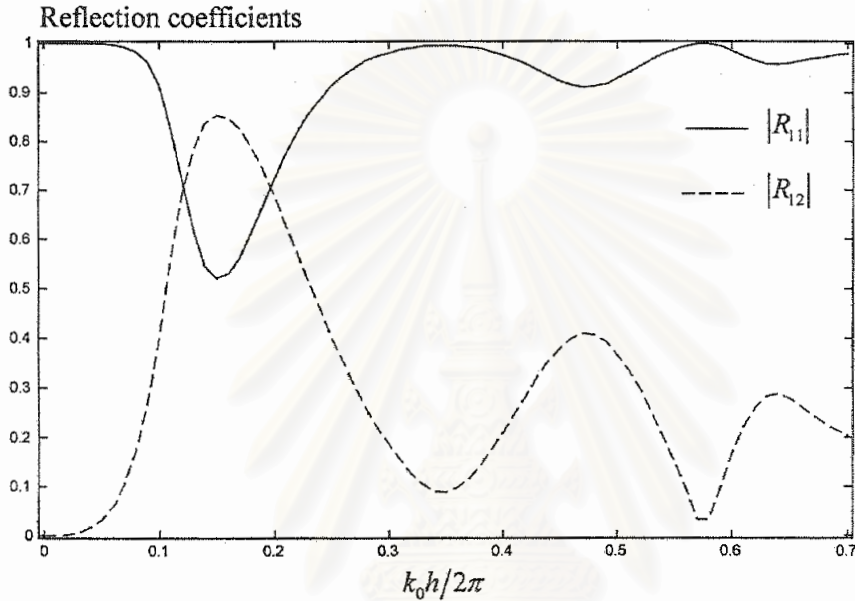
ผลการวิเคราะห์และการอภิปราย (results and discussion)

การแสดงผลการวิเคราะห์จะกำหนดตัวกลางแบบแอนไอโซทรอปิกสองชั้นและมีตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ ดังรูปที่ ข.1 โดยชั้นที่หนึ่งหรือในช่วง $0 \leq z < h/2$ และชั้นที่สองหรือในช่วง $h/2 < z \leq h$ มีคุณสมบัติของเทนเซอร์สภาพยอมและความซาบซึมได้ ดังนี้

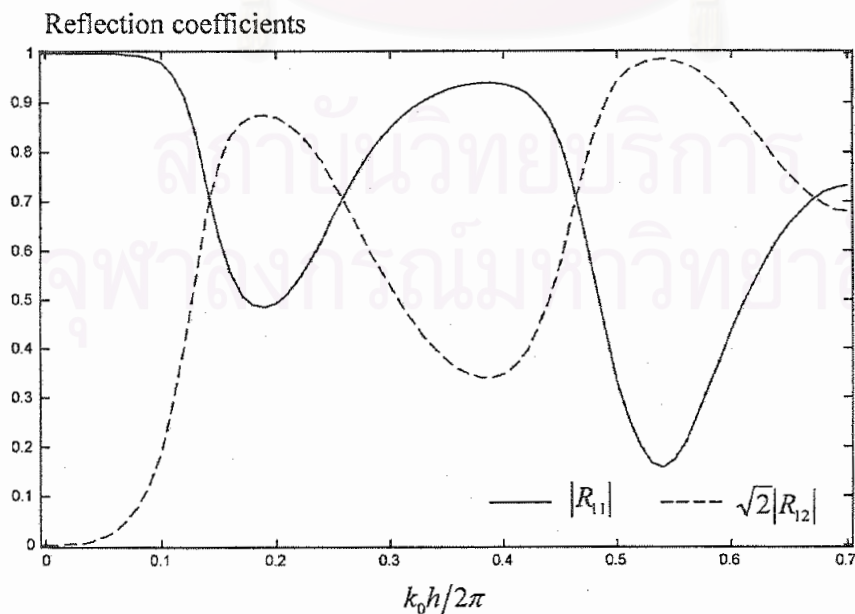
$$[\varepsilon] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu = \mu_0\mu_r \text{ และ } \mu_r = 1.0 \quad \text{ชั้นที่หนึ่ง} \quad (\text{ข.39})$$

$$[\varepsilon] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 3.5 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu = \mu_0\mu_r \text{ และ } \mu_r = 1.0 \quad \text{ชั้นที่สอง} \quad (\text{ข.40})$$

ในรูปที่ ข.2 แสดงขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน $|R_{11}|$ (เส้นทึบ) และ $|R_{12}|$ (เส้นประ) ที่เปลี่ยนแปลงตาม $k_0 h/2\pi$ เมื่อคลื่นตกกระทบบนอย่างตั้งฉาก คุณสมบัติของตัวกลางเป็นดังสมการ (ข.39) และสมการ(ข.40) กราฟแสดงผลรวม $|R_{11}|^2 + |R_{12}|^2 = 1$ และรูปที่ ข.3 แสดงขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน $|R_{11}|$ และ $\sqrt{2}|R_{12}|$ ที่เปลี่ยนแปลงตาม $k_0 h/2\pi$ เมื่อสนามตกกระทบบนมีมุมตกกระทบบเท่ากับ 45 องศา โดยมีคุณสมบัติของตัวกลางดังสมการ (ข.39) และสมการ (ข.40) ซึ่งในกรณีนี้จะมีผลรวม $|R_{11}|^2 + 2|R_{12}|^2 = 1$



รูปที่ ข.2 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน $|R_{11}|$ (เส้นทึบ) และ $|R_{12}|$ (เส้นประ) ที่เปลี่ยนแปลงตาม $k_0 h/2\pi$ เมื่อสนามตกกระทบบนตั้งฉาก



รูปที่ ข.3 ขนาดของสัมประสิทธิ์การสะท้อน $|R_{11}|$ (เส้นทึบ) และ $\sqrt{2}|R_{12}|$ (เส้นประ) ที่เปลี่ยนแปลงตาม $k_0 h/2\pi$ เมื่อสนามตกกระทบบนมีมุมตกกระทบบเท่ากับ 45 องศา

ประวัติผู้เขียน

นางสาวนันทิยา นาฬิกาวิท เกิดเมื่อวันที่ 21 พฤศจิกายน พ.ศ. 2517 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ในปีการศึกษา 2538 และได้เข้าศึกษาต่อหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2539 ปัจจุบันทำงานที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิตย์



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย