เครื่องตวงไร้มาตรวัด

นายนิตินัย อุดมทรัพย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-53-2789-1

MEASURING DEVICES WITHOUT GRADATIONS

Mr.Nitinai Udomsub

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2005
ISBN 974-53-2789-1

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เครื่องตวงไร้มาตรวัด
โดย	นายนิตินัย อุดมทรัพย์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อาจารย์ ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.เปี่ยมศักดิ์ เมนะเศวต)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์)

....อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล)

....อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิเชฐ ชาวหา)

นิตินัย อุดมทรัพย์:. เครื่องตวงไร้มาตรวัด(MEASURING DEVICES WITHOUT GRADATIONS) อ. ที่ปรึกษา :รศ. ดร. วนิดา เหมะกุล, อ.ที่ปรึกษาร่วม: อ.ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา 106 หน้า. ISBN 574-53 –2789-1.

เรารวบรวมและศึกษาเครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เพราะไม่มีเครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมเกิดขึ้น จึงสร้างเครื่องตวงกึ่งสากลที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษ และแสดงว่า เครื่องตวงกึ่งสากลใช้ตวงของเหลวได้ 1 , 2 ,..., 43 ลูกบาศก์หน่วย

ภาควิชา **คณิตศาสตร์**	ลายมือชื่อนิสิต.......................
สาขาวิชา **คณิตศาสตร์**	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.......................
ปีการศึกษา 2548	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.......................

#4572342023 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD: UNIVERSAL MEASURING DEVICES ,SEMI-UNIVERSAL MEASURING DEVICES

NITINAI UDOMSUB: MEASURING DEVICES WITHOUT GRADATIONS

THESIS ADVISOR :ASSOC.PROF.WANIDA HEMAKUL,Ph.D,

THESIS COADVISOR : WACHARIN WICHIRAMALA,Ph.D. 106 pp. ISBN 974-53-2789-1

We collect and study universal measuring devices with a triangular base and a rectangular base. Since no universal measuring devices with a regular pentagonal base exist, a semi-universal measuring device with a special pentagonal base is constructed. It is shown that this device can measure 1 , 2 , ...,43 cubic units.

Department of Mathematics

Field of study Mathematics

Academic year 2005

Student's Signature..............................

Advisor's Signature..............................

Co-advisor's Signature..............................

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้รับความอนุเคราะห์ ความช่วยเหลือและกำลังใจ จากบุคคลหลายท่าน ขอขอบพระคุณ ท่านรองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณา ถ่ายทอดความรู้ ประสบการณ์ และให้คำปรึกษาที่มีประโยชน์อย่างยิ่ง ขอขอบพระคุณท่าน อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะที่มีประโยชน์ และความรู้ใหม่ๆ แก่ข้าพเจ้า ขอขอบพระคุณ Professor Jin Akiyama และ Professor Toshinori Sakai ที่กรุณาส่งเอกสารและมาบรรยายความรู้อันเป็นที่มาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบพระคุณ ท่านรองศาสตราจารย์ ดร. อัจฉรา หาญชูวงศ์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิเชฐ ชาวหา กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะต่างๆ ทั้งยังเป็นที่ปรึกษาในเรื่องการเรียนของข้าพเจ้า ตลอดมา ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. พัฒนี อุดมกะวนิช ผู้ช่วยศาสตราจารย์ เพ็ญพรรณ ยังคง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ภัทรสินี ภัทรโกศล อาจารย์ พรพรรณ แย้มกลิ่น ที่กรุณาเป็นกำลังใจ คอยกระตุ้นให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนตลอดมา ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์ รองศาสตราจารย์ ดร. กฤษณะ เนียมมณี รองศาสตราจารย์ สุชาดา ศิริพันธุ์ รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล อาจารย์ ดร. ศจี เพียรสกุล และ เหล่าคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ช่วยถ่ายทอดความรู้ และเป็นครูแม่แบบของข้าพเจ้า

ท้ายนี้ ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณบิดา มารดา คุณตาและคุณยายที่เป็นกำลังใจที่สำคัญยิ่ง ให้ข้าพเจ้า มีแรงกายแรงใจในการเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบคุณ เพื่อนๆ พี่ๆและน้องๆ สำหรับความช่วยเหลือในด้านต่างๆ โดยเฉพาะ คุณโสภณา สังขารา พี่สาวที่เป็นกำลังใจ และคอยช่วยเหลือข้าพเจ้าตลอดมา คุณเรืองวรินทร์ อินทรวงษ์ เพื่อนสนิท ที่คอยช่วยเหลือข้าพเจ้าในทุกๆ เรื่อง ขอขอบคุณ ว่าที่ร้อยตรี ภณัฐ ถ้วยแก้วเจริญ ดร. มนตรี มาลีวงศ์ ในความช่วยเหลือด้านคอมพิวเตอร์

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

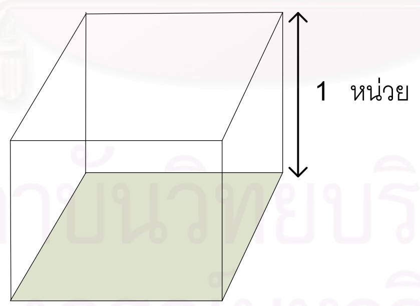
สมมุติว่ามีของเหลวจำนวนมากพอในภาชนะ A เราใช้ภาชนะ M ถ่ายเทของเหลวจากภาชนะ A ไปยังภาชนะ B โดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้

1) อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A เพียงครั้งเดียวเท่านั้น แต่สามารถเทของเหลว กลับคืนยังภาชนะ A กี่ครั้งก็ได้ตามต้องการ และสามารถเทของเหลวจากภาชนะ M ไปยังภาชนะ B กี่ครั้งก็ได้ตามต้องการ แต่เราไม่สามารถเทของเหลวจากภาชนะ B กลับคืนยังภาชนะ M ได้

2) ในการตวงปริมาตรของของเหลว เราใช้เพียงจุดมุมของภาชนะ M เป็นตัวกำหนดปริมาตร โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การเอียงภาชนะ M ระนาบที่เกิดจากพื้นผิวของของเหลว ต้องผ่านจุดมุมของภาชนะ M อย่างน้อย 3 จุด

นิยาม 1.1 ***เครื่องตวงสากล*** (v- universal measuring devices) คือ ภาชนะ M ไร้มาตรวัด มีปริมาตร v ลูกบาศก์หน่วย เมื่อเราใช้ภาชนะ M ตวงปริมาตรของเหลวจะได้ของเหลวที่มีปริมาตรเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ลูกบาศก์หน่วยไปจนถึง v ลูกบาศก์หน่วย ทุกค่าภายใต้เงื่อนไข 2 ข้อข้างต้น

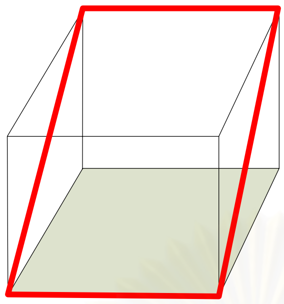
ตัวอย่าง เครื่องตวงสากล M ที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยมีพื้นที่ฐานเท่ากับ 6 ตารางหน่วย และมีความสูงเท่ากับ 1 หน่วย ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1

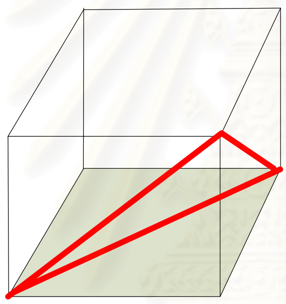
เครื่องตวง M นี้ ตวงของเหลวได้เท่ากับ 6 ลูกบาศก์หน่วย และเราสามารถตวงของเหลวปริมาตรอื่นๆ ได้ดังนี้

เมื่อเทของเหลวออก จนกระทั่งระดับน้ำผ่านจุดมุม 2 จุด ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2

และเมื่อเทของเหลวออกเรื่อยๆ จนกระทั่งระดับน้ำผ่านจุดมุมบนเพียงจุดเดียว ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3

ดังนั้นภาชนะนี้สามารถตวงของเหลวได้ทันทีเท่ากับ 6 ลูกบาศก์หน่วย 3 ลูกบาศก์หน่วย และ 1 ลูกบาศก์หน่วย

เมื่อต้องการของเหลวปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย 4 ลูกบาศก์หน่วย และ 5 ลูกบาศก์หน่วย สามารถทำได้ดังนี้

สำหรับของเหลวปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย : เอียงเครื่อง M ดังรูปที่ 1.2 จากนั้นค่อยๆ เทของเหลวออกใส่ในภาชนะ B จนกระทั่งของเหลวในเครื่องตวง M เป็นดังรูปที่ 1.3 เราจะได้ของเหลวในภาชนะ B เป็น 2 ลูกบาศก์หน่วย

สำหรับของเหลวปริมาตร 4 ลูกบาศก์หน่วย : ตวงของเหลวจากภาชนะ A ให้เต็มเครื่องตวง M จากนั้นค่อยๆ เทของเหลวออกใส่ในภาชนะ B จนกระทั่งได้ดังรูปที่ 1.2 จากนั้นค่อยๆ เทของเหลวกลับคืนยังภาชนะ A จนกระทั่งได้ดังรูปที่ 1.3 และนำของเหลวส่วนนี้เทใส่ยังภาชนะ B เราจะได้ของเหลวในภาชนะ B เป็น 4 ลูกบาศก์หน่วย

สำหรับของเหลวปริมาตร 5 ลูกบาศก์หน่วย : ตวงของเหลวจากภาชนะ A ให้เต็มเครื่องตวง M จากนั้นค่อยๆ เทของเหลวออกใส่ในภาชนะ B จนกระทั่งได้ดังรูปที่ 1.3 เราก็จะได้ของเหลวในภาชนะ B เป็น 5 ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้นเครื่องตวงสากล M นี้สามารถใช้ตวงของเหลวได้ 1 ลูกบาศก์หน่วย 2 ลูกบาศก์หน่วย ไปจนถึง 6 ลูกบาศก์หน่วย □

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะทำการรวบรวมงานวิจัยของ Professor Jin Akiyama และคณะ [1],[2] เกี่ยวกับ เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม และ สี่เหลี่ยม ซึ่งจะกล่าวไว้ในบทที่ 2 และบทที่ 3 ตามลำดับ สำหรับเครื่องตวงที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมปกติ พบว่าไม่มีเครื่องตวงสากลเกิดขึ้นแน่นอน ซึ่งได้อธิบายไว้ในบทที่ 4 จากนั้น เราจึงสร้างเครื่องตวง M ที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษ ซึ่งเกิดจากการตัดภาชนะที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกมุมหนึ่ง และทำให้เราได้เครื่องตวงกึ่งสากล ซึ่งมีเงื่อนไขการตวงเหมือนเครื่องตวงสากลแต่ไม่สามารถตวงได้ถึงปริมาตรสูงสุด

ก่อนอื่นจะขอแนะนำนิยาม และทฤษฎีบทที่จำเป็นดังต่อไปนี้

นิยาม 1.2 ให้ $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_i < n_{i+1}$ ทุก $i = 1,2,\ldots, k$-1

ลำดับ $\mathcal{D} = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k)$ ที่สมนัยกับ Ω โดยที่ $d_0 = 0$ และ $d_i \le d_{i+1}$ เป็นลำดับที่เกิดจากการจัดเรียงอันดับ $n_0, n_1, n_2\text{-}n_1, n_3\text{-}n_2, \ldots, n_k\text{-}n_{k-1}$ เมื่อ $n_0 = 0$

ลำดับ $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ เป็น **ลำดับก่อกำเนิด**(generating sequence) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม i ซึ่ง $1 \le i \le n_k$ จะมีลำดับย่อยของลำดับ $\mathcal{D}$ ที่สมนัยกับ Ω ซึ่ง i เท่ากับ ผลบวกของสมาชิกในลำดับย่อยนั้น

ตัวอย่าง ให้ Ω = (4,5,13,15,25,28) เป็นลำดับก่อกำเนิด เพราะลำดับ $\mathcal{D}$ ที่สมนัยกับ Ω เท่ากับ (0,1,2,3,4,8,10) และตารางต่อไปนี้แสดงการมีลำดับย่อยของลำดับ $\mathcal{D}$ ซึ่งทำให้ i เท่ากับผลบวกของสมาชิกของลำดับย่อยนั้น ทุก $i = 1,2,3,\ldots,28$ ดังตารางที่ 1.4

i	ลำดับย่อยของลำดับ $\mathcal{D}$	i	ลำดับย่อยของลำดับ $\mathcal{D}$
1	(0,1)	15	(1,4,10)
2	(0,2)	16	(2,4,10)
3	(0,3)	17	(3,4,10)
4	(0,4)	18	(8,10)
5	(2,3)	19	(1,8,10)
6	(2,4)	20	(2,8,10)
7	(3,4)	21	(1,2,8,10)
8	(0,8)	22	(4,8,10)
9	(1,8)	23	(1,4,8,10)
10	(0,10)	24	(2,4,8,10)
11	(3,8)	25	(3,4,8,10)
12	(4,8)	26	(1,3,4,8,10)
13	(3,10)	27	(2,3,4,8,10)
14	(4,10)	28	(1,2,3,4,8,10)

ตารางที่ 1.4

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ และลำดับ $\mathcal{D} = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k)$ ที่สมนัยกับ Ω จะได้ว่า Ω เป็นลำดับก่อกำเนิด ก็ต่อเมื่อ $d_i - 1 \leq d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ สำหรับทุก $i = 1,2,\ldots,k$

พิสูจน์ ($\longleftarrow$) สมมุติว่า $d_i - 1 \leq d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ ทุก $i = 1,2,\ldots,k$
เราจะสังเกตว่า $d_1 = 1$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สมมุติว่า ทุกจำนวนเต็มระหว่าง 1 และ $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ สามารถเขียนในรูปของผลบวกของสมาชิกเซตย่อยบางเซตของเซต $\{ d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}\}$ นั่นคือ ทุกจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป $m + d_i$ โดยที่ $0 \leq m \leq d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ สามารถเขียนได้ในรูปของผลบวกของสมาชิกของเซตย่อยของเซต $\{ d_0, d_1, d_2, \ldots, d_i \}$ เพราะว่า $d_i - 1 \leq d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ ทำให้เราได้ว่า ทุกจำนวนเต็มที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_i$, $i = 1,2,3\ldots,k$ สามารถเขียนในรูปผลบวกของสมาชิกของบางเซตย่อย ของเซต $\{ d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}\}$ ได้

($\longrightarrow$) สมมติว่ามีจำนวนเต็ม i บางตัว ซึ่ง $d_i - 1 > d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ จะเห็นได้ชัดว่า Ω ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด ทั้งนี้เนื่องจาก $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1} + 1$ ไม่สามารถเขียนในรูปผลบวกของบางเซตย่อยของเซต $\{ d_0, d_1, d_2, \ldots, d_i\}$ ได้

ทฤษฎีบท 1.4 ให้ $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ เป็นลำดับก่อกำเนิด และมีจำนวนเต็ม j โดยที่ $1 \leq j \leq k$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $n_j - n_{j-1} = 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม p โดยที่ $1 \leq p \leq k$ และ $p \neq j$ ซึ่งทำให้ $n_p - n_{p-1} = 2$

พิสูจน์ เนื่องจาก Ω เป็นลำดับก่อกำเนิด โดย ทฤษฎีบท 1.3 ทำให้เราได้ว่า $d_i - 1 \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$ สำหรับทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,k$ ดังนั้น $d_2 - 1 \leq d_1$ นั่นคือ $d_2 \leq d_1 + 1$ และเพราะว่า $d_1 = 1$ ดังนั้น $d_2 \leq 1 + 1 = 2$ และจากข้อสมมติที่ว่ามีเพียง j เท่านั้นที่ $n_j - n_{j-1} = 1$ ดังนั้น $d_2 = 2$ นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม p บางจำนวน ซึ่ง $p \neq j$ และ $1 \leq p \leq k$
โดยที่ $n_p - n_{p-1} = 2$ □

ทฤษฎีบท 1.5 ให้ $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ เป็นลำดับก่อกำเนิด จะได้ว่า $\Omega' = (n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1})$ จะเป็นลำดับก่อกำเนิด ก็ต่อเมื่อ $n_{k+1} \le 2n_k + 1$

พิสูจน์ เพราะว่า $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ เป็นลำดับก่อกำเนิด จะได้ว่า ลำดับ $\mathcal{D}$ ที่สมนัยกับ Ω คือ $\mathcal{D} = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k)$

พิจารณา $\Omega' = (n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1})$ ให้ $n_{k+1} - n_k = d_j$

<u>กรณีที่</u> 1 $d_j > d_k$

สร้างลำดับ $\mathcal{D}'$ ที่สมนัยกับ Ω' ดังนี้ $\mathcal{D}' = (d_0, d_1, \ldots, d_k, d_j)$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3

ลำดับ Ω' เป็นลำดับก่อกำเนิด ก็ต่อเมื่อ $d_j - 1 \le d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n_k$

นั่นคือ $n_{k+1} \le 2n_k + 1$

<u>กรณีที่</u> 2 $d_j \le d_k$

เราสร้างลำดับ $\mathcal{D}'$ ที่สมนัยกับ Ω' คือ $\mathcal{D}' = (d_0, d_1, \ldots, d_j, \ldots, d_k)$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3

ลำดับ Ω' เป็นลำดับก่อกำเนิด เมื่อ

$d_j - 1 \le d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{j-1} \le d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} \le d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n_k$

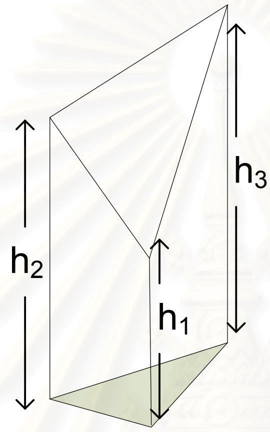
นั่นคือ $n_{k+1} \le 2n_k + 1$ □

ข้อสังเกต 1.6 ให้ $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ เป็นลำดับก่อกำเนิด จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n_i ซึ่ง $n_1 \le n_i \le n_k$ และ $n_i \ne n_j$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, k$ ทำให้ ลำดับ $(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_k)$ เป็นลำดับก่อกำเนิดด้วย

<u>หมายเหตุ</u> ในบางครั้งการพิจารณาลำดับ $(n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1})$ เกิดความยุ่งยากเราจึงพิจารณาลำดับ $(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_k)$ แทน ซึ่งจะทำให้ความยุ่งยากน้อยลง เป็นเหตุให้ต้องใช้ ทฤษฎีบท 1.5 และข้อสังเกต 1.6

บทที่ 2
เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม

ในบทนี้เราทำการศึกษาเครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมี 2 กรณี คือ ด้านข้างตั้งฉากกับฐานและด้านข้างไม่ตั้งฉากกับฐาน โดยในกรณีแรกเราให้เครื่องตวงมีพื้นที่ฐานเท่ากับ k ตารางหน่วย และเครื่องตวงมีความสูงเท่ากับ h_1, h_2, h_3 หน่วย ตามลำดับ โดยที่ $h_1 \le h_2 \le h_3$ ดังรูปที่ 2.1



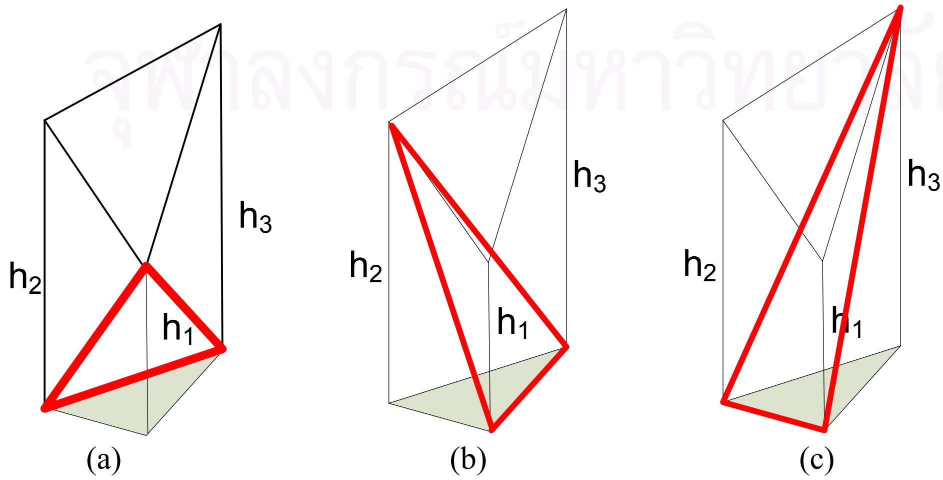
รูปที่ 2.1

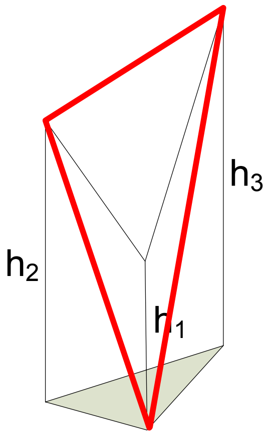
ทฤษฎีบท 2.1 ปริมาตรสูงสุดของเครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมโดยที่ด้านข้างตั้งฉากกับฐาน คือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ สำหรับขั้นตอนการพิสูจน์เราจะแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

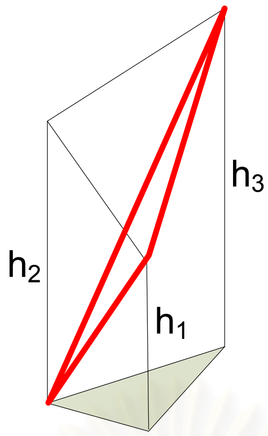
ขั้นที่ 1 วิธีการตวงของเหลวและการคำนวณปริมาตรของของเหลว

เมื่อพิจารณาความเป็นไปได้ต่าง ๆ ในการตวงของเหลวด้วยเครื่องตวงโดยเงื่อนไขของการตวง จะได้ว่ามีแบบตวงได้ทั้งสิ้น 7 แบบต่าง ๆ กัน ดังรูปที่ 2.2

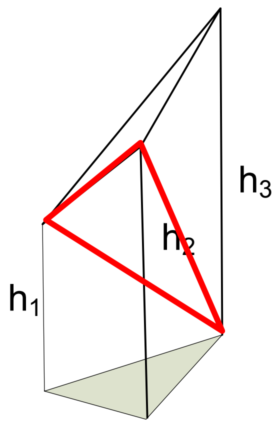




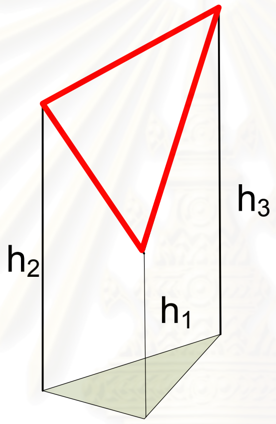
(d)



(e)



(f)



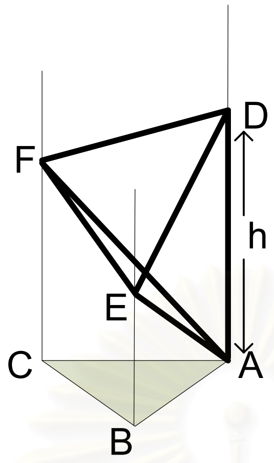
(g)

รูปที่ 2.2

จากรูปข้างต้น เราจะคำนวณเห็นได้โดยง่ายว่า ปริมาตรของของเหลวจากรูปที่ 2.2 (a) รูปที่ 2.2 (b) และ รูปที่ 2.2 (c) คือ $\frac{kh_1}{3}, \frac{kh_2}{3}, \frac{kh_3}{3}$ ตามลำดับ

สำหรับของเหลวในรูปที่ 2.2 (d),(e),(f) และ (g) คำนวณได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ข้อสังเกต 2.2 พิจารณาการคำนวณปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า $ADEF$ ต่อไปนี้



รูปที่ 2.3

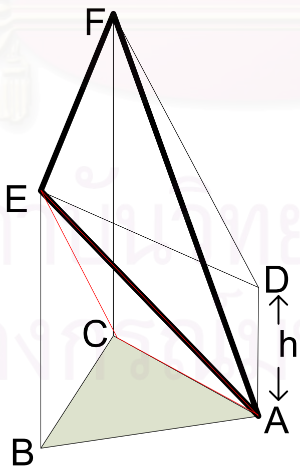
พิจารณารูปทรงสี่หน้า $ADEF$ จะได้ว่า

ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า $ADEF$ = ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า $ADEC$

= ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า $ADCB$

$$= \frac{kh}{3}$$

ข้อสังเกต 2.3 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของ $ABCEF$ และปริมาตรของทรงสี่หน้า $ABCE$ ต่อไปนี้



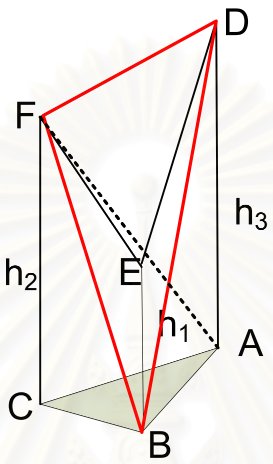
รูปที่ 2.4

จากรูปจะได้ว่า

ปริมาตรของปริซึม $ABCEF$ $\div$ ปริมาตรของทรงสี่หน้า $ABCE$ มีค่าเท่ากับ

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $BCEF$ $\div$ พื้นที่ของสามเหลี่ยม BCE

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.2 (d)



จากข้อสังเกต 2.3 ปริมาตรของปริซึม $ABCFD$ $\div$ ปริมาตรของทรงสี่หน้า $ABCF$ จะมีค่าเท่ากับ

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $ACFD$ $\div$ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ACF

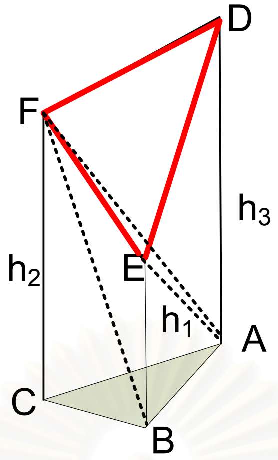
$$\frac{1}{2}(h_2+h_3)(\overline{CA}) \div \frac{1}{2}(h_2)(\overline{CA})$$

และเนื่องจาก ปริมาตรของทรงสี่หน้า $ABCF$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{kh_2}{3}$

ดังนั้น ปริมาตรของปริซึม $ABCFD$ เท่ากับ $\frac{k(h_2+h_3)}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

ด้วยวิธีการเดียวกัน สามารถคำนวณปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.2 (e) และรูปที่ 2.2(f) ได้เท่ากับ $\frac{k(h_1+h_3)}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย และ $\frac{k(h_1+h_2)}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย ตามลำดับ

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.2 (g)



จะเห็นว่า

ปริมาตรของปริซึม $ABCDEF$ เท่ากับ ผลรวมของปริมาตรของปริซึม $ABCFE$ กับ ปริมาตรของทรงสี่หน้า $ADEF$

เนื่องจาก ปริมาตรของปริซึม $ABCFE$ เท่ากับ $\dfrac{k(h_1+h_2)}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

จากข้อสังเกต 2.2 ปริมาตรของทรงสี่หน้า $ADEF$ เท่ากับ $\dfrac{kh_3}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ปริมาตรของปริซึม $ABCDEF$ เท่ากับ $\dfrac{k(h_1+h_2+h_3)}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

จากปริมาตรต่างๆ เราจะได้

$$\frac{kh_1}{3} \le \frac{kh_2}{3} \le \frac{kh_3}{3} \le \frac{k(h_1+h_2)}{3} \le \frac{k(h_1+h_3)}{3} \le \frac{k(h_2+h_3)}{3} \le \frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3} \quad \ldots\ldots(1)$$

หรือ

$$\frac{kh_1}{3} \le \frac{kh_2}{3} \le \frac{k(h_1+h_2)}{3} \le \frac{kh_3}{3} \le \frac{k(h_1+h_3)}{3} \le \frac{k(h_2+h_3)}{3} \le \frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3} \quad \ldots\ldots(2)$$

<u>ขั้นที่ 2</u> จะพิสูจน์ว่าปริมาตรของเครื่องตวงสากลไม่เกิน 41 ลูกบาศก์หน่วย

กรณี (1) $\dfrac{kh_1}{3} \le \dfrac{kh_2}{3} \le \dfrac{kh_3}{3} \le \dfrac{k(h_1+h_2)}{3} \le \dfrac{k(h_1+h_3)}{3} \le \dfrac{k(h_2+h_3)}{3} \le \dfrac{k(h_1+h_2+h_3)}{3}$

พิจารณาลำดับ $\dfrac{kh_1}{3}, \dfrac{k(h_2-h_1)}{3}, \dfrac{k(h_3-h_2)}{3}, \dfrac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \dfrac{k(h_3-h_2)}{3}, \dfrac{k(h_2-h_1)}{3}, \dfrac{kh_1}{3}$

สร้างลำดับ $\mathcal{T} = (\frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3})$

ให้ $a = \frac{kh_1}{3}$, $b = \frac{k(h_2-h_1)}{3}$, $c = \frac{k(h_3-h_2)}{3}$ และ $d = \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}$

เราจะสังเกตว่า $d = a\text{-}c$

ให้ C แทนเซตของจำนวนที่สามารถเขียนเป็นผลบวกของเทอมที่ต่างกันในลำดับ $\mathcal{T}$

เนื่องจาก a , b , c ปรากฏอยู่สองเทอมในลำดับ $\mathcal{T}$ และ d ปรากฏอยู่เพียงเทอมเดียวในลำดับ $\mathcal{T}$ สามารถเขียน

$$C = \{\, ai + bj + cs + dt \text{ โดยที่ } i, j, s \in \{0,1,2\} \text{ และ } t \in \{0,1\}\}$$

ดังนั้นสมาชิกในเซต C ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $3\cdot 3\cdot 3\cdot 2-1 = 53$ แต่เนื่องจาก ความสัมพันธ์ $d = a\text{-}c$ จะได้ว่า $ai + bj + cs + dt = ai + bj + cs + dt + a - c - d$

$$= a(i+1) + bj + c(s\text{-}1) + d(t\text{-}1)$$

โดยที่ $i \in \{0,1\}$, $j \in \{0,1,2\}$, $s \in \{1,2\}$, $t = 1$

ดังนั้นจะต้องมีสมาชิกอย่างน้อย $2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 12$ ตัวของเซต C ซึ่งมีผลบวกซ้ำกัน

นั่นคือ $|C| \le 53 - 12$

นั่นคือสมาชิกในเซต C มีได้อย่างมาก 41 ตัว ซึ่งตามนิยามของ C เราจะได้ว่า ปริมาตรสูงสุดที่เครื่องตวง สามารถตวงได้อย่างมากคือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

กรณี (2) $\quad \frac{kh_1}{3} \le \frac{kh_2}{3} \le \frac{k(h_1+h_2)}{3} \le \frac{kh_3}{3} \le \frac{k(h_1+h_3)}{3} \le \frac{k(h_2+h_3)}{3} \le \frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3}$

พิจารณาลำดับ $\frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_3-(h_1+h_2))}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3}$

ลำดับ $\mathcal{T} = (\frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_3-(h_1+h_2))}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3})$

ให้ $a = \frac{kh_1}{3}$, $b = \frac{k(h_2-h_1)}{3}$ และ $c = \frac{k(h_3-(h_1+h_2))}{3}$

จะเห็นว่า a ปรากฏอยู่สี่เทอมในลำดับ $\mathcal{T}$ และ b ปรากฏอยู่สองเทอมในลำดับ $\mathcal{T}$ และ c ปรากฏอยู่เพียงเทอมเดียวเท่านั้นในลำดับ $\mathcal{T}$ และด้วยวิธีการเดียวกันกับกรณีที่ (1)

ให้ $C = \{\, ai + bj + cs$ โดยที่ $i \in \{0,1,2,3,4\}$, $j \in \{0,1,2\}$ และ $s \in \{0,1\}\}$

ทำให้เราได้ว่า $|C| \le 5\cdot 3\cdot 2-1 = 29 < 41$

<u>ขั้นที่ 3</u> เราจะพิสูจน์ว่าเครื่องตวงสากลที่มีปริมาตร 41 ลูกบาศก์หน่วยนั้นมีจริง

พิจารณากรณี (1)

เรามี $\mathcal{T} = (\frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3})$

จากเงื่อนไข $h_3 \le h_1 + h_2$ และความจริงที่ว่า $h_1 + h_2 \le h_1 + h_3$

สร้างลำดับไม่ลด $\mathcal{D} = (d_1, d_2, ..., d_7)$ โดยที่ $d_i \le d_{i+1}$, $i = 1,2,3,\ldots,7$ ได้ทั้งหมด 8 แบบ ดังนี้

$$(\frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}) \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$(\frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}) \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$(\frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}) \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$(\frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}) \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$(\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}) \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$(\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}) \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$(\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}) \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$(\frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}) \qquad \ldots\ldots(8)$$

พิจารณาลำดับ (1)

$$(\frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_2-h_1)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_3-h_2)}{3}, \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}, \frac{kh_1}{3}, \frac{kh_1}{3})$$

เราจะได้ว่า

$$d_1 = d_2 = \frac{k(h_2-h_1)}{3}$$

$$d_3 = d_4 = \frac{k(h_3-h_2)}{3}$$

$$d_5 = \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}$$

$$d_6 = d_7 = \frac{kh_1}{3}$$

โดยทฤษฎีบท 1.3 และความจริงที่ว่า $\frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3} = 41$ เราสามารถคำนวณค่าของ h_1, h_2, h_3 ดังนี้

จาก $d_1 = 1$ ดังนั้น $\frac{k(h_2-h_1)}{3} = 1$ และ $d_3\text{-}1 \le d_1+d_2 = 3$ ดังนั้น $\frac{k(h_3-h_2)}{3} \le 3$ จากนั้นแทนความสัมพันธ์เหล่านี้ลงในสมการ $\frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3} = 41$ เราก็จะได้ว่า $h_1 = 12\times\frac{3}{k}$, $h_2 = 13\times\frac{3}{k}$ และ $h_3 = 16\times\frac{3}{k}$

ดังนั้นเราจะได้เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และความสูง $h_1 = 12$ หน่วย $h_2 = 13$ หน่วย และ $h_3 = 16$ หน่วย

พิจารณาลำดับ (8)

$$\left(\frac{k(h_3-h_2)}{3},\frac{k(h_3-h_2)}{3},\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3},\frac{kh_1}{3},\frac{kh_1}{3},\frac{k(h_2-h_1)}{3},\frac{k(h_2-h_1)}{3}\right)$$

เราจะได้ว่า

$$d_1 = d_2 = \frac{k(h_3-h_2)}{3}$$
$$d_3 = \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}$$
$$d_4 = d_5 = \frac{kh_1}{3}$$
$$d_6 = d_7 = \frac{k(h_2-h_1)}{3}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะสามารถคำนวณได้ว่า $h_1 = 4\times\frac{3}{k}$, $h_2 = 18\times\frac{3}{k}$ และ $h_3 = 19\times\frac{3}{k}$

ดังนั้นเราจะได้เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และความสูง $h_1 = 4$ หน่วย $h_2 = 18$ หน่วย และ $h_3 = 19$ หน่วย

และเมื่อพิจารณาลำดับ (2)-(6) เราจะพบข้อขัดแย้งดังตัวอย่างต่อไปนี้

เช่น พิจารณาลำดับ (3)

$$\left(\frac{k(h_3-h_2)}{3},\frac{k(h_3-h_2)}{3},\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3},\frac{k(h_2-h_1)}{3},\frac{k(h_2-h_1)}{3},\frac{kh_1}{3},\frac{kh_1}{3}\right)$$

เราจะได้ว่า

$$d_1 = d_2 = \frac{k(h_3-h_2)}{3}$$
$$d_3 = \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}$$
$$d_4 = d_5 = \frac{k(h_2-h_1)}{3}$$
$$d_6 = d_7 = \frac{kh_1}{3}$$

โดยทฤษฎีบท 1.3 และ $\frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3} = 41$ เนื่องจาก $d_1 = 1$ ดังนั้น $d_2 = 1$

นั่นคือ $\frac{k(h_3-h_2)}{3}=1$

เนื่องจาก $d_3 \le d_1 + d_2 +1 = 3$ นั่นคือ $\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3} \le 3$ หรือ $h_1 + h_2 \le h_3 + 3\times\frac{3}{k}$

เนื่องจาก $d_4 \le d_1 + d_2 + d_3 +1 = \frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}+3$ นั่นคือ $h_2 - h_1 \le h_1 + h_2 - h_3 + 3\times\frac{3}{k}$

เพราะฉะนั้น $h_3 - 2h_1 \le 3\times\frac{3}{k}$

เนื่องจาก $d_6 \le d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 +1$

ดังนั้น $\frac{kh_1}{3} \le 1+1+\frac{k(h_1+h_2-h_3)}{3}+\frac{2k(h_2-h_1)}{3}+1$

เพราะฉะนั้น $2h_1 + h_3 - 3h_2 \le 3\times\frac{3}{k}$

เนื่องจาก $h_3 - h_2 = \frac{3}{k}$ และ $h_1 + h_2 \le h_3 + 3\times\frac{3}{k}$ ทำให้เราได้ว่า ค่าของ $h_1 \le 4\times\frac{3}{k}$

เนื่องจาก $h_3 - 2h_1 \le 3$ และ $h_1 \le 4\times\frac{3}{k}$ เราจะได้ว่า $h_3 \le 11\times\frac{3}{k}$

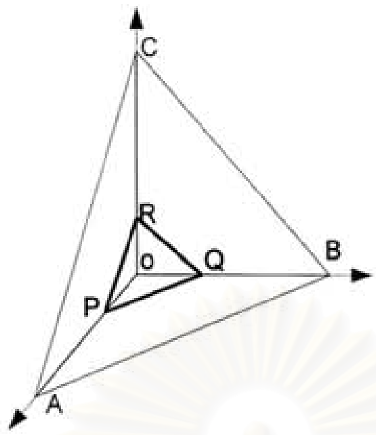
และเนื่องจาก $h_3 - h_2 = \frac{3}{k}$ ดังนั้น $h_2 \le 10\times\frac{3}{k}$

เนื่องจากว่า $\frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3} \le \max(\frac{kh_1}{3}) + \max(\frac{kh_2}{3}) + \max(\frac{kh_3}{3}) = 4 + 10 + 11 = 25$

จึงข้อขัดแย้งกับความจริงที่ว่า $\frac{k(h_1+h_2+h_3)}{3}=41$

ดังนั้นโดยขั้นตอนการพิสูจน์ทั้ง 3 ขั้นตอน ทำให้เราได้เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมมีปริมาตรสูงสุดคือ 41 ลูกบาศก์หน่วย และ ยิ่งไปกว่าเราได้เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วยปริมาตร 41 ลูกบาศก์หน่วย ได้ 2 แบบ คือแบบที่มีความสูงของ h_1, h_2, h_3 เป็น 12,13,16 ตามลำดับ และแบบที่มีความสูงของ h_1, h_2, h_3 เป็น 4,18,19 ตามลำดับ □

พิจารณาภาชนะ M ที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม PQR โดยที่ด้านข้างไม่ตั้งฉากกับฐาน ดังรูปที่ 2.3



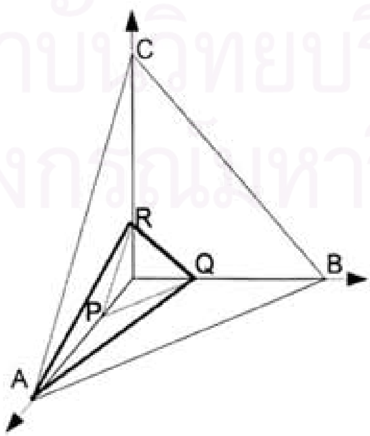
รูปที่ 2.3

ให้ T(a,b,c) แทน รูปทรงสี่หน้า OABC เมื่อ จุด O จุดกำเนิด จุด $A=(a\sqrt[3]{6},0,0)$
จุด $B=(0,b\sqrt[3]{6},0)$ และจุด $C=(0,0,c\sqrt[3]{6})$ ตามลำดับ
และให้ จุด $P=(\sqrt[3]{6},0,0)$ จุด $Q=(0,\sqrt[3]{6},0)$ และจุด $R=(0,0,\sqrt[3]{6})$

ทฤษฎีบท 2.4 ภาชนะ M สามารถตวงของเหลวได้ปริมาตรดังต่อไปนี้
$a-1,\ b-1,\ c-1,\ (a\times b)-1, (a\times c)-1\ , (b\times c)-1\ , (a\times b\times c)-1$

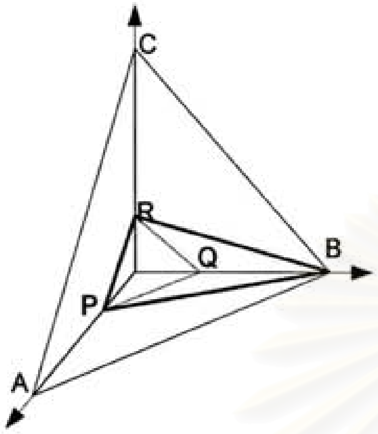
พิสูจน์ ก่อนอื่น สังเกตว่า T(1,1,1) คือ รูปทรงสี่หน้า OPQR ดังนั้น ปริมาตรของ T(1,1,1) เท่ากับ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{6}=1$ ลูกบาศก์หน่วย ยิ่งกว่านั้น เราสามารถคำนวณปริมาตรของ T(a,b,c) เท่ากับ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\sqrt[3]{6}\times b\sqrt[3]{6}\times c\sqrt[3]{6}=a\times b\times c$ ลูกบาศก์หน่วย

พิจารณารูปการตวงของเหลว พร้อมทั้งการคำนวณปริมาตรของเหลวจากรูปต่อไปนี้

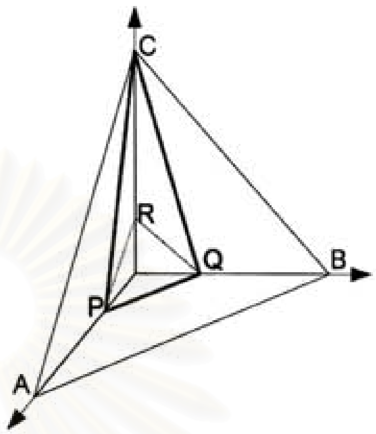


รูปที่ 2.4

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.4 เท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า PQRA
ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า PQRA เท่ากับ ปริมาตรของ $T(a,1,1)$ – ปริมาตรของ $T(1,1,1)$ = $a-1$ ลูกบาศก์หน่วย

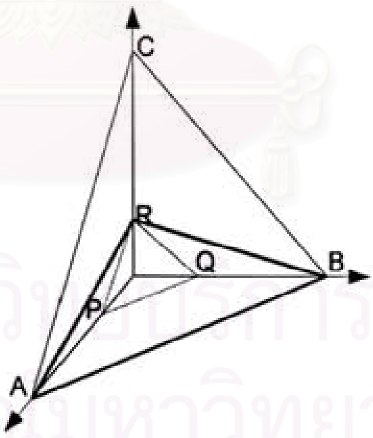


รูปที่ 2.5



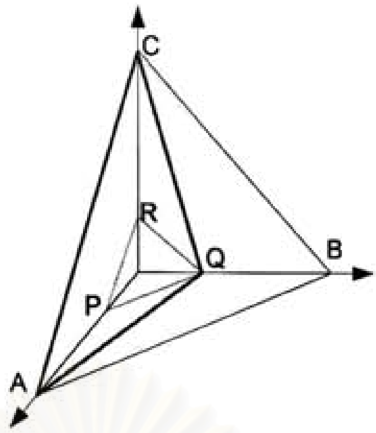
รูปที่ 2.6

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.5 เท่ากับ ปริมาตรของ $T(1,b,1)$ – ปริมาตรของ $T(1,1,1)$ = $b-1$ ลูกบาศก์หน่วย และ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.6 เท่ากับ ปริมาตรของ $T(1,1,c)$ – ปริมาตรของ $T(1,1,1)$ = $c-1$ ลูกบาศก์หน่วย



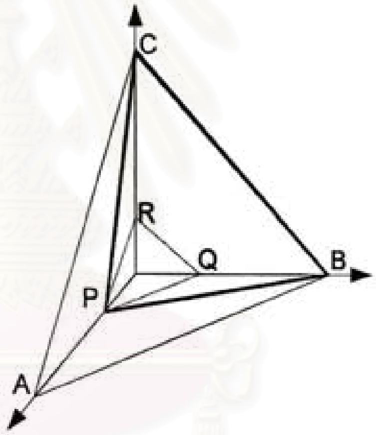
รูปที่ 2.7

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.7 เท่ากับ ปริมาตรของ $T(a,b,1)$ – ปริมาตรของ $T(1,1,1)$
$=(a\times b)-1$ ลูกบาศก์หน่วย



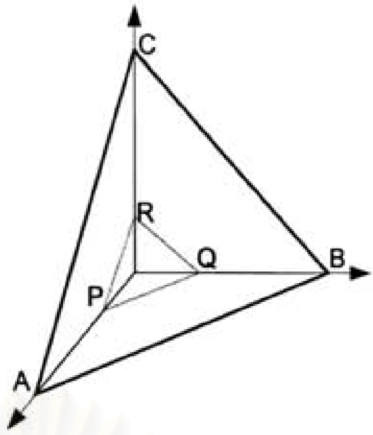
รูปที่ 2.8

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.8 เท่ากับ ปริมาตรของ $T(a,1,c)$ – ปริมาตรของ $T(1,1,1)$ $= (a \times c) - 1$ ลูกบาศก์หน่วย



รูปที่ 2.9

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.9 เท่ากับ ปริมาตรของ $T(1,b,c)$ – ปริมาตรของ $T(1,1,1)$ $= (b \times c) - 1$ ลูกบาศก์หน่วย



รูปที่ 2.10

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 2.10 เท่ากับ ปริมาตรของ T(a,b,c) – ปริมาตรของ T(1,1,1)
$=(a\times b\times c)-1$ ลูกบาศก์หน่วย □

ทฤษฎีบท 2.5 ปริมาตรสูงสุดของเครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมโดยที่ด้านข้างไม่ตั้งฉากกับฐาน คือ 127 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ จาก ทฤษฎีบท 2.2 ภาชนะ M สามารถตวงของเหลวปริมาตร $a-1$, $b-1$, $c-1$, $(a\times b)-1, (a\times c)-1$, $(b\times c)-1$, $(a\times b\times c)-1$ ลูกบาศก์หน่วย

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติให้ $a\le b\le c$ ทำให้เกิดลำดับไม่ลดของปริมาตร ดังนี้

$(a-1,b-1,c-1,(a\times b)-1,(a\times c)-1,(b\times c)-1,(a\times b\times c)-1)$

สร้างลำดับ $\mathcal{T}=(a-1,b-a,c-b,(a\times b)-c,a\times(c-b),c\times(b-a),(a\times b\times c)-(b\times c))$

ให้ C คือ เซตของจำนวนเต็ม ที่สามารถเขียนเป็น ผลรวมเชิงเส้นของเทอมที่ต่างกันใน ลำดับ $\mathcal{T}$ ดังนั้น $|C|\le 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2-1=127$ นั่นคือ ปริมาตรสูงสุดที่ ภาชนะ M ใช้ตวงของเหลว ไม่เกิน 127 ลูกบาศก์หน่วย

และ เมื่อเราแทนค่า $a=2$, $b=4$ และ $c=16$ ในทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า ภาชนะ M สามารถตวงของเหลวปริมาตร 1 , 3 , 7 , 15 , 31 , 63 , 127 ลูกบาศก์หน่วย ตามลำดับ

พิจารณา ลำดับ $\Omega=(1\ ,3\ ,7\ ,15\ ,31\ ,63\ ,127)$ สร้างลำดับ $\mathcal{D}=(1\ ,2\ ,4\ ,8\ ,16\ ,32,\ 64)$ โดยใช้ ทฤษฎีบท 1.3 ทำให้ $\Omega=(1\ ,3\ ,7\ ,15\ ,31\ ,63\ ,127)$ เป็นลำดับก่อกำเนิด

ดังนั้น ภาชนะ M เป็นเครื่องตวงสากลที่สามารถตวงของเหลวได้ทุกค่าที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ลูกบาศก์หน่วย จนถึง 127 ลูกบาศก์หน่วย □

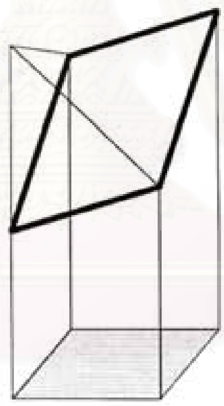
บทที่ 3

เครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในบทนี้ เราจะกล่าวถึงเฉพาะภาชนะตวงวัดที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและด้านข้างตั้งฉากกับฐานเท่านั้น จากบทที่ 2 ปริมาตรสูงสุดของเครื่องตวงสากล คือ ความจุเต็มที่ซึ่งเครื่องตวงสามารถใช้ตวงได้ เนื่องจากมีระนาบซึ่งผ่านจุดสามจุดใด ๆ เสมอ ทำให้ระนาบที่เกิดจากของเหลวผ่านจุดมุมบนของเครื่องตวงทั้งสามจุด กรณีมีจุดมุมบนมากกว่าสามจุดและความสูงของเครื่องตวงไม่เท่ากันเราไม่อาจทำให้ระนาบที่เกิดจากของเหลวผ่านจุดเหล่านั้นได้ทั้งหมด จำเป็นต้องอธิบายความหมายของคำว่า ความจุเต็มที่ของภาชนะ จากนั้นแนะนำภาชนะที่เราจะศึกษา และทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

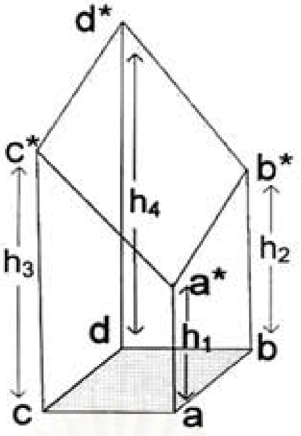
*ความจุเต็มที่ของภาชนะ*M หมายถึง ปริมาตรสูงสุดที่เราสามารถใช้ภาชนะMตวงของเหลวได้ ทั้งนี้ระนาบที่เกิดจากของเหลวไม่จำเป็นต้องผ่านจุดมุมบนทั้งหมดของภาชนะ M

<u>ตัวอย่าง</u> แสดงภาพการตวงของเหลวได้ความจุเต็มที่ของภาชนะตวงวัด



รูปที่ 3.1

สำหรับภาชนะที่เราจะศึกษาในบทนี้ คือ ภาชนะตวงวัดฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ฐาน 6 ตารางหน่วยและความสูง h_1, h_2, h_3, h_4 หน่วยโดยที่ $h_1 \le h_2 \le h_3 \le h_4$ และด้านข้างตั้งฉากกับฐานเช่นเดียวกันกับบทที่ 2 เราจะเริ่มการคำนวณปริมาตรต่าง ๆที่ภาชนะนี้สามารถใช้ตวงของเหลวได้ โดยก่อนอื่นเรากำกับจุดมุมล่าง-บนของสันของภาชนะนี้ ด้วย $(a,a^*),(b,b^*),(c,c^*)$ และ (d,d^*) ตามลำดับ โดยความสูงระหว่าง a กับ a^* คือ h_1 ระหว่าง b กับ b^* คือ h_2 ระหว่าง c กับ c^* คือ h_3 และระหว่าง d กับ d^* คือ h_4 ตามลำดับ (ดังรูป 3.2)

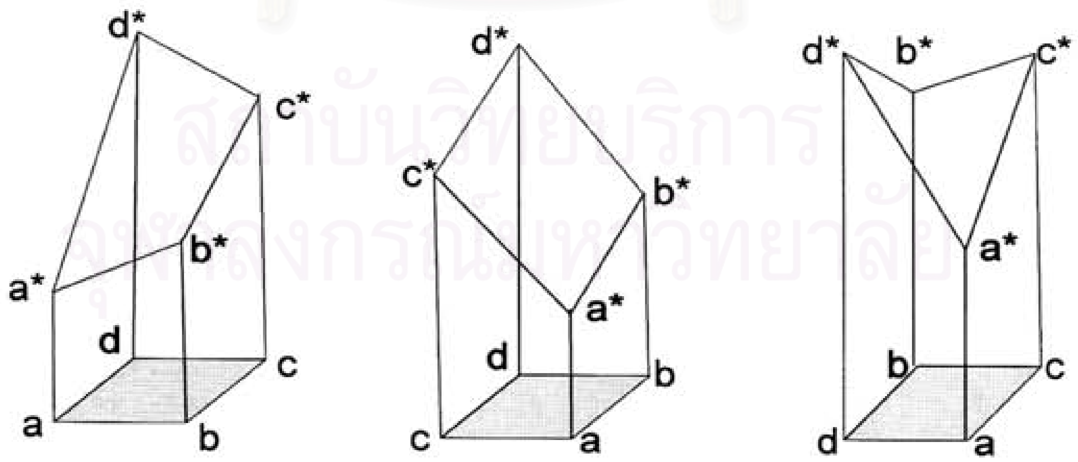


(รูปที่ 3.2)

ข้อสังเกต 3.1 ถ้าเราเขียนความสูงเรียงสับเปลี่ยนกันโดยเริ่มจาก h_1 จะได้ว่า มีภาชนะอย่างมากไม่เกิน 6 แบบ คือ
(h_1,h_2,h_3,h_4) , (h_1,h_2,h_4,h_3) , (h_1,h_3,h_2,h_4) , (h_1,h_3,h_4,h_2) , (h_1,h_4,h_2,h_3)
และ (h_1,h_4,h_3,h_2) เมื่อเราสังเกตให้ดี จะพบว่า คู่ของ 4-สิ่งอันดับต่อไปนี้ให้รูปแบบของภาชนะเหมือนกัน นั่นคือ

$$(h_1,h_2,h_3,h_4) \equiv (h_1,h_4,h_3,h_2)$$
$$(h_1,h_2,h_4,h_3) \equiv (h_1,h_3,h_4,h_2)$$
และ
$$(h_1,h_3,h_2,h_4) \equiv (h_1,h_4,h_2,h_3)$$

ซึ่งเราจะเรียกภาชนะที่มีลำดับของความสูงเป็น (h_1,h_2,h_3,h_4) , (h_1,h_2,h_4,h_3) และ (h_1,h_3,h_2,h_4) ว่า ภาชนะตวงวัดแบบที่ 1 ภาชนะตวงวัดแบบที่ 2 และ ภาชนะตวงวัดแบบที่ 3 ตามลำดับ ดังรูป 3.3 แสดงรูปภาชนะตวงวัดที่มีเป็นรูปสี่เหลี่ยมทั้ง 3 แบบ

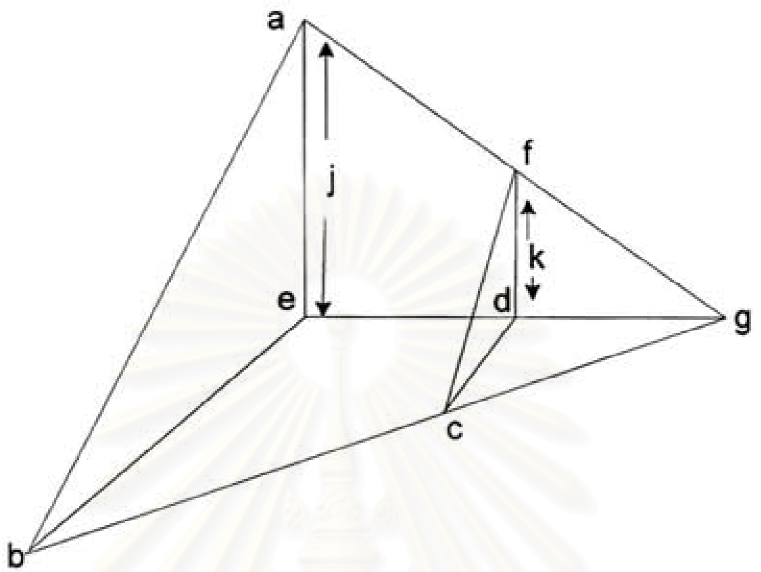


ภาชนะตวงวัดแบบที่ 1 ภาชนะตวงวัดแบบที่ 2 ภาชนะตวงวัดแบบที่ 3

รูปที่ 3.3

□

ข้อสังเกต 3.2 พิจารณาการคำนวณปริมาตร $V(ebcdfa)$ ของรูปทรงพีระมิดตัด $ebcdfa$ ของพีระมิด $abge$ ต่อไปนี้



เราจะแสดงว่า $V(ebcdfa) = V(abge) - V(fcgd) = \left[1-\left(\dfrac{k}{j}\right)^3\right] \times V(abge)$

เนื่องจาก $V(abge) - V(fcgd) = \left[1-\left(\dfrac{V(fcdg)}{V(abge)}\right)\right] \times V(abge)$

เราเหลือจะแสดงว่า $\dfrac{V(fcgd)}{V(abge)} = \left(\dfrac{k}{j}\right)^3$

เนื่องจาก $V(abge) = \dfrac{1}{3} \times (\text{พื้นที่ฐาน } ebg) \times j$ และ $V(fcgd) = \dfrac{1}{3} \times (\text{พื้นที่ฐาน } dcg) \times k$

พื้นที่ฐาน $ebg = \dfrac{1}{2} \times \overline{eb} \times \overline{eg}$ และ พื้นที่ฐาน $dcg = \dfrac{1}{2} \times \overline{dc} \times \overline{dg}$

เพราะว่า สามเหลี่ยม abe คล้ายกับสามเหลี่ยม fcd และ

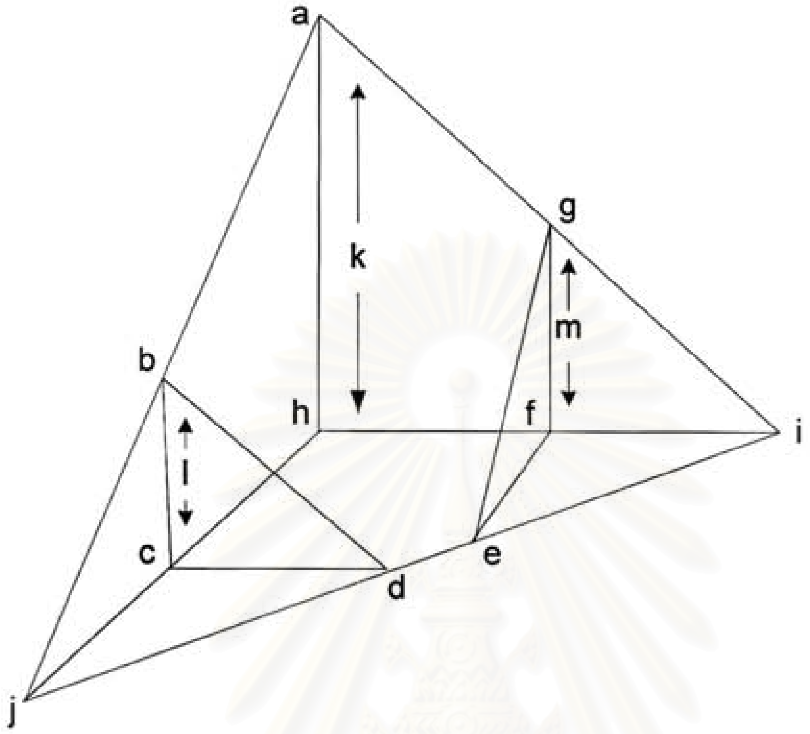
สามเหลี่ยม aeg คล้ายกับสามเหลี่ยม fdg

จะได้ $\dfrac{\overline{dc}}{\overline{eb}} = \dfrac{\overline{fd}}{\overline{ae}} = \dfrac{k}{j}$ และ $\dfrac{\overline{dg}}{\overline{eg}} = \dfrac{\overline{fd}}{\overline{ae}} = \dfrac{k}{j}$

ทำให้ $\dfrac{V(fcgd)}{V(abge)} = \dfrac{\overline{dc}}{\overline{eb}} \times \dfrac{\overline{dg}}{\overline{eg}} \times \dfrac{k}{j} = \dfrac{k}{j} \times \dfrac{k}{j} \times \dfrac{k}{j} = \left(\dfrac{k}{j}\right)^3$

ดังนั้น $V(ebcdfa) = \left[1-\left(\dfrac{k}{j}\right)^3\right] \times V(abge)$ ตามต้องการ □

ข้อสังเกต 3.3 พิจารณาการคำนวณปริมาตร $V(abcdefgh)$ ของรูปทรงพีระมิดตัด 2 ด้าน *abcdefgh* ของพีระมิด *ajih* ต่อไปนี้



จากรูปเราจะเห็นว่า $V(abcdefgh) = V(ajih) - (V(bjdc) + V(gief))$

เนื่องจาก $V(ajih) - (V(bjdc) + V(gief)) = \left\{1 - \left[\dfrac{V(bjdc)}{V(ajih)} + \dfrac{V(gief)}{V(ajih)}\right]\right\} \times V(ajih)$

และเราสามารถแสดงในทำนองเดียวกับข้อสังเกตที่ 3.2 ได้ว่า

$$\frac{V(bijd)}{V(ajih)} = \left(\frac{l}{k}\right)^3 \text{ และ } \frac{V(gjef)}{V(aijh)} = \left(\frac{m}{k}\right)^3$$

$$V(ajih) - (V(bjdc) + V(gief)) = \left\{1 - \left[\left(\frac{l}{k}\right)^3 + \left(\frac{m}{k}\right)^3\right]\right\} \times V(ajih)$$

นั่นคือ $V(abcdefgh) = \left\{1 - \left[\left(\frac{l}{k}\right)^3 + \left(\frac{m}{k}\right)^3\right]\right\} \times V(ajih)$ □

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ M คือภาชนะตวงวัดที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและพื้นที่ฐานเท่ากับ 6 ตารางหน่วย ความสูงเท่ากับ h_1, h_2, h_3, h_4 หน่วย โดยที่ $h_1 + h_4 \geq h_2 + h_3$ และด้านข้างตั้งฉากกับฐาน สามารถใช้ภาชนะ M ตวงวัดปริมาตรได้อย่างน้อย

h_1, $3h_1$, $6h_1$, h_2, $3h_2$, $3(h_1+h_2)$, h_3, $3h_3$, $3(h_1+h_3)$, $3(h_2+h_3)$, h_4 ลูกบาศก์หน่วย

เราจะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เพราะการคำนวณสามารถทำได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.6 ซึ่งได้แสดงไว้อย่างละเอียดโดยจะได้กล่าวต่อไป

ในกรณีนี้เราได้อนุโลมเงื่อนไขที่ไม่มีความสำคัญบางกรณี นั่นคือ กรณีที่ใช้ภาชนะตวงวัดตวงของเหลวปริมาตร $6h_1$ ลูกบาศก์หน่วย จะเห็นว่า ระนาบของของเหลวไม่ผ่านจุดมุมสามจุด เพราะเราตั้งภาชนะตวงวัดตรง ๆ ระนาบนี้จะผ่านเฉพาะ a^* เท่านั้น ซึ่งในบทที่ 2 เรามิได้กล่าวถึง แต่ในกรณีนี้ ค่าต่าง ๆ ที่ได้จากการคำนวณมีบางค่าห่างกันเกินไป ทำให้ผลที่ได้ไม่เป็นที่น่าพอใจ เราจึงเพิ่มการตวงนี้เช่นนี้ด้วย(เฉพาะกรณีที่ภาชนะตวงวัดมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น)

ทฤษฎีบท 3.5 [1] มีเครื่องตวงสากล M ที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าความจุอย่างน้อย 691 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ ทีมงานวิจัยของ Professor Jin Akiyama โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณ ค่าของ h_1, h_2, h_3, h_4 โดยที่ $1 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_4 \leq 2^{11}$ เราได้ค่าความสูง 2 ชุดที่ให้ปริมาตรสูงสุดดังนี้

ชุดที่ 1 ได้ว่า $h_1 = 1$ หน่วย $h_2 = 32$ หน่วย $h_3 = 83$ หน่วย $h_4 = 691$ หน่วย และ

ชุดที่ 2 ได้ว่า $h_1 = 2$ หน่วย $h_2 = 64$ หน่วย $h_3 = 166$ หน่วย $h_4 = 691$ หน่วย

เมื่อแทนค่าความสูงของชุดที่ 1 เราคำนวณปริมาตรต่าง ๆ ในทฤษฎีบท 3.4 ได้ดังนี้

1 , 3 , 6 , 32 , 96 , 99 , 83 , 249 , 252 , 345 , 691 ตามลำดับ

พิจารณาลำดับไม่ลด $\Omega = (1, 3, 6, 32, 83, 96, 99, 249, 252, 345, 691)$

จะได้ ลำดับ $\mathcal{D}$ ที่สมนัยกับ Ω คือ

$\mathcal{D} = (0, 1, 2, 3, 3, 3, 13, 26, 51, 93, 150, 346)$

โดยใช้ทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่าลำดับ $\mathcal{D}$ นี้ เป็นลำดับก่อกำเนิด

เมื่อแทนค่าความสูงของชุดที่ 2 ในทฤษฎีบท 3.4 จะได้

2 , 6 , 12 , 64 , 192 , 198 , 166 , 498 , 504 , 690 , 691 ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาลำดับไม่ลด $\Omega = (2, 6, 12, 64, 166, 192, 198, 498, 504, 690, 691)$ เราได้ลำดับ $\mathcal{D} = (0, 1, 2, 4, 6, 6, 6, 26, 52, 102, 186, 300)$ และใช้ทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่าลำดับ Ω นี้ เป็นลำดับก่อกำเนิด

โดยนิยามดังนั้น เราได้เครื่องตวงสากล M ที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าความจุ 691 ลูกบาศก์หน่วย □

ทฤษฎีบท 3.6 [2] ภาชนะตวงวัดที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พื้นที่ฐาน 6 ตารางหน่วย ความสูงเป็น h_1, h_2, h_3, h_4 หน่วย โดยที่ $h_1 \le h_2 \le h_3 \le h_4$ และด้านข้างตั้งฉากกับฐาน สามารถใช้ตวงวัดปริมาตรได้ดังต่อไปนี้

(1) ภาชนะตวงวัดแบบที่ 1 เราจะแบ่งเป็นสองกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $h_4 > h_1 + h_3$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3(h_1 + h_3), v_{23}, v_{34}, v_{14}, v_{12}, v_{413}$

กรณีที่ 2 $h_4 \le h_1 + h_3$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3h_4, 3(h_1 + h_3), v_{23}, v_{34}, v_{14}, v_{12}$

(2) ภาชนะตวงวัดแบบที่ 2 เราจะแบ่งเป็นสามกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $h_4 > h_2 + h_3$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3(h_2 + h_3), v_{13}, v_{12}, v_{24}, v_{34}, v_{432}$

กรณีที่ 2 $h_2 + h_3 - h_1 < h_4 \le h_2 + h_3$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3h_4, 3(h_2 + h_3), v_{13}, v_{12}, v_{24}, v_{34}$

กรณีที่ 3 $h_4 \le h_2 + h_3 - h_1$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3h_4, 3(h_1 + h_4), v_{13}, v_{12}, v_{24}, v_{34}$

(3) ภาชนะตวงวัดแบบที่ 3 เราจะแบ่งเป็นสามกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $h_3 > h_1 + h_2$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3(h_1 + h_2), v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24}, v_{412}, v_{312}$

กรณีที่ 2 $h_3 \le h_1 + h_2 < h_4$

$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3(h_1 + h_2), v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24}, v_{412}$

กรณีที่ 3 $h_4 \le h_1 + h_2$

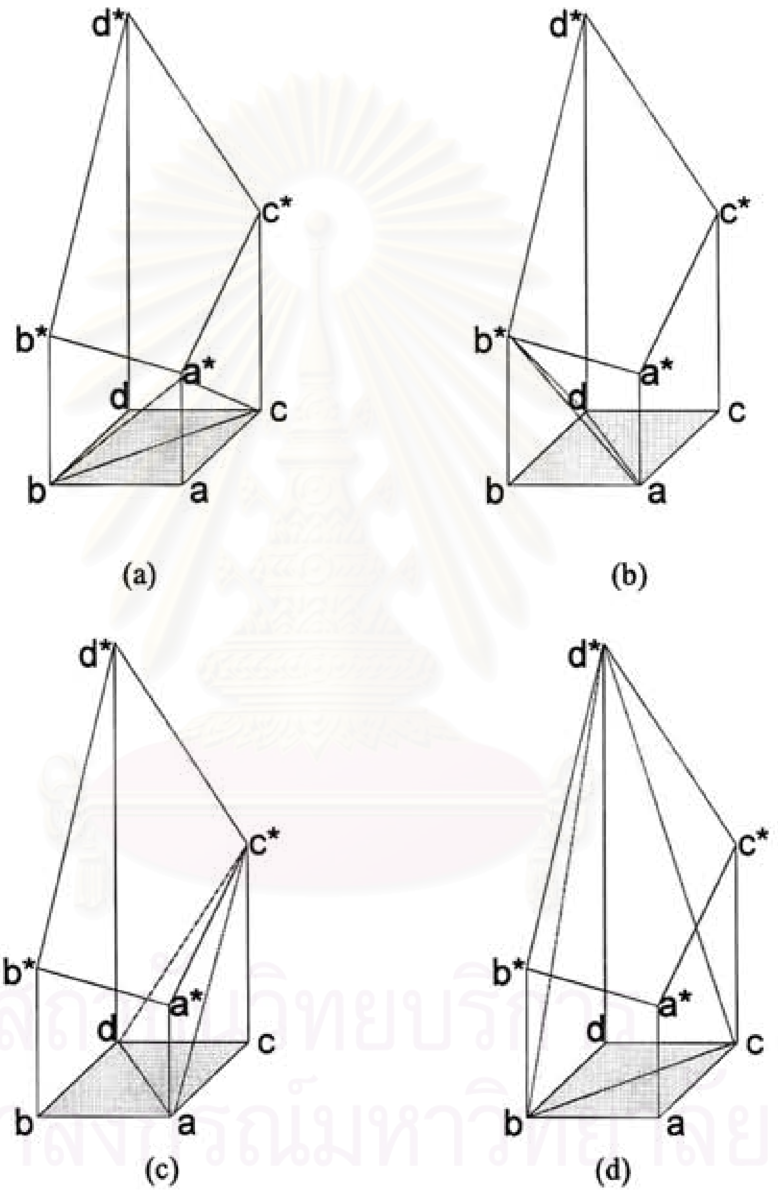
$h_1, h_2, h_3, h_4, 3h_1, 3h_2, 3h_3, 3h_4, 3(h_1 + h_2), v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24}$

โดยที่ $v_{ij} = h_i + h_j + \dfrac{h_i^2}{h_j}$ และ $v_{ijk} = \dfrac{h_i^3 - h_j^3 - h_k^3}{(h_i - h_j)(h_i - h_k)}$

พิสูจน์ เราแสดงการคำนวณอย่างละเอียดเฉพาะกรณีที่ 2 เท่านั้น เนื่องจากในกรณีอื่น ๆ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน แต่จะแสดงรูปภาพของการตวงของเหลวด้วยภาชนะแต่ละแบบให้ดูทุกกรณี

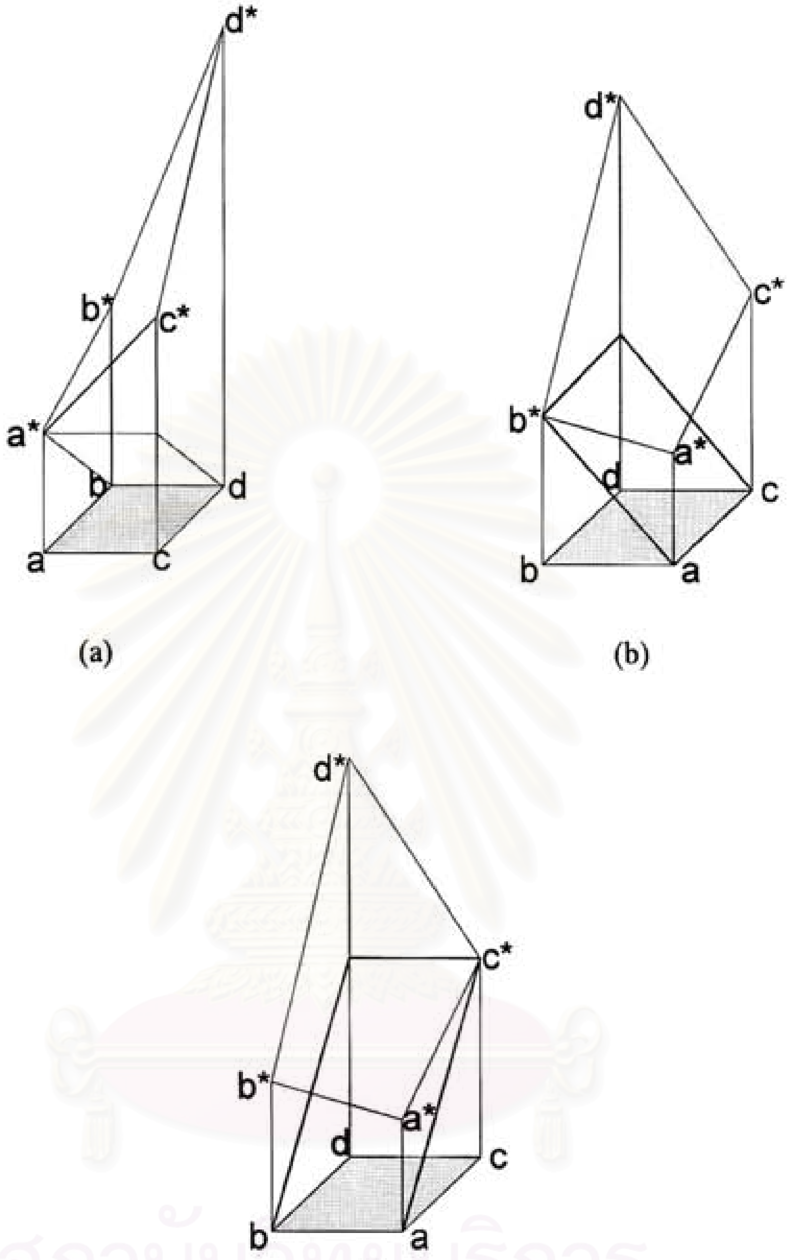
<u>ภาชนะตวงวัดแบบที่ 2</u>

<u>กรณีที่ 1</u> $h_4 > h_2 + h_3$ พิจารณารูปต่อไปนี้



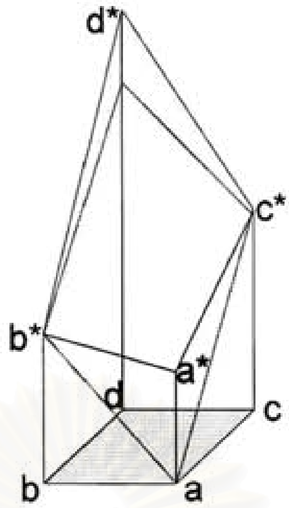
รูปที่ 3.4

จากรูป เนื่องจากพื้นที่ฐานของภาชนะนี้เท่ากับ 6 ตารางหน่วย เราจะเห็นได้ทันทีว่าปริมาตรของเหลวใน รูปที่ 3.4(a) เท่ากับ h_1 ลูกบาศก์หน่วย รูปที่ 3.4(b) มีปริมาตรเท่ากับ h_2 ลูกบาศก์หน่วย รูปที่ 3.4(c) มีปริมาตรเท่ากับ h_3 ลูกบาศก์หน่วย และรูปที่ 3.4(d) มีปริมาตรเท่ากับ h_4 ลูกบาศก์หน่วย



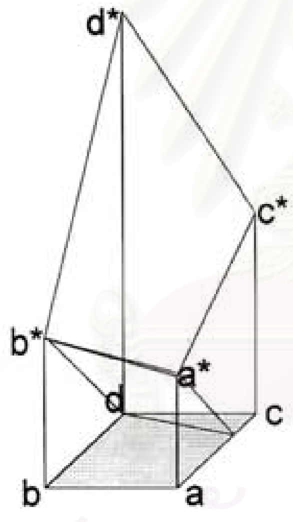
รูปที่ 3.5

ด้วยเหตุผลที่ว่าพื้นที่ฐานของภาชนะนี้เท่ากับ 6 ลูกบาศก์หน่วย และสูตรการคำนวณปริมาตรของพีระมิด เราจะเห็นได้ทันทีว่า รูปที่ 3.5(a) มีปริมาตรเท่ากับ $3h_1$ ลูกบาศก์หน่วย รูปที่ 3.5(b) มีปริมาตรเท่ากับ $3h_2$ ลูกบาศก์หน่วย รูปที่ 3.5(c) มีปริมาตรเท่ากับ $3h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

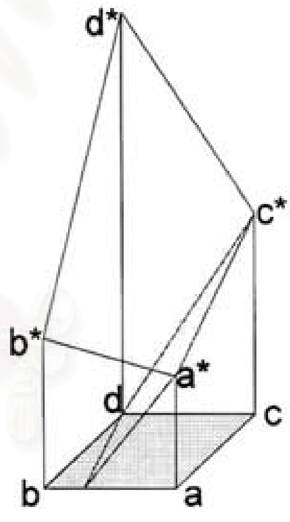


รูปที่ 3.6

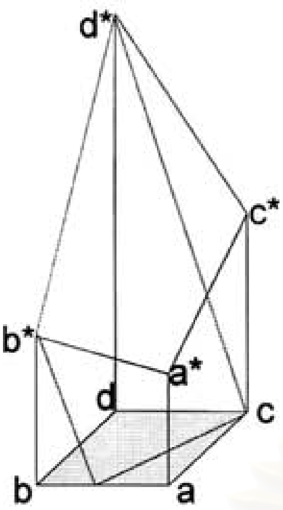
จะเห็นว่ารูปที่เกิดคือ ส่วนครึ่งของปริซึมที่มีพื้นที่ฐาน 6 ตารางหน่วย และมีความสูง $h_2 + h_3$ หน่วย ดังนั้น เราคำนวณปริมาตรได้เท่ากับ $3(h_2 + h_3)$ ลูกบาศก์หน่วย



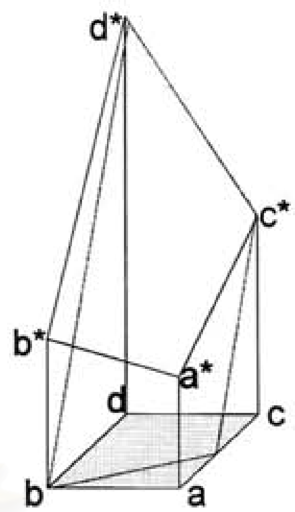
(a)



(b)



(c)

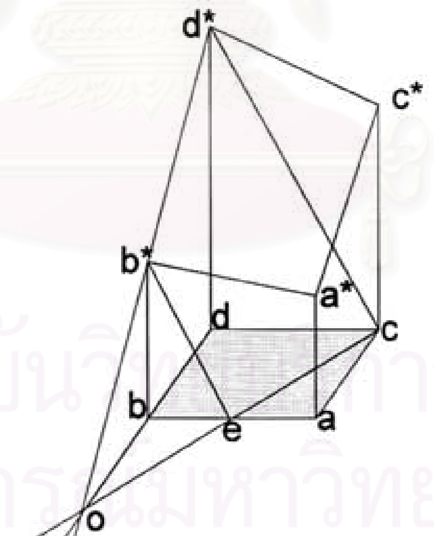


(d)

รูปที่ 3.7

การตวงทั้ง 4 แบบนี้ จะเห็นว่าของเหลวที่เราตวงไม่คลุมฐานของภาชนะตวง จึงทำให้การคำนวณปริมาตรยุ่งยากกว่าเหมือนแบบอื่นที่ผ่านมา พิจารณารูปที่ 3.7(c)

ต่อด้าน d*b* ด้าน bd และด้าน ec พบกันที่จุด o ดังรูป



โดยใช้ข้อสังเกต 3.2 เนื่องจากความยาวด้านของฐานเท่ากับ $\sqrt{6}$ หน่วย จะได้ว่า

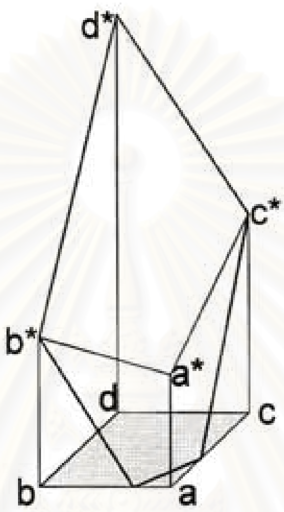
$$\frac{\overline{od}}{h_4} = \frac{\sqrt{6}}{h_4 - h_2} \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \overline{od} = \frac{h_4}{h_4 - h_2}\sqrt{6}$$

จะได้ ปริมาตรของเหลวเท่ากับ $\left[1 - \left(\frac{h_2}{h_4}\right)^3\right] \times V(ocdd^*)$

และ $V(ocdd^*) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{h_4}{h_4 - h_2} \sqrt{6} \times h_4 = \frac{h_4^2}{h_4 - h_2}$

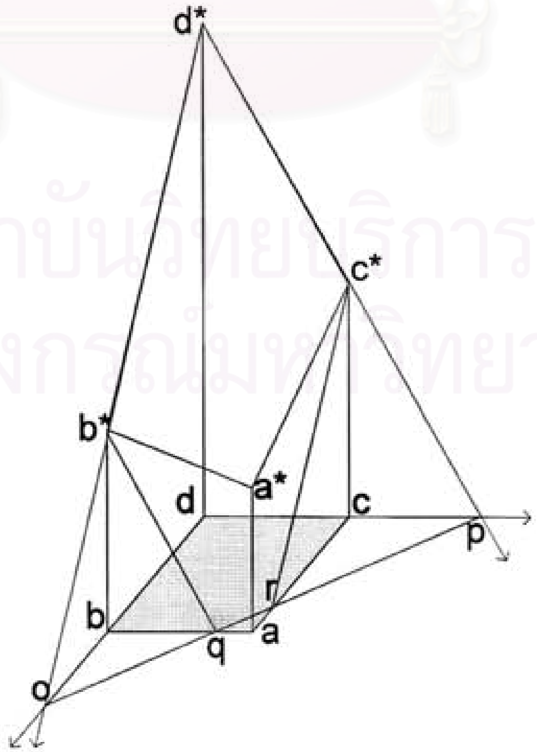
ดังนั้นปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.7(c) เท่ากับ $\left[1 - \left(\frac{h_2}{h_4}\right)^3\right] \times \frac{h_4^2}{h_4 - h_2} = h_2 + h_4 + \frac{h_2^2}{h_4}$

ในทำนองเดียวกันเราก็จะสามารถคำนวณปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.7(a) รูปที่ 3.7(b) และ รูปที่ 3.7(d) ได้เท่ากับ v_{13} ลูกบาศก์หน่วย v_{12} ลูกบาศก์หน่วย และ v_{34} ลูกบาศก์หน่วย ตามลำดับ



รูปที่ 3.8

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.8 สามารถคำนวณได้โดยการต่อด้าน b^*d^* ด้าน db ด้าน d^*c^* และด้าน dc พบกันที่จุด o และ p ตามลำดับ



จากรูป และข้อสังเกต 3.3 จะได้ปริมาตรของเหลวเท่ากับ $\left\{1-\left[\left(\frac{h_2}{h_4}\right)^3+\left(\frac{h_3}{h_4}\right)^3\right]\right\}\times V(opdd^*)$

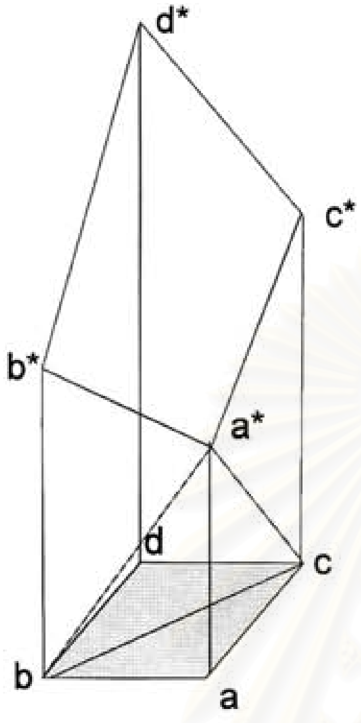
และเนื่องจาก $\frac{\overline{od}}{h_4}=\frac{\sqrt{6}}{h_4-h_2}$ และ $\frac{\overline{pd}}{h_4}=\frac{\sqrt{6}}{h_4-h_3}$ จะได้ว่า

$$V(opdd^*)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\overline{od}\times\overline{pd}\times h_4=\frac{1}{6}\times\frac{h_4}{h_4-h_2}\sqrt{6}\times\frac{h_4}{h_4-h_3}\sqrt{6}=\frac{h_4^3}{(h_4-h_2)(h_4-h_3)}$$

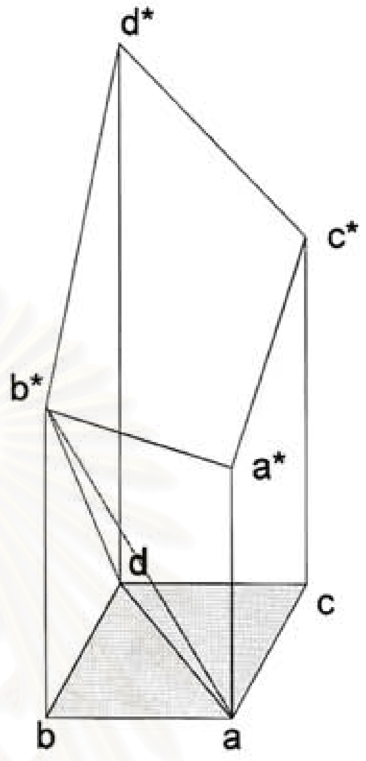
ดังนั้นปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.8 เท่ากับ $\left\{1-\left[\left(\frac{h_2}{h_4}\right)^3+\left(\frac{h_3}{h_4}\right)^3\right]\right\}\times\frac{h_4^3}{(h_4-h_2)(h_4-h_3)}$

จัดรูปใหม่ จะได้ $\left\{1-\left[\left(\frac{h_2}{h_4}\right)^3+\left(\frac{h_3}{h_4}\right)^3\right]\right\}\times\frac{h_4^3}{(h_4-h_2)(h_4-h_3)}=\frac{h_4^3-h_2^3-h_3^3}{(h_4-h_2)(h_4-h_3)}$

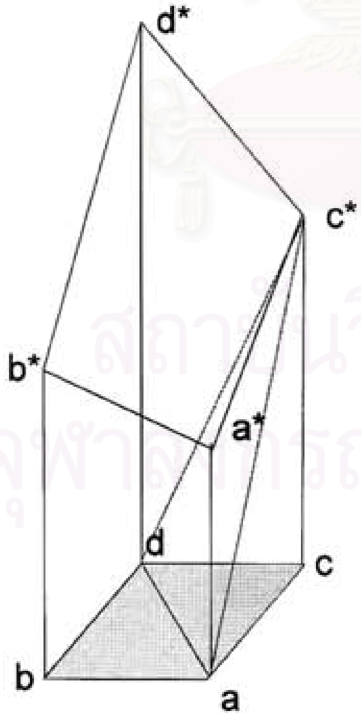
<u>กรณีที่</u> 2 $h_2 + h_3 - h_1 < h_4 \le h_2 + h_3$ พิจารณารูปต่อไปนี้



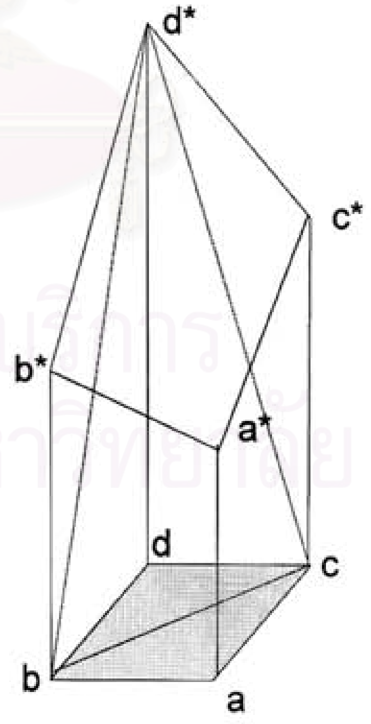
(a)



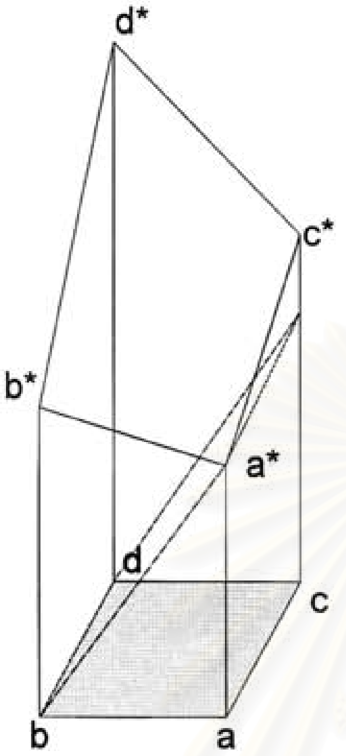
(b)



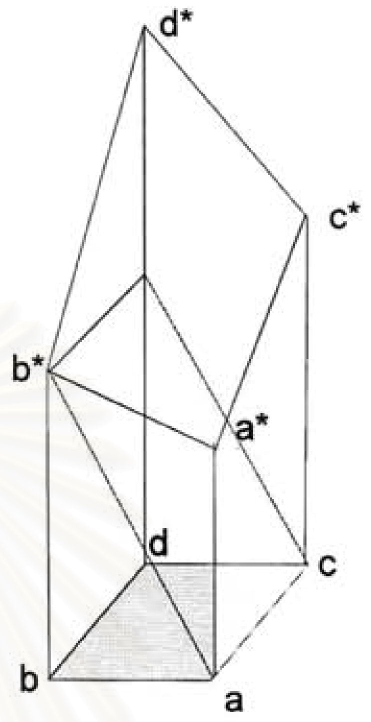
(c)



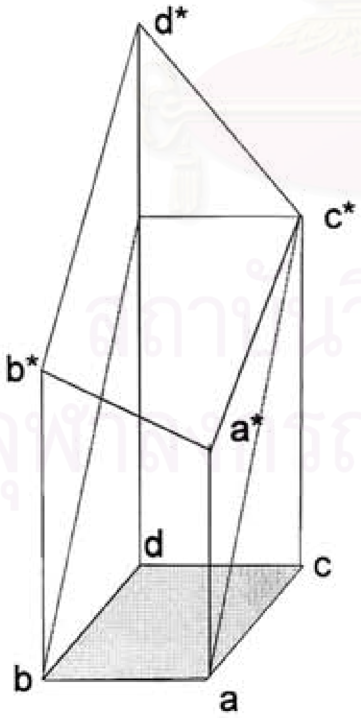
(d)



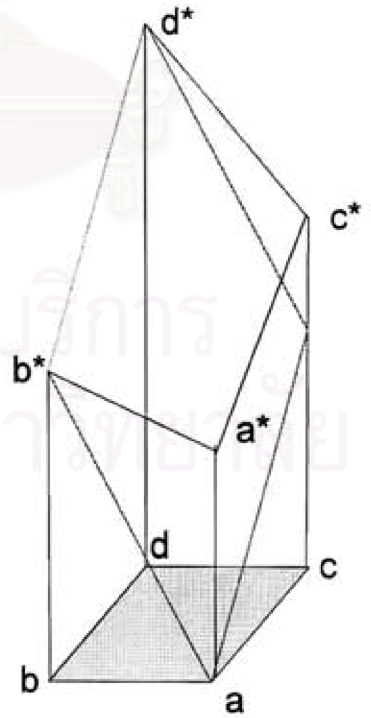
(e)



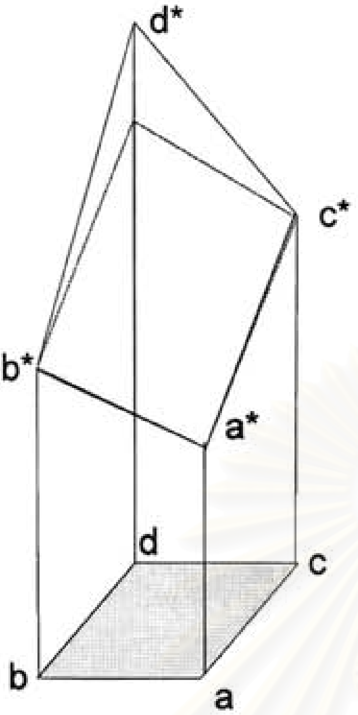
(f)



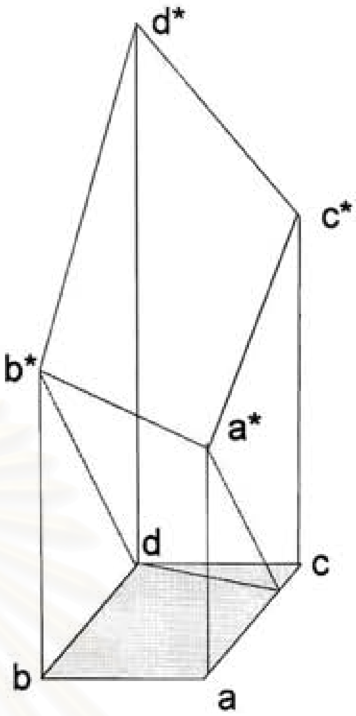
(g)



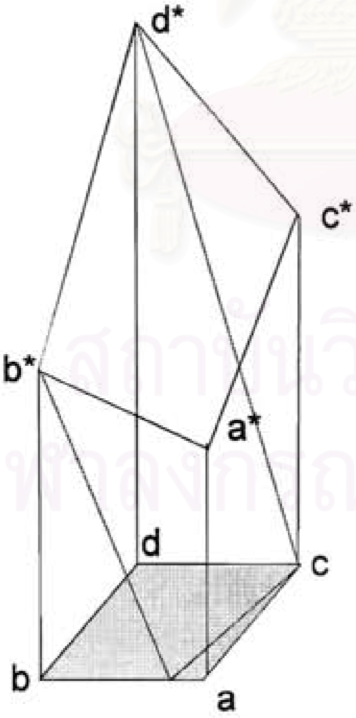
(h)



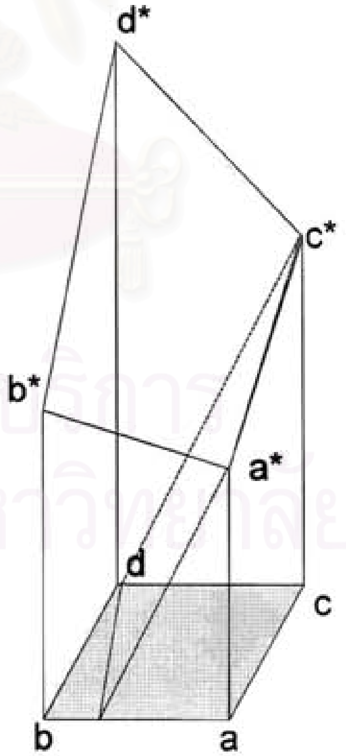
(i)



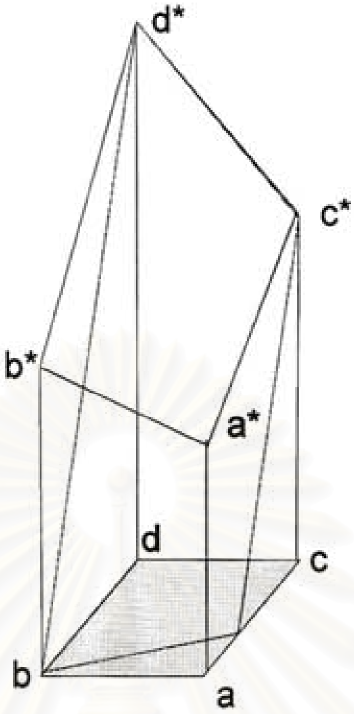
(j)



(m)



(k)



(n)

รูปที่ 3.9 แสดงการตวงของเหลวเมื่อ $h_2 + h_3 - h_1 < h_4 \le h_2 + h_3$

เราสามารถคำนวณปริมาตรของเหลวได้ด้วยวิธีการเดียวกับในกรณีที่ 1 จะได้ว่า

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(a) เท่ากับ h_1 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(b) เท่ากับ h_2 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(c) เท่ากับ h_3 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(d) เท่ากับ h_4 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(e) เท่ากับ $3h_1$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(f) เท่ากับ $3h_2$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(g) เท่ากับ $3h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(h) เท่ากับ $3h_4$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(i) เท่ากับ $3(h_2 + h_3)$ ลูกบาศก์หน่วย

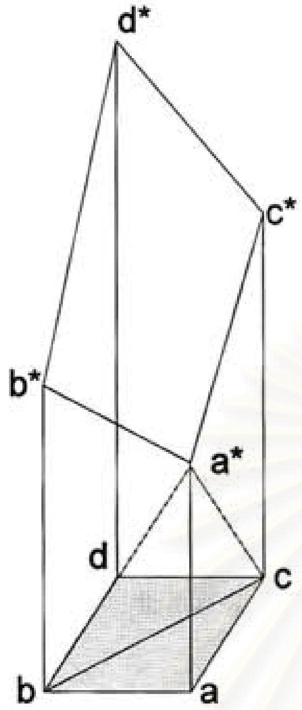
ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(j) เท่ากับ v_{12} ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(k) เท่ากับ v_{13} ลูกบาศก์หน่วย

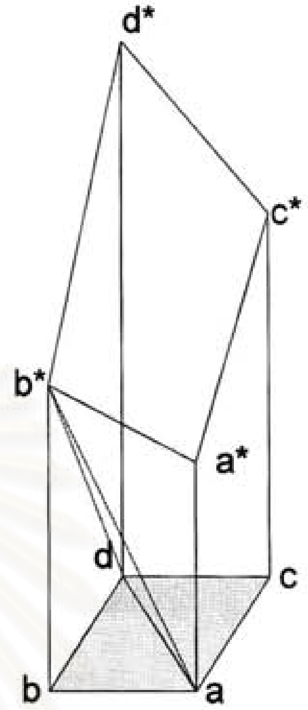
ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(m) เท่ากับ v_{24} ลูกบาศก์หน่วย

และ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.9(n) เท่ากับ v_{34} ลูกบาศก์หน่วย ตามต้องการ

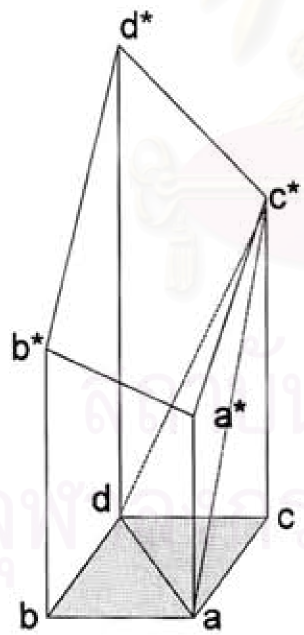
<u>กรณีที่</u> 3 $h_4 \le h_2 + h_3 - h_1$ พิจารณารูปต่อไปนี้



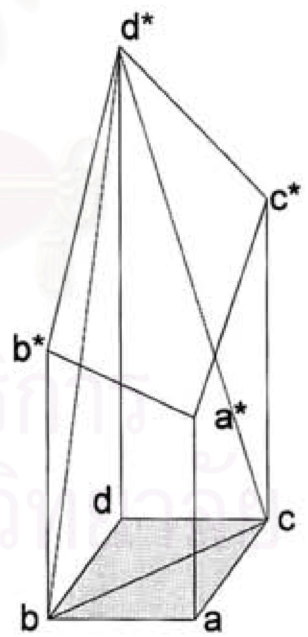
(a)



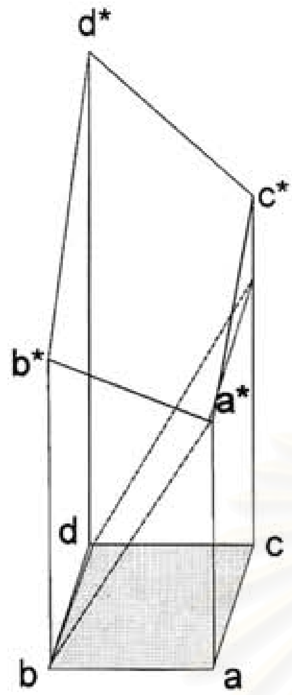
(b)



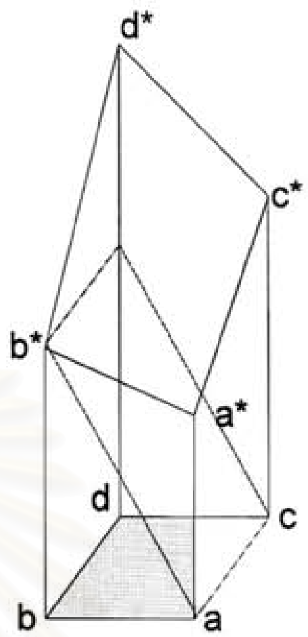
(c)



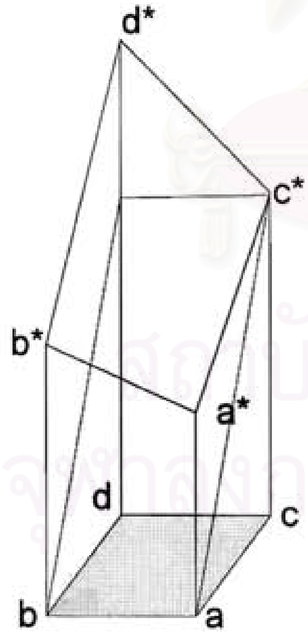
(d)



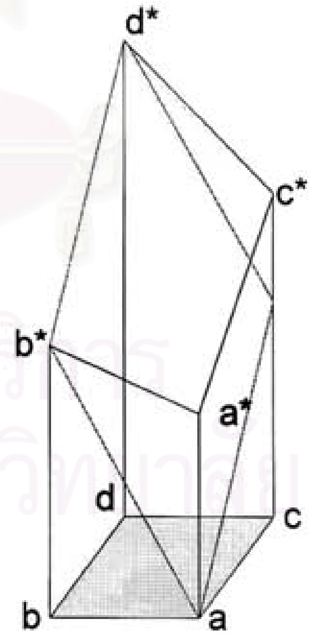
(e)



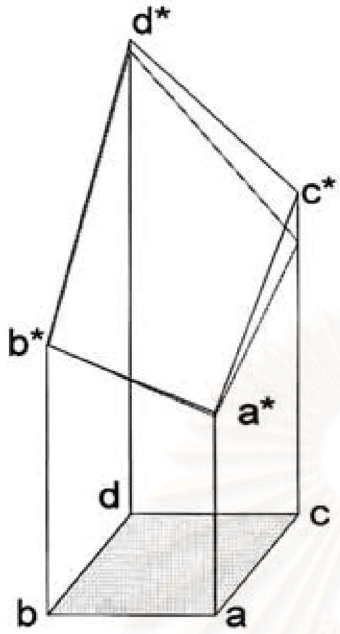
(f)



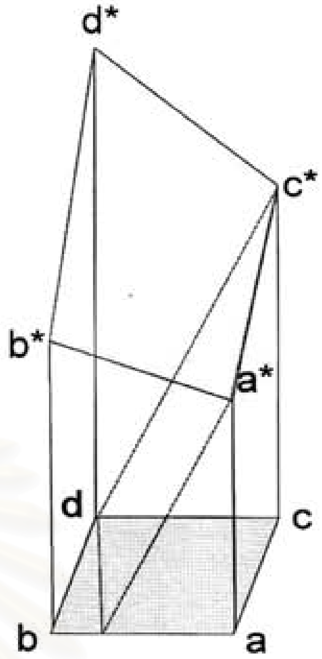
(g)



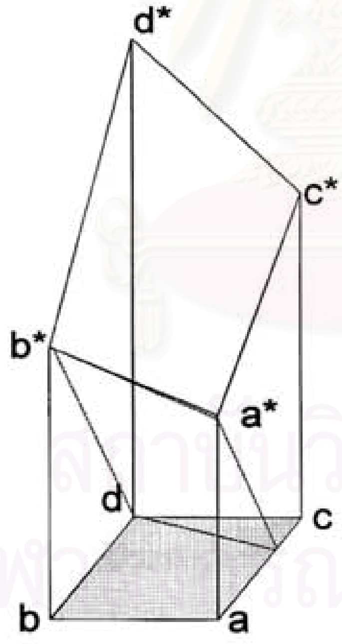
(h)



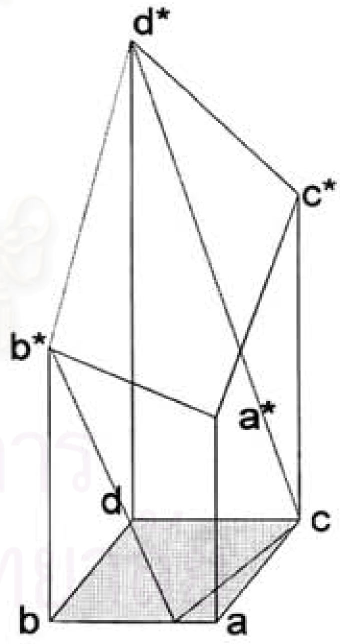
(i)



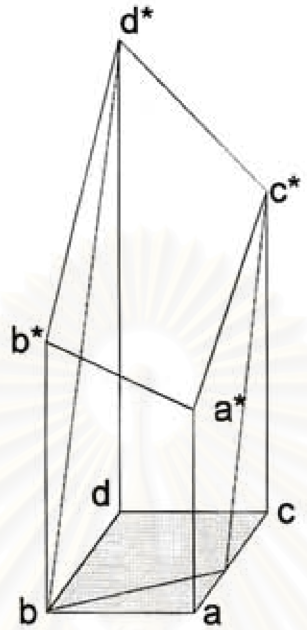
(j)



(k)



(m)



(n)

รูปที่ 3.10 แสดงการตวงของเหลวเมื่อ $h_4 \le h_2 + h_3 - h_1$

เราสามารถ คำนวณปริมาตรด้วยวิธีการเดียวกับในกรณีที่ 1 เราจะได้ว่า

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(a) เท่ากับ h_1 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(b) เท่ากับ h_2 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(c) เท่ากับ h_3 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(d) เท่ากับ h_4 ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(e) เท่ากับ $3h_1$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(f) เท่ากับ $3h_2$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(g) เท่ากับ $3h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(h) เท่ากับ $3h_4$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(i) เท่ากับ $3(h_1 + h_4)$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(j) เท่ากับ v_{13} ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(k) เท่ากับ v_{12} ลูกบาศก์หน่วย

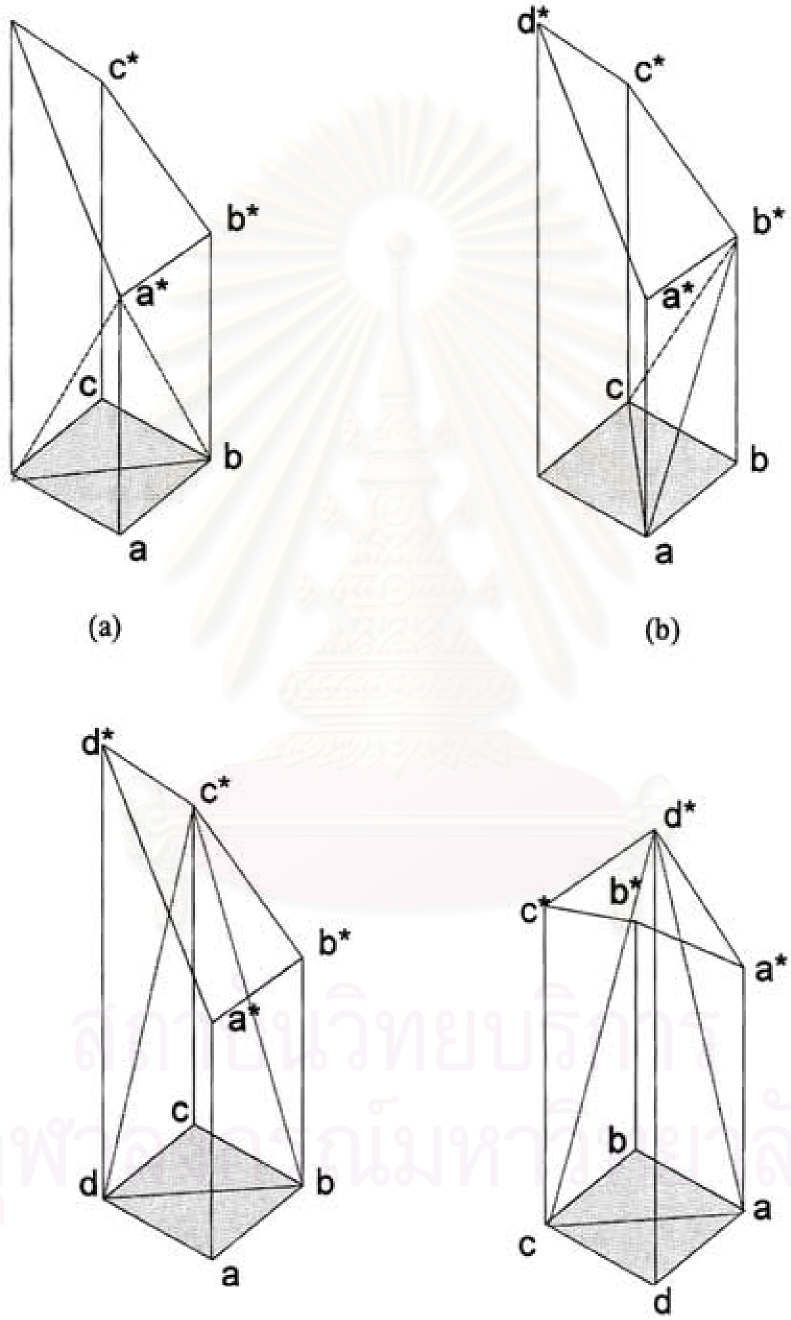
ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(m) เท่ากับ v_{24} ลูกบาศก์หน่วย

และ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 3.10(n) เท่ากับ v_{34} ลูกบาศก์หน่วย ตามต้องการ

สำหรับภาชนะตวงวัดแบบที่ 1 และแบบที่ 3 เราจะแสดงรูปภาพการตวงของเหลวในรูปที่ 3.11 และ รูปที่ 3.12 ตามลำดับ ดังนี้

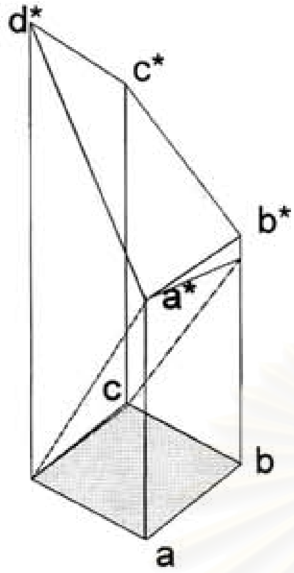
<u>ภาชนะตวงวัดแบบที่</u> 1

<u>กรณีที่</u> $h_4 \le h_1 + h_3$

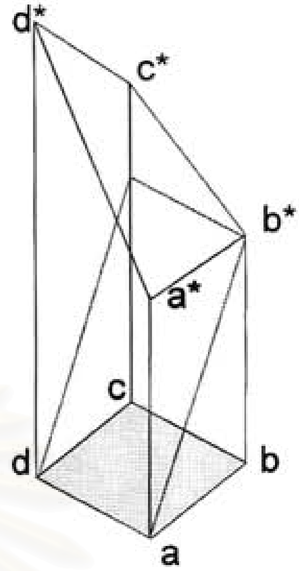


(a) (b)

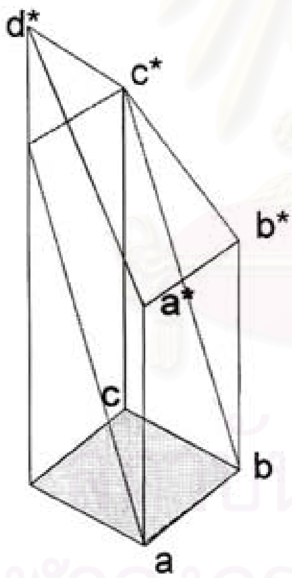
(c) (d)



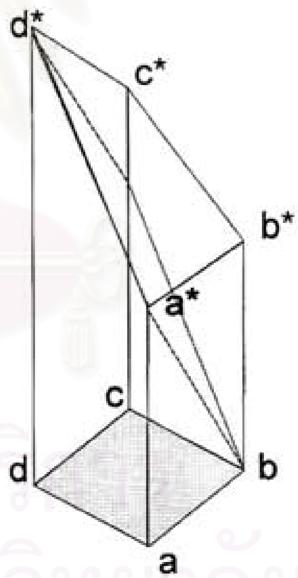
(e)



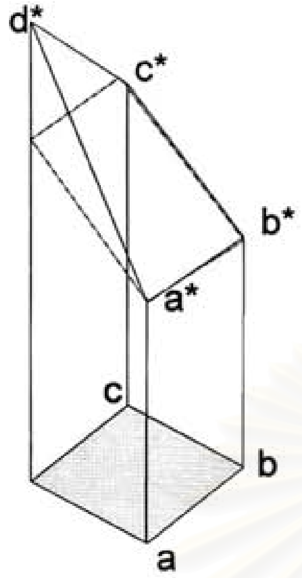
(f)



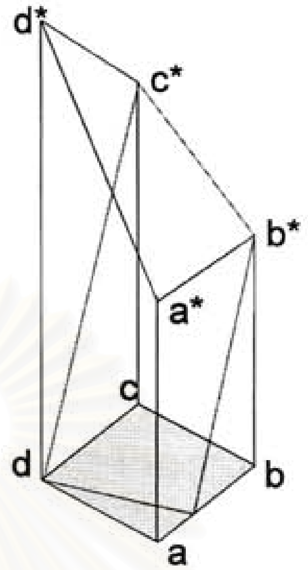
(g)



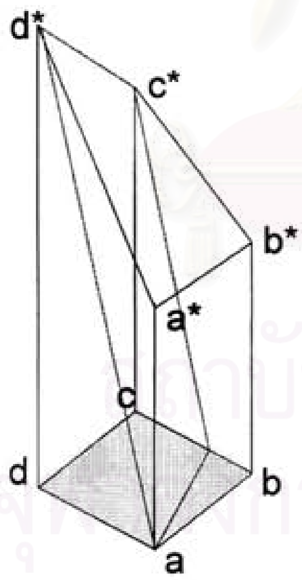
(h)



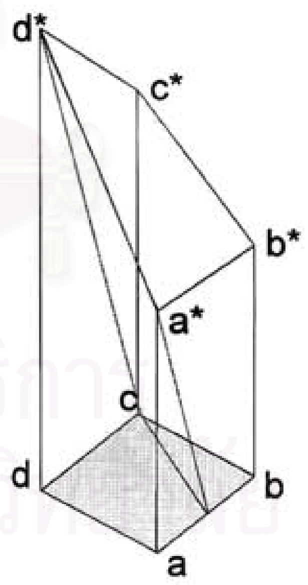
(i)



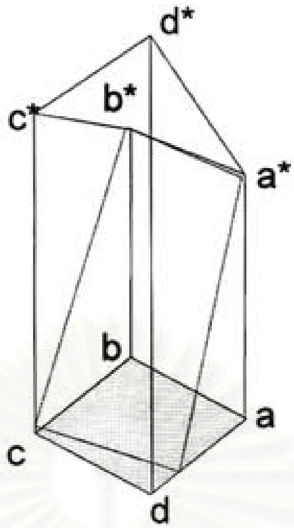
(j)



(k)



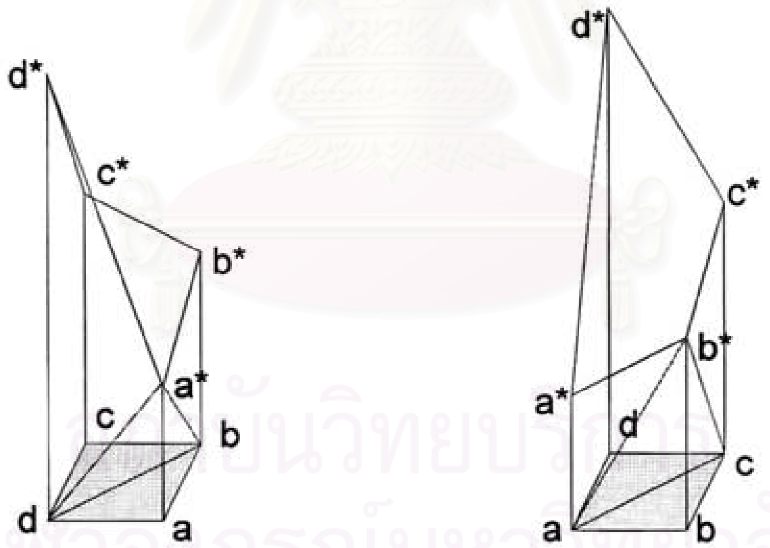
(m)



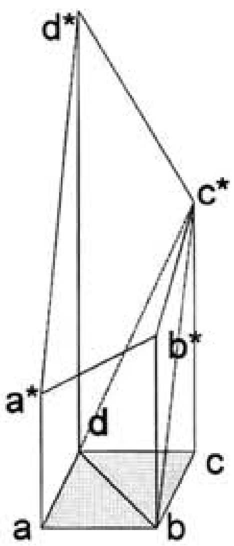
(ก)

รูปที่ 3.11(a) แสดงการตวงของเหลวของภาชนะตวงวัดแบบที่ 1 กรณีที่ $h_4 \leq h_1 + h_3$

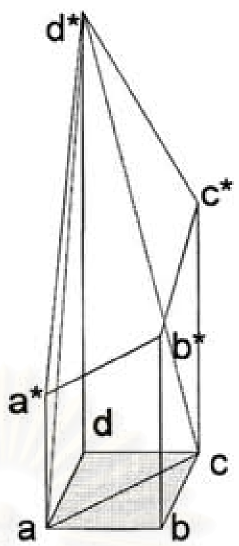
<u>กรณีที่</u> $h_4 > h_1 + h_3$



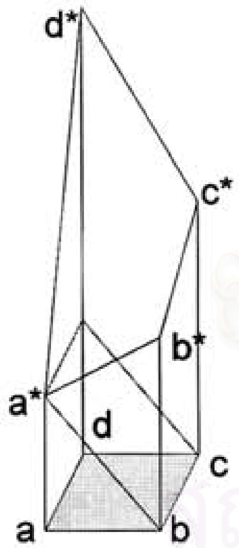
(a) (b)



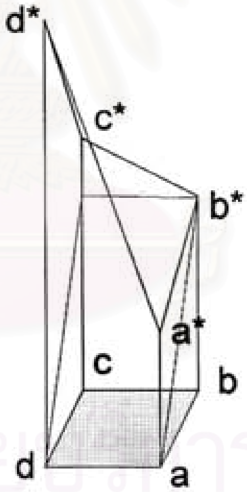
(c)



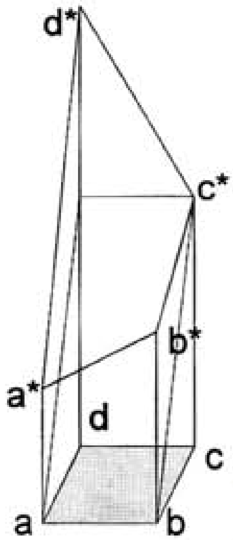
(d)



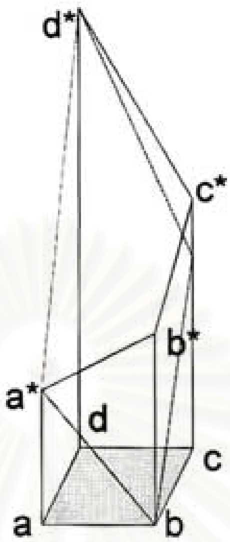
(e)



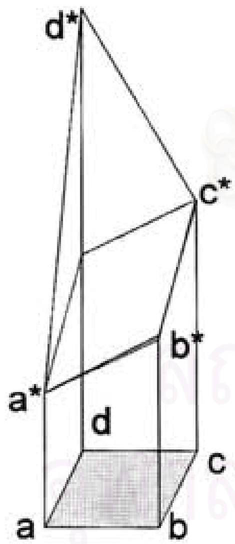
(f)



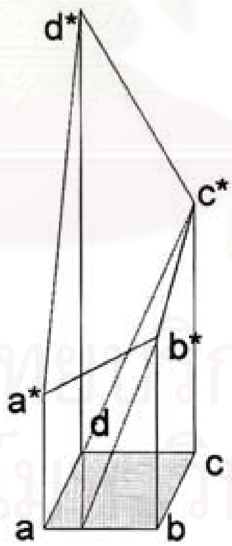
(g)



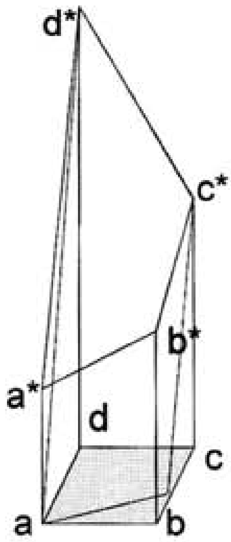
(h)



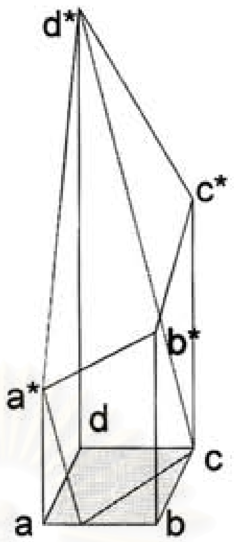
(i)



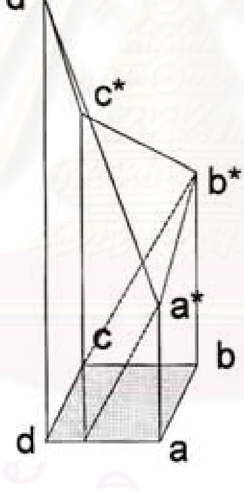
(j)



(k)



(m)

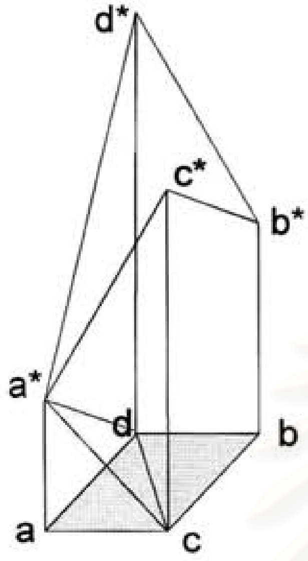


(n)

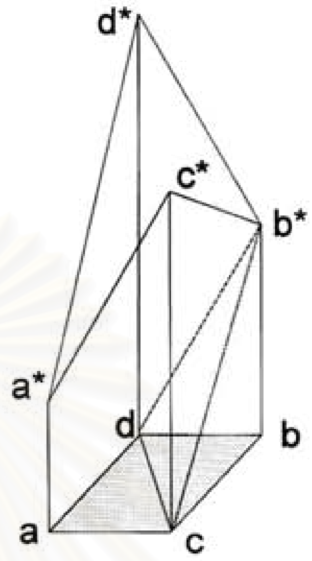
รูปที่ 3.11(b) แสดงการตวงของเหลวของภาชนะตวงวัดแบบที่ 1 กรณีที่ $h_4 > h_1 + h_3$

<u>ภาชนะตวงวัดแบบที่ 3</u>

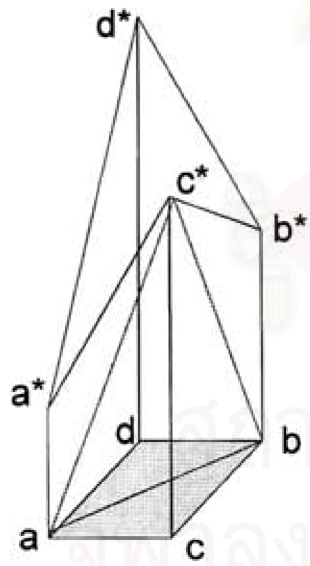
<u>กรณีที่</u> $h_3 > h_1 + h_2$



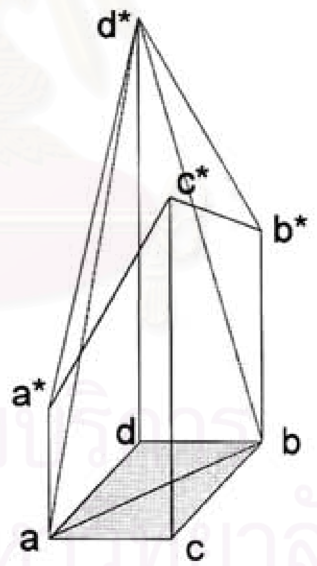
(a)



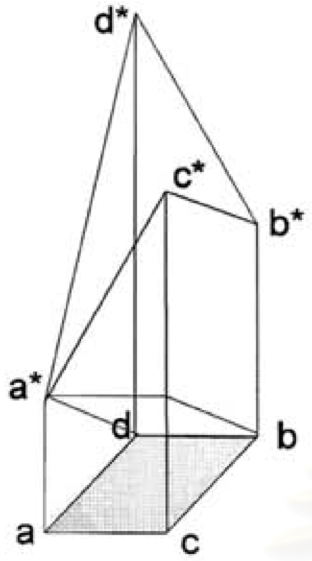
(b)



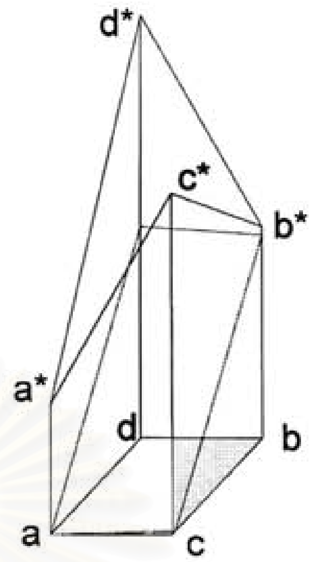
(c)



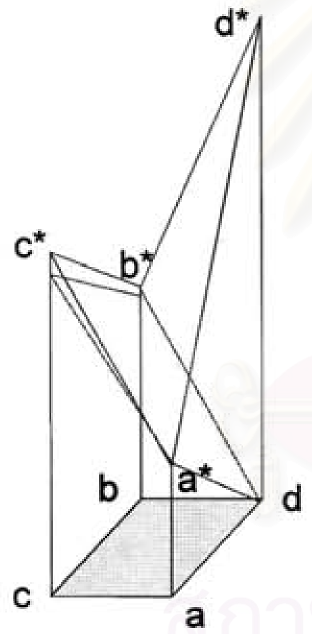
(d)



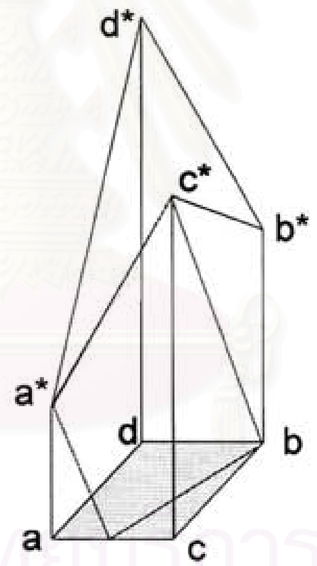
(e)



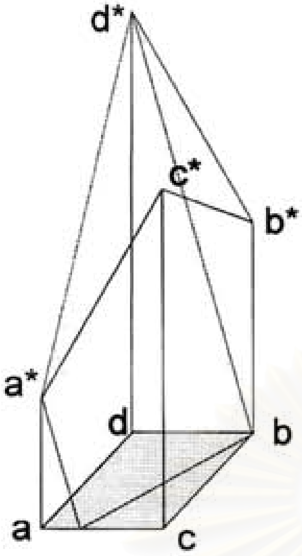
(f)



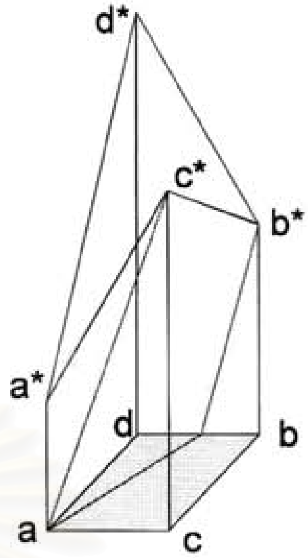
(g)



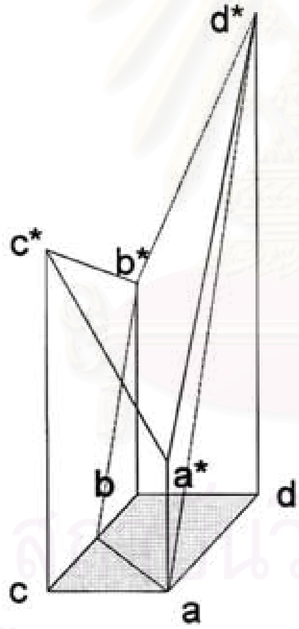
(h)



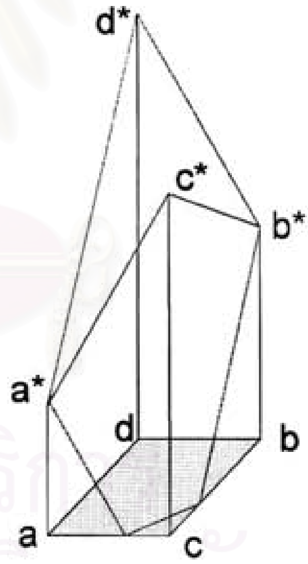
(i)



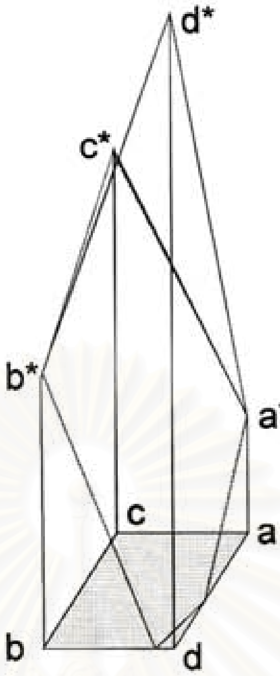
(j)



(k)



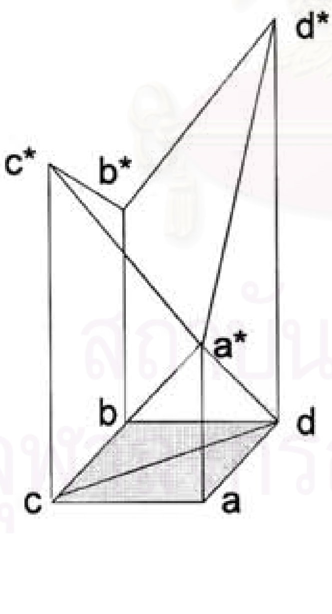
(m)

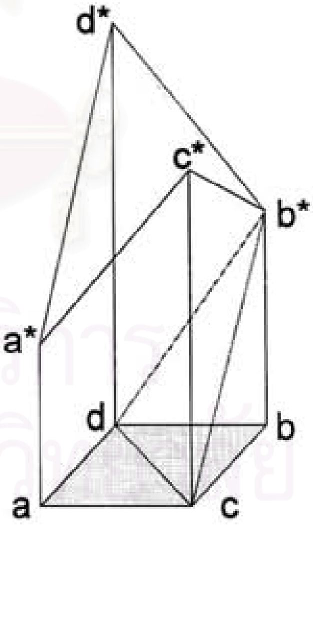


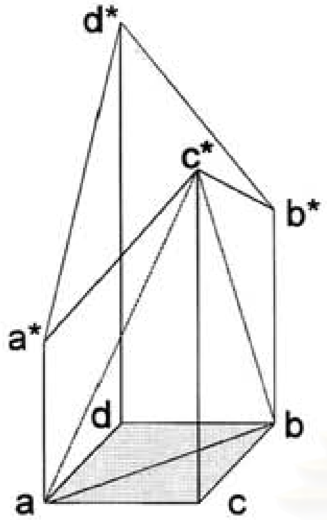
(ก)

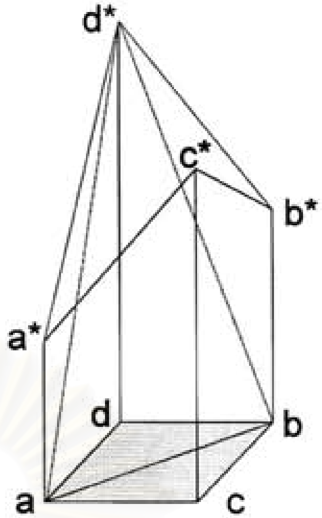
รูปที่ 3.12(a) แสดงการตวงของเหลวของภาชนะตวงวัดแบบที่ 3 กรณีที่ $h_3 > h_1 + h_2$

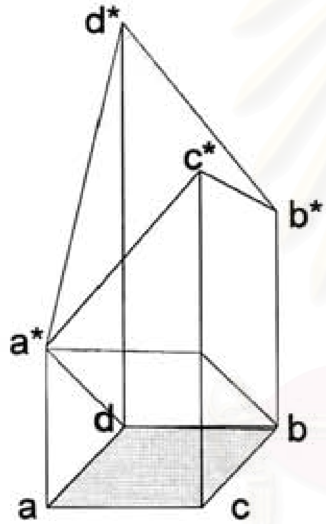
<u>กรณีที่</u> $h_3 \le h_2 + h_2 < h_4$

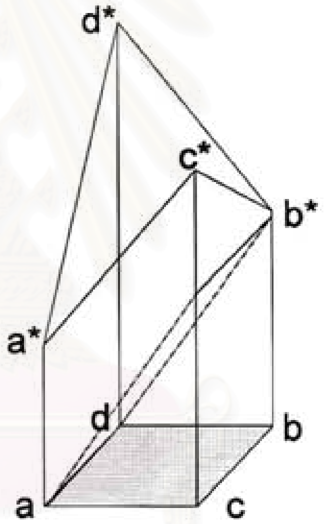


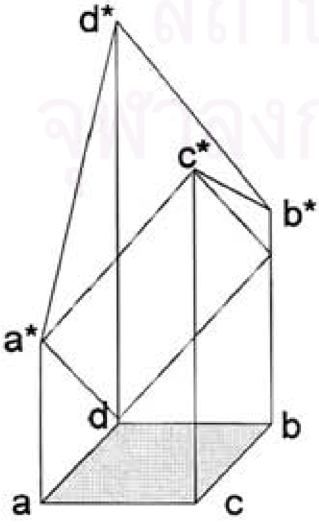


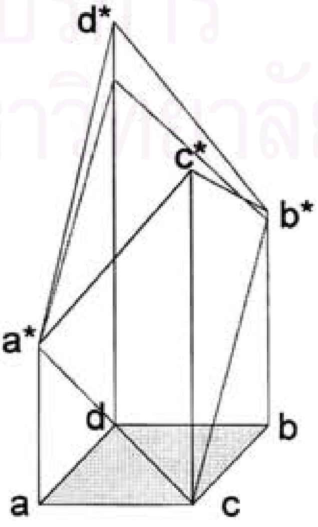

d*
c*
b*
a*
d
b
a
c

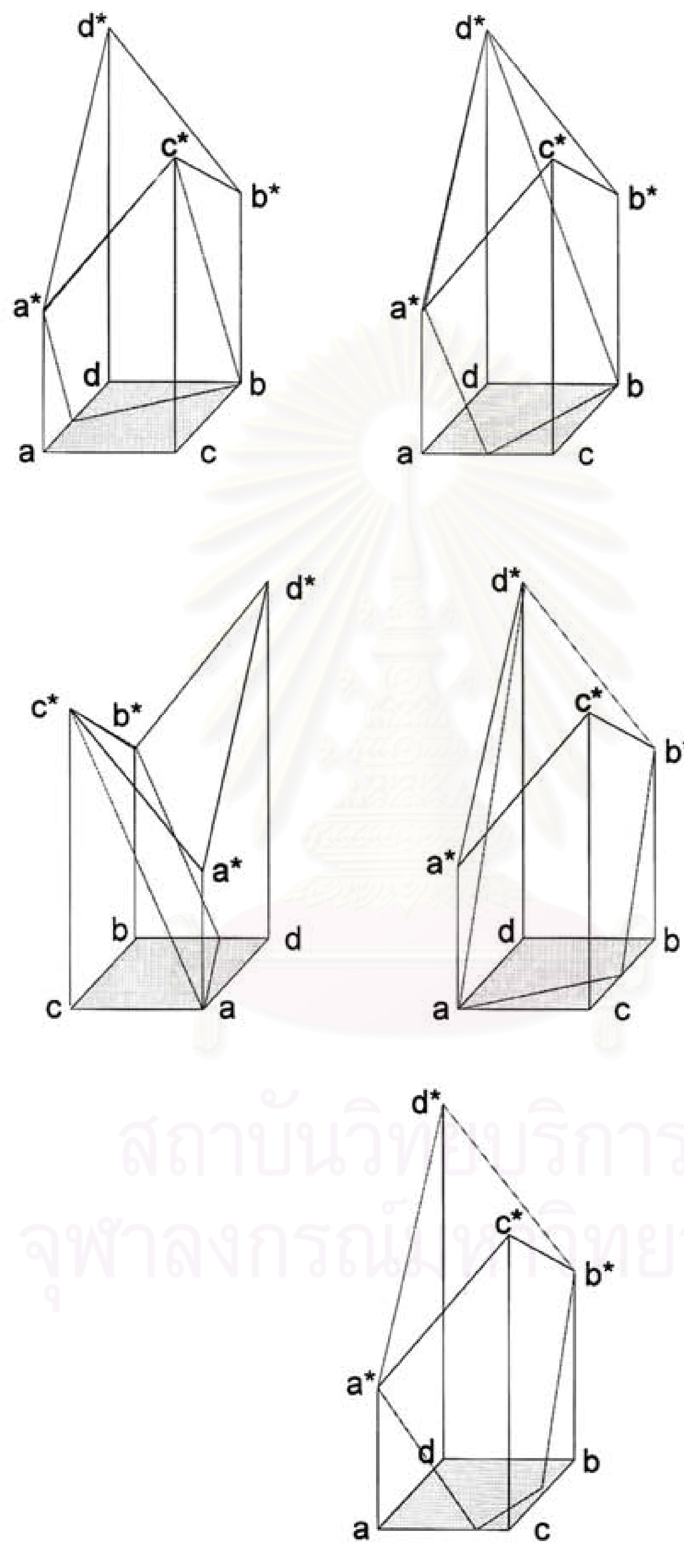

d*
c*
b*
a*
d
b
a
c


d*
c*
b*
a*
d
b
a
c


d*
c*
b*
a*
d
b
a
c

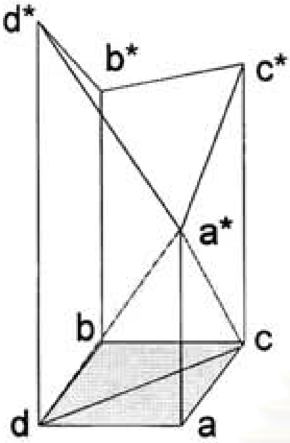

d*
c*
b*
a*
d
b
a
c

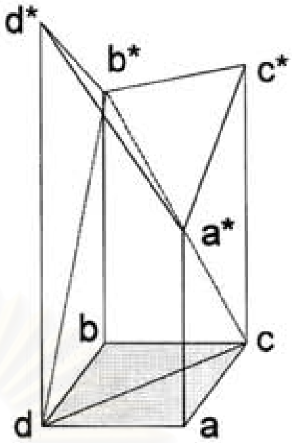

d*
c*
b*
a*
d
b
a
c

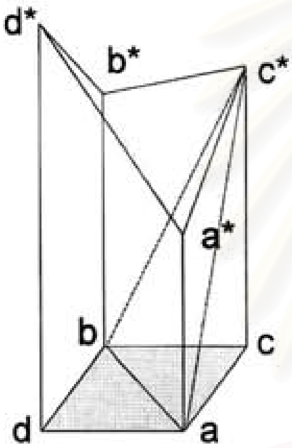


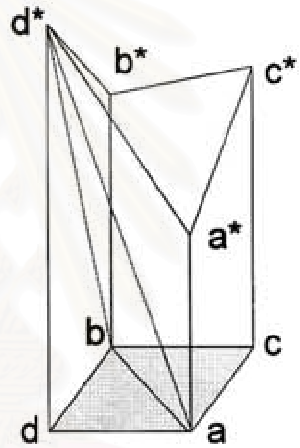
รูปที่ 3.12(b) แสดงการตวงของเหลวของภาชนะตวงวัดแบบที่ 3 กรณีที่ $h_3 \le h_2 + h_2 < h_4$

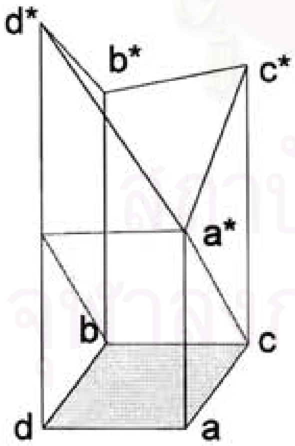
<u>กรณีที่</u> $h_4 \le h_1 + h_2$

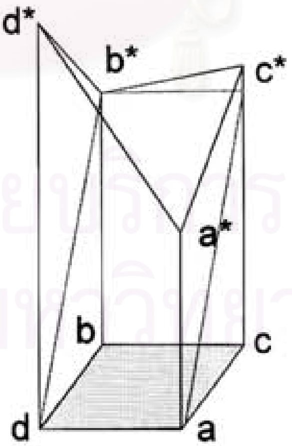


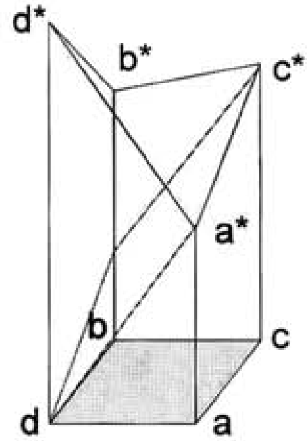


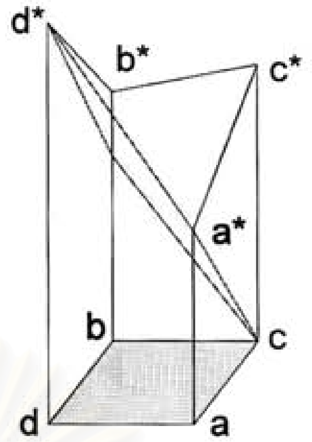


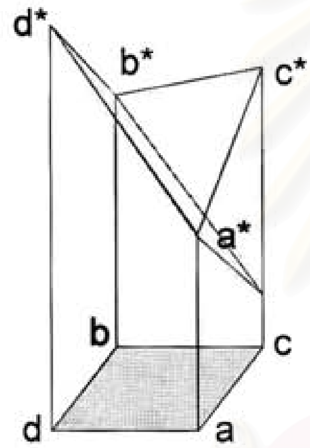


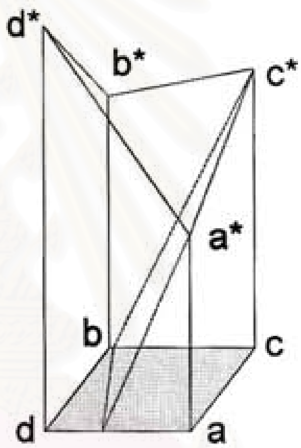


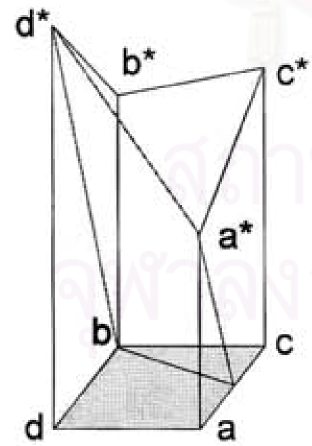


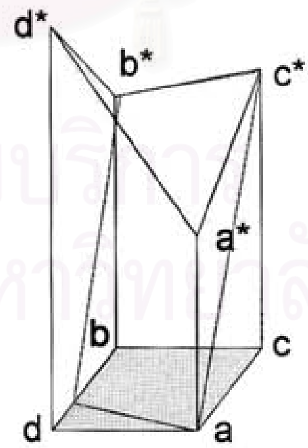

d*
b*
c*
a*
b
c
d
a

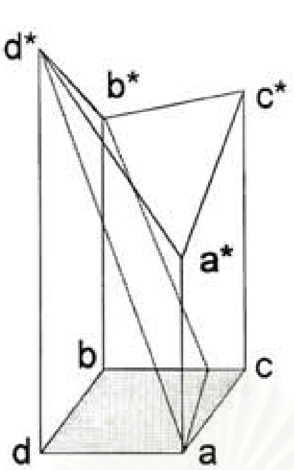

d*
b*
c*
a*
b
c
d
a


d*
b*
c*
a*
b
c
d
a


d*
b*
c*
a*
b
c
d
a


d*
b*
c*
a*
b
c
d
a


d*
b*
c*
a*
b
c
d
a



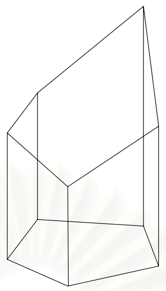
รูปที่ 3.12(c) แสดงการตวงของเหลวของภาชนะตวงวัดแบบที่ 3 กรณีที่ $h_4 \leq h_1 + h_2$

ทฤษฎีบท 3.7 มีเครื่องตวงสากลที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าความจุอย่างน้อย 858 ลูกบาศก์หน่วย

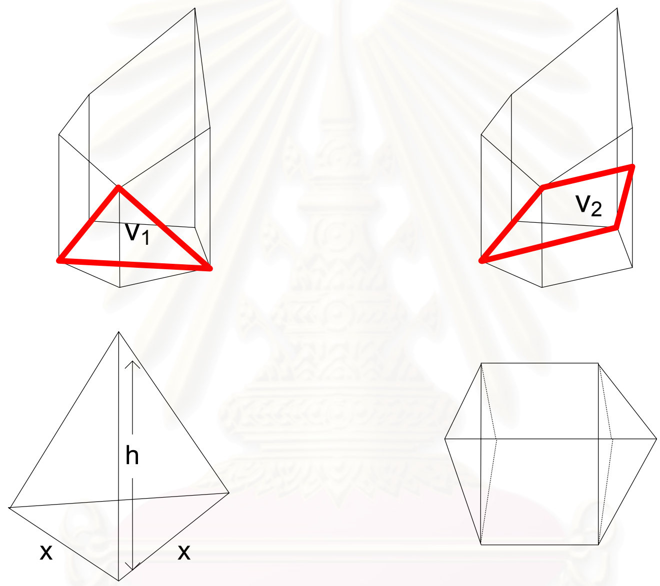
พิสูจน์ ทีมงานวิจัยของ Professor Jin Akiyama ได้ทฤษฎีบทนี้จากการใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าของ h_1, h_2, h_3, h_4 โดยที่ $1 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_4 \leq 2^{13}$ ได้ค่าความสูง $h_1 = 130$ หน่วย $h_2 = 132$ หน่วย $h_3 = 156$ หน่วย และ $h_4 = 169$ หน่วย เมื่อแทนค่า h_1, h_2, h_3, h_4 ที่ได้เหล่านี้ ใน ทฤษฎีบท 3.6 ของภาชนะแบบที่ 1 กรณีที่ $h_4 \leq h_1 + h_3$ ทำให้เราได้ค่าปริมาตร ที่เป็นจำนวนเต็ม 11 ค่า ดังนี้ 130 , 132 , 156 , 169 , 390 , 396 , 399 , 468 , 469 , 507 , 858
พิจารณาลำดับไม่ลด $\Omega = (130 , 132 , 156 , 169 , 390 , 396 , 399 , 468 , 469 , 507 , 858)$
จะได้ ลำดับ $\mathcal{D}$ ที่สมนัยกับ Ω คือ
$\mathcal{D} = (0 , 1 , 2 , 3 , 6 , 13 , 24 , 38 , 69 , 121 , 130 , 351)$
โดยใช้ทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่าลำดับ $\mathcal{D}$ นี้ เป็นลำดับก่อกำเนิด ดังนั้น โดยนิยามเราได้เครื่องตวงสากล M ที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าความจุ 858 ลูกบาศก์หน่วย □

บทที่ 4
เครื่องตวงกึ่งสากลที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษ

พิจารณาภาชนะที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมปกติ โดยที่ด้านข้างตั้งฉากกับฐาน ดังรูป



ให้ V_1 และ V_2 แทน ปริมาตรของเหลวในภาชนะ ดังรูป



จากการคำนวณ V_1 เท่ากับ $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times x^2\sin(\frac{3\pi}{5}))\times h$

$$=\frac{1}{6}\times(x^2\cos(\frac{\pi}{10}))\times h$$

และ V_2 เท่ากับ $2(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times x\sin(\frac{\pi}{10})\times z\times h)+\frac{1}{2}\times(xzh)$

$$=[\frac{1}{3}\times x\sin(\frac{\pi}{10})\times x\cos(\frac{\pi}{10})\times h]+\frac{1}{2}\times x\times x\cos(\frac{\pi}{10})\times h$$

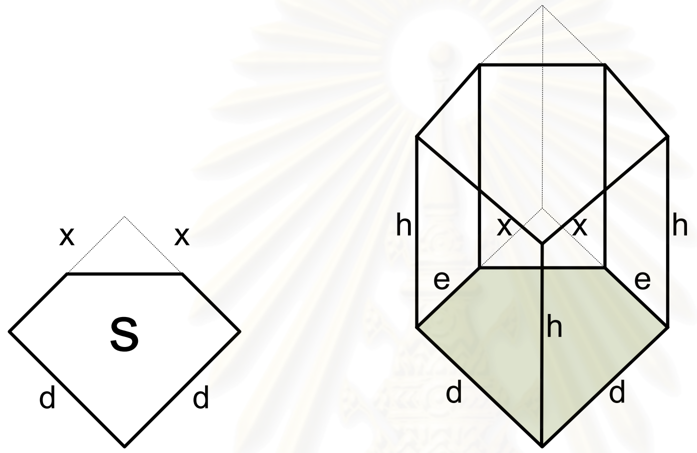
$$=x^2h\cos(\frac{\pi}{10})\left\{\frac{\sin(\frac{\pi}{10})}{3}+\frac{1}{2}\right\}$$

ดังนั้น อัตราส่วนระหว่าง V_2 ต่อ $V_1 = 2\sin(\frac{\pi}{10})+3 = 2(\frac{\sqrt{5}-1}{4})+3 = \frac{\sqrt{5}+5}{2}$

ทำให้ V_1 หรือ V_2 ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราไม่สามารถสร้างเครื่องตวงสากลในกรณีนี้ได้ เราจึงสร้างภาชนะตวงวัดที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษ โดยแนะนำบทนิยามของเครื่องตวงกึ่งสากล และพิสูจน์ว่ามีเครื่องตวงกึ่งสากลที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษที่เราสร้างขึ้นนี้

กำหนด S เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน ๆ ละ d หน่วย

ให้ M เป็น ภาชนะที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยม ซึ่งเกิดจากการตัดมุม ๆ หนึ่งของ S ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก ความยาวด้านประกอบมุมฉากคือ x หน่วย และให้ความสูงของภาชนะ M คือ h หน่วย ดังรูป 4.1



รูปที่ 4.1

ฐานของภาชนะ M มีฐานเท่ากันสองคู่ คู่หนึ่งยาว d หน่วย อีกคู่หนึ่งยาว $d-x = e$ หน่วย

เพื่อความสะดวก เราแทน ภาชนะ M ด้วย ภาชนะ $M(d,e,h)$ หมายถึง ภาชนะที่ฐานมีความยาว d หน่วย จำนวน 2 ด้าน ความยาว e หน่วยจำนวน 2 ด้านและภาชนะมีความสูง h หน่วย

ทฤษฎีบท 4.1 ภาชนะ $M(d,e,h)$ สามารถตวงของเหลวได้ปริมาตรดังต่อไปนี้

$$V_1 = \frac{eh(d-e)}{6}$$

$$V_2 = \frac{edh}{6}$$

$$V_3 = \frac{d^2h}{6}$$

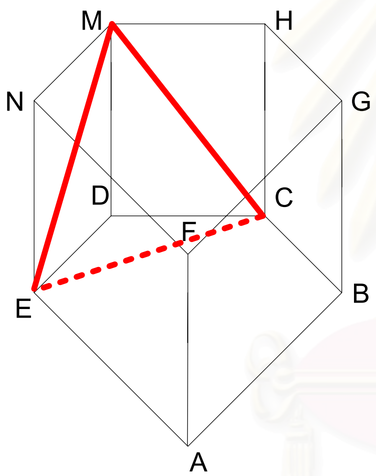
$$V_4 = \frac{edh}{3} + \frac{e^2dh}{3(d+e)} + \frac{h(d^2-e^2)}{6}$$

$$V_5 = \frac{edh}{2} - \frac{e^2h}{3}$$

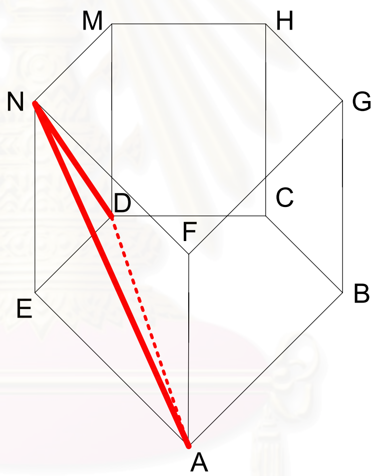
$$V_6 = \frac{ed^2h}{3(d+e)} + \frac{edh}{3} + \frac{h(d^2-e^2)}{3}$$

$$V_7 = \frac{d^2h}{2} - \frac{eh(d-e)^2}{6d} - \frac{h(d-e)^2}{3}$$
$$V_8 = \frac{d^2h}{2} - \frac{h(d-e)^3}{6d}$$
$$V_9 = \frac{d^2h}{6} + \frac{e^2h}{6} + \frac{edh}{6}$$
$$V_{10} = \frac{eh(d-e)}{2} + \frac{h(d-e)^2}{6}$$
$$V_{11} = \frac{edh}{2}$$
$$V_{12} = \frac{d^2h}{6} + \frac{eh(d-e)}{6}\left(\frac{d^2-e^2}{d^2}+1\right)$$
$$V_{13} = \frac{d^2h}{2} + edh - \frac{e^2h}{2}$$

พิสูจน์ เราจะพิจารณารูปการตวงของภาชนะในแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งคำนวณปริมาตรของเหลวตามลำดับดังนี้



รูปที่ 4.2



รูปที่ 4.3

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.2 มีค่าเท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า DECM

เนื่องจากปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า DECM $= \frac{1}{3} \times$ (พื้นที่ฐานของสามเหลี่ยม DEC) $\times h$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DC} \times \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \times h$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times e \times \sqrt{2}(d-e) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times h$$
$$= \frac{eh(d-e)}{6} = V_1$$

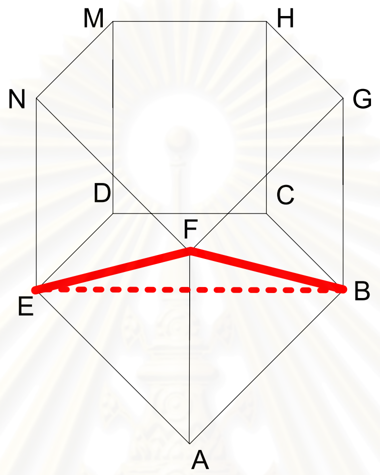
ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.3 มีค่าเท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า DEAN

ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า DEAN $= \frac{1}{3}\times($ พื้นที่ฐานของสามเหลี่ยม DEA $)\times h$

$$= \frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{EA})\times h$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times e\times d\times h$$

$$= \frac{edh}{6} = V_2$$



รูปที่ 4.4

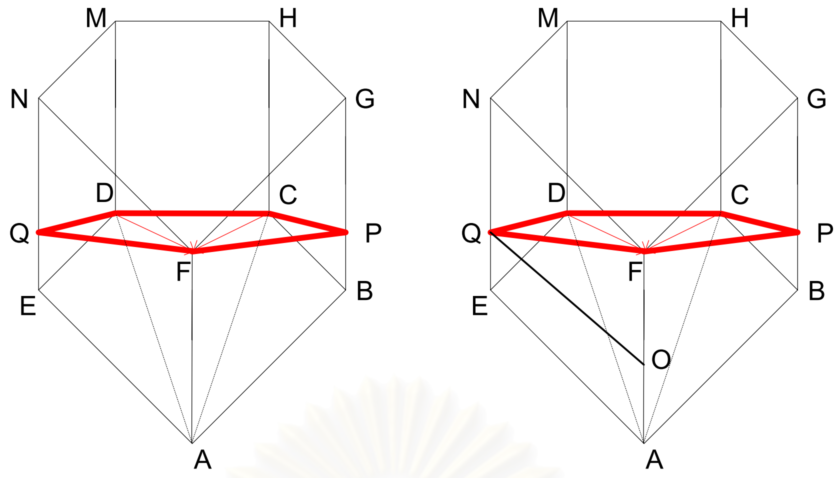
ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.4 มีค่าเท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า AEFB

ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า AEFB $= \frac{1}{3}\times($ พื้นที่ฐานของสามเหลี่ยม ABE $)\times h$

$$= \frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AB})\times h$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times d\times d\times h$$

$$= \frac{d^2h}{6} = V_3$$



รูปที่ 4.5

ให้ Q และ P เป็นจุดบนด้าน EN และ BG ตามลำดับ ซึ่งระนาบของของเหลวผ่าน

จากรูปที่ 4.5 เมื่อลากเส้นตรง DA และ เส้นตรง CA ทำให้ได้ รูปทรงพีระมิด 3 รูป คือ พีระมิด AEQFD พีระมิด ABPFC และพีระมิด ACDF

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.5 มีค่าเท่ากับ ผลรวมของปริมาตรของรูปทรงพีระมิดทั้งสาม

จะเห็นว่า ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด AEQFD เท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ABPFC

ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ABPFC $=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times(\overline{AF}+\overline{BP})\times\overline{AB})\times\overline{BC}$

$$=\frac{1}{6}\times(h+\overline{BP})de$$

การหาความยาวของด้าน BP ลากเส้นตรงจากจุด Q ไปตั้งฉากกับกับเส้นตรง AF ที่จุด O ดังรูป

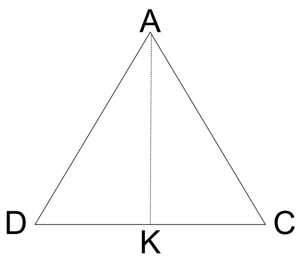
จะได้ สามเหลี่ยม QOF คล้ายกับสามเหลี่ยม CBP ดังนั้น

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{QO}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CB}} \quad \text{นั่นคือ} \quad \overline{BP}=\frac{eh}{d+e}$$

จะได้ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ABPFC $=\frac{1}{6}de(h+\frac{eh}{d+e})$

ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ACDF $=\frac{1}{3}\times(\text{ พื้นที่สามเหลี่ยม ACD })\times\overline{AF}$

พื้นที่สามเหลี่ยม ACD คำนวณได้ดังนี้ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปตั้งฉากกับเส้นตรง DC ที่จุด K



เนื่องจาก $\overline{AC}=\overline{AD}=\sqrt{d^2+e^2}$ และ $\overline{DC}=\sqrt{2}(d-e)$ และ $\overline{KC}=\frac{\sqrt{2}}{2}(d-e)$

พื้นที่สามเหลี่ยม ACD $=\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{AK}$ $=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(d-e)\times\sqrt{(\overline{AC})^2-(\overline{KC})^2}$

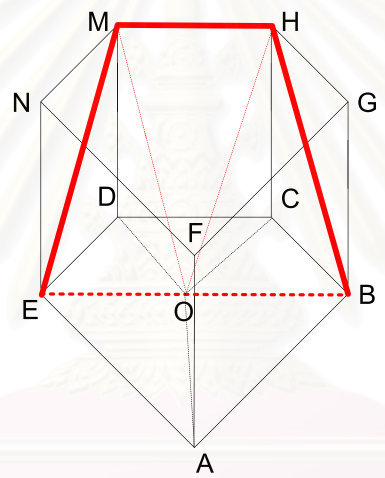
$=\frac{1}{2}(d^2-e^2)$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ACDF $=\frac{1}{6}h(d^2-e^2)$

จะได้ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.5 เท่ากับ $2\times\frac{1}{6}de(h+\frac{eh}{d+e})+\frac{1}{6}h(d^2-e^2)$

$=\frac{edh}{3}+\frac{e^2dh}{3(d+e)}+\frac{h(d^2-e^2)}{6}$

$=V_4$



รูปที่ 4.6

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.6 มีค่าเท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า BCDEHM

ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BE ลากเส้นตรง OD เส้นตรง OC เส้นตรง OM และเส้นตรง OH ทำให้ได้ รูปทรงพีระมิด 3 รูป คือ พีระมิด ODEM พีระมิด OCBH และ พีระมิด OCDMH

ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า BCDEHM เท่ากับผลรวมของปริมาตรของรูปทรงพีระมิดทั้งสาม

จะเห็นว่า ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ODEM เท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด OCBH

ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด ODEM $=\frac{1}{3}\times($ พื้นที่สามเหลี่ยม ODE $)\times h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}d\times\frac{e}{\sqrt{2}}\times h$

$=\frac{1}{12}edh$

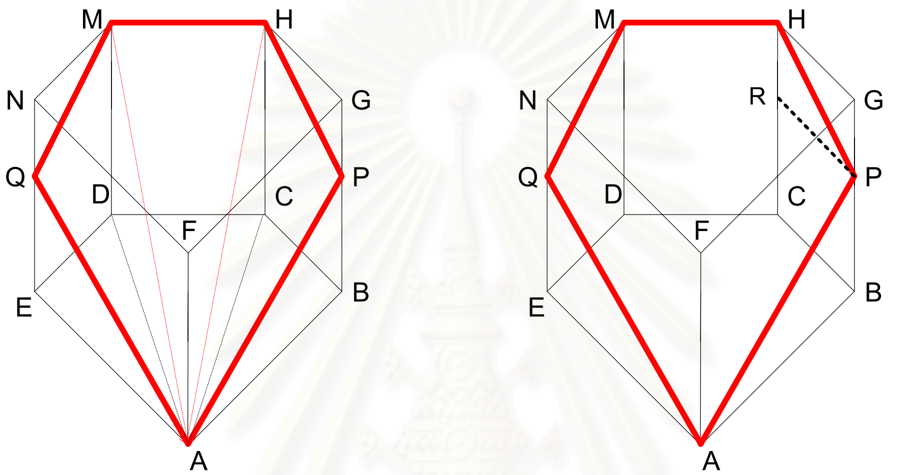
ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด OCDMH $= \frac{1}{3} \times (d-e) \times e \times h$

$$= \frac{1}{3}edh - \frac{1}{3}e^2h$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า BCDEHM เท่ากับ $\frac{1}{12}edh + \frac{1}{12}edh + \frac{1}{3}edh - \frac{1}{3}e^2h$

$$= \frac{edh}{2} - \frac{e^2h}{3}$$

$$= V_5$$



รูปที่ 4.7(a) รูปที่ 4.7(b)

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.7 มีค่าเท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงเจ็ดหน้า ABCDEPHMQ ลากเส้นตรง AD เส้นตรง AC เส้นตรง AM และเส้นตรง AH ดังรูปที่4.7(a) ทำให้เกิดรูปทรงพีระมิด 3 รูป คือ พีระมิด DMQEA พีระมิด DMHCA และ พีระมิด CHPBA ปริมาตรของรูปทรงเจ็ดหน้า ABCDEPHMQ เท่ากับผลรวมของปริมาตรของรูปทรงพีระมิดทั้งสาม เราจะเห็นว่า ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด DMQEA เท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด CHPBA และเพราะว่า

ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด DMQEA $= \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times (\overline{EQ} + \overline{DM}) \times \overline{DE}) \times \overline{AE}$

$$= \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times (\overline{EQ} + h) \times e) \times d$$

การหาความยาวของด้าน EQ ลากเส้นตรงจากจุด P ไปตั้งฉากกับกับเส้นตรง CH ที่จุด R ดังรูปที่ 4.7(b) จะได้ สามเหลี่ยม QAE คล้ายกับสามเหลี่ยม HPR ดั้งนั้น

$$\frac{\overline{EQ}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{RH}}{\overline{RP}} \quad \text{นั่นคือ} \quad \overline{EQ} = \frac{dh}{d+e}$$

พิจารณาปริมาตรของรูปทรงพีระมิด DMHCA

เนื่องจากเราสามารถคำนวณระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นตรง DC ได้เท่ากับ $\frac{d+e}{\sqrt{2}}$

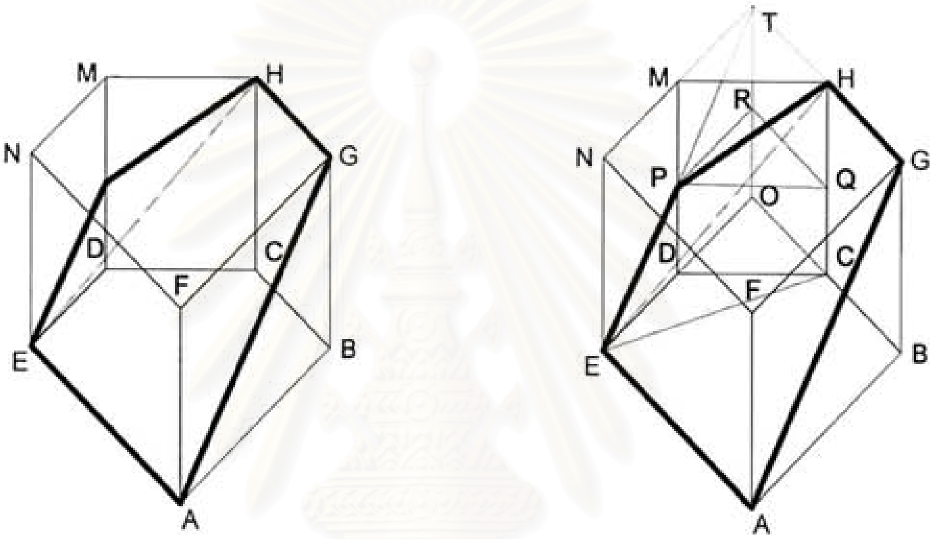
จะได้ ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด DMHCA $= \frac{1}{3} \times \sqrt{2}(d-e)h \times (\frac{d+e}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{h}{3}(d^2 - e^2)$$

ดังนั้น ปริมาตรของเหลวในรูปที่4.7 มีค่าเท่ากับ $2\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{dh}{d+e} + h)ed\right] + \frac{h}{3}(d^2 - e^2)$

$$= \frac{ed^2h}{3(d+e)} + \frac{edh}{3} + \frac{h(d^2-e^2)}{3}$$

$$= V_6$$



รูปที่ 4.8

ให้ P เป็นจุดบนด้าน DN ซึ่งระนาบของของเหลวผ่าน ลากเส้นตรง ED และเส้นตรง BC พบกันที่จุด O จากจุด P ลากเส้นตรง PQ ตั้งฉากกับเส้นตรง CH และ ลากเส้นตรง NM และ เส้นตรง GH จะได้ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.8 เท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า ABOEGT – (ปริมาตรของรูปทรงปริซึม DCOPQR + ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด QHRTP) นั่นคือ

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.8 เท่ากับ $\frac{d^2h}{2} - \left[\frac{1}{2} \times (d-e)^2 \times \overline{PD} + \frac{1}{3} \times (d-e)^2 \times \overline{QH}\right]$

เนื่องจาก สามเหลี่ยม PDE คล้ายกับสามเหลี่ยม GBA ดังนั้น

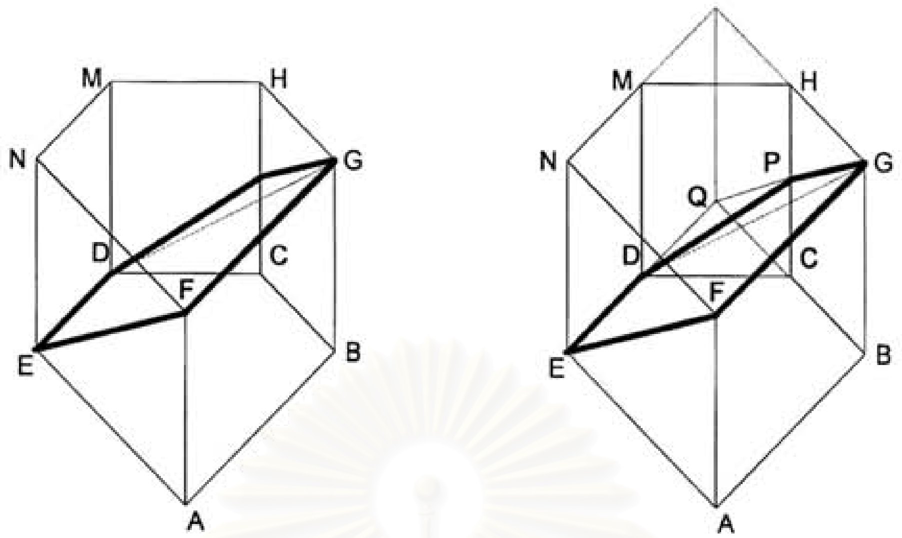
$$\frac{\overline{PD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{BA}} \quad \text{นั่นคือ} \quad \overline{PD} = \frac{eh}{d}$$

ดังนั้น ปริมาตรของเหลว เท่ากับ $\frac{d^2h}{2} - \left[\frac{1}{2} \times (d-e)^2 \times \frac{eh}{d} + \frac{1}{3} \times (d-e)^2 \times (h - \frac{eh}{d})\right]$

$$= \frac{d^2h}{2} - \frac{eh(d-e)^2}{2d} - \frac{h(d-e)^2}{3} + \frac{eh(d-e)^2}{3d}$$

$$= \frac{d^2h}{2} - \frac{eh(d-e)^2}{6d} - \frac{h(d-e)^2}{3}$$

$$= V_7$$



รูปที่ 4.9

ให้ P เป็นจุดบนด้าน CH ซึ่งระนาบของของเหลวผ่าน ลากเส้นตรง ED และเส้นตรง BC พบกันที่จุด Q จะได้ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.9 เท่ากับ ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า ABQEFG ลบด้วย ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า CQDP นั่นคือ

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.9 เท่ากับ $\dfrac{d^2h}{2}-\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times(d-e)^2\times\overline{PC})$

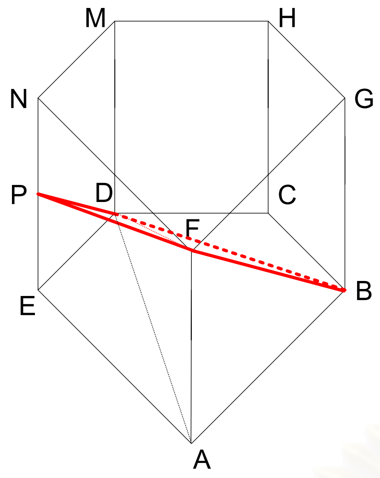
การหาความยาวของเส้นตรง PC ลากเส้นตรง ED และเส้นตรง BC พบกันที่จุด Q จากนั้น ลากเส้นตรง QP เราจะได้ สามเหลี่ยม AEF คล้ายกับสามเหลี่ยม CQP

ดังนั้น $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{FA}}{\overline{AE}}$ นั่นคือ $\overline{PC}=\dfrac{h(d-e)}{d}$

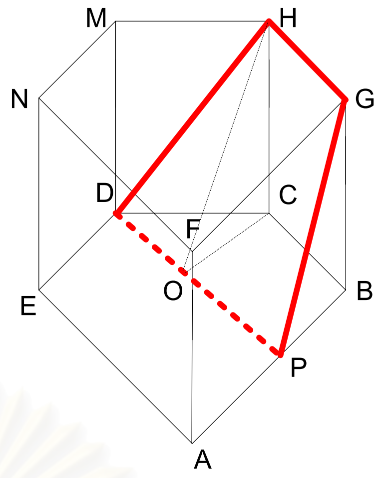
เพราะฉะนั้นปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.9 เท่ากับ $\dfrac{d^2h}{2}-\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times(d-e)^2\times\dfrac{h(d-e)}{d})$

$$=\frac{d^2h}{2}-\frac{h(d-e)^3}{6d}$$

$$= V_8$$



รูปที่ 4.10



รูปที่ 4.11

พิจารณารูปที่ 4.10 ลากเส้นตรง DA และเส้นตรง DF เราจะได้ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.10 เท่ากับ ผลบวกของปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า ABDF และ ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด AFPED

ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า ABDF เท่ากับ $\frac{1}{3}\times\frac{d^2h}{2}$ และ ปริมาตรของรูปทรงพีระมิด AFPED

เท่ากับ $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times(\overline{PE}+\overline{AF})\times\overline{DE})=\frac{e^2h}{6}+\frac{edh}{6}$

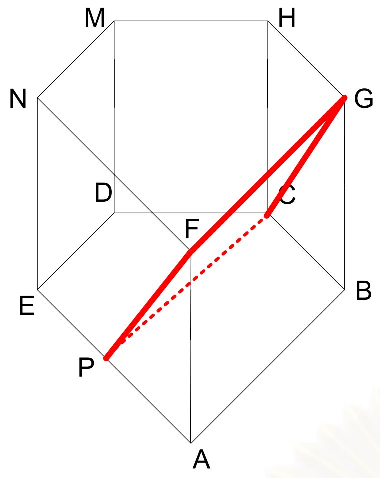
ดังนั้น ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.10 เท่ากับ $\frac{d^2h}{6}+\frac{e^2h}{6}+\frac{edh}{6} = V_9$

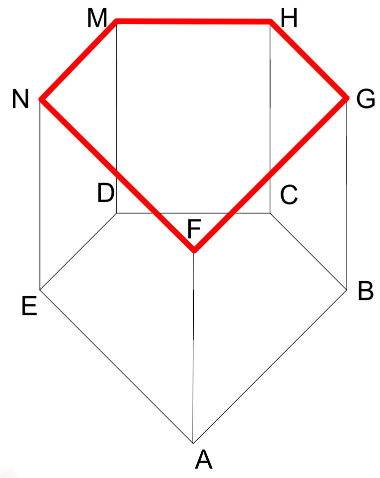
พิจารณารูปที่ 4.11 ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง PD ลากเส้นตรง OH และเส้นตรง OC จะได้ ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.11 เท่ากับ ผลบวกของปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า ODCH และ ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า OCBPHG

ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า ODCH เท่ากับ $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times(d-e)^2\times h)=\frac{h(d-e)^2}{6}$

ปริมาตรของรูปทรงห้าหน้า OCBPHG เท่ากับ $\frac{1}{2}\times(d-e)\times e\times h=\frac{eh(d-e)}{2}$

ดังนั้น ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.11 เท่ากับ $\frac{eh(d-e)}{2}+\frac{h(d-e)^2}{6} = V_{10}$

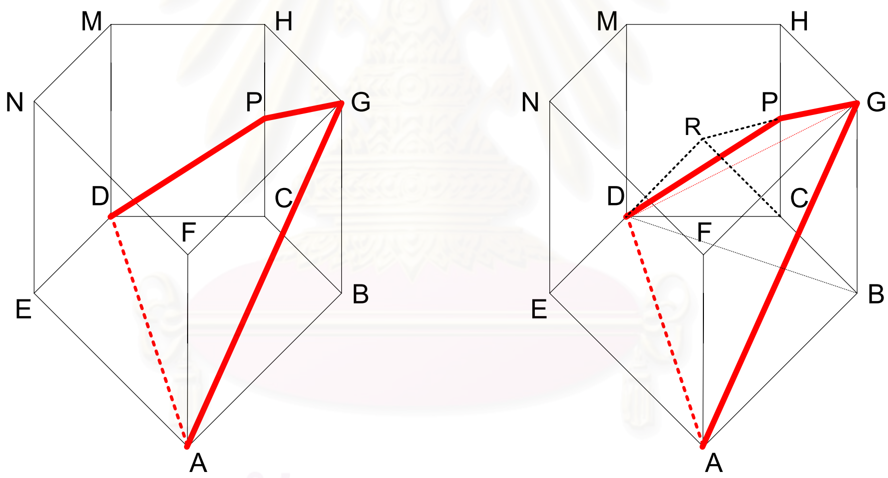




รูปที่ 4.12 รูปที่ 4.13

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.12 สามารถคำนวณได้เท่ากับ $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times h = \frac{edh}{2}$ = V_{11}

ปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.13 เท่ากับ $\frac{d^2h}{2}+edh-\frac{e^2h}{2}$ = V_{13}



รูปที่ 4.14

จากรูปที่ 4.14 ให้ P เป็นจุดบนด้าน CH ซึ่งระนาบของของเหลวผ่าน ลากเส้นตรง BD เส้นตรง DG และลากเส้นตรง ED และเส้นตรง BC พบกันที่ จุด R ดังนั้นปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.14 เท่ากับผลบวกของปริมาตรของรูปทรงพีระมิด BCPGD และ ปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า ADBG ด้วยวิธีคำนวณเดียวกับกรณีอื่นๆ ที่แล้วมา สามารถคำนวณปริมาตรของเหลวในรูปที่ 4.14 ได้เท่ากับ $\frac{d^2h}{6}+\frac{eh(d-e)}{6}(\frac{d^2-e^2}{d^2}+1)$ = V_{12}

<u>หมายเหตุ</u> วิธีที่ทำให้ได้ปริมาตรของเหลวที่แตกต่างกัน จากการตวงของเหลวด้วยภาชนะ M(d,e,h) เท่ากับ 13 วิธี

บทนิยาม 4.2 เครื่องตวงกึ่งสากลขนาด v ลูกบาศก์หน่วย (semi – v universal measuring devices) คือ เครื่องตวงไร้มาตรวัด แต่สามารถตวงของเหลวได้ทุก ๆ ปริมาตร ตั้งแต่ 1 ลูกบาศก์หน่วย จนถึง v ลูกบาศก์หน่วย สำหรับ v ใด ๆ ที่เป็นจำนวนเต็มบวก และ v ไม่จำเป็นต้องเป็นความจุเต็มที่ของเครื่องตวง

ตัวอย่าง จากทฤษฎีบท 4.1 ภาชนะ M(4,1,6) สามารถตวงของเหลวได้ปริมาตรที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนี้ V_1 = 3 ลูกบาศก์หน่วย V_2 = 4 ลูกบาศก์หน่วย V_5 = 10 ลูกบาศก์หน่วย V_{11} = 12 ลูกบาศก์หน่วย V_3 = 16 ลูกบาศก์หน่วย V_{10} = 18 ลูกบาศก์หน่วย V_9 = 21 ลูกบาศก์หน่วย และ V_{13} = 69 ลูกบาศก์หน่วย เนื่องจาก (3 , 4 , 10 , 12 , 16 , 18 , 21 , 69)ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด ดังนั้นภาชนะ M นี้ไม่สามารถตวงปริมาตรของเหลวได้ทุกค่าที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ลูกบาศก์หน่วยจนถึง 69 ลูกบาศก์หน่วย
เราจึงพิจารณา (3 , 4 , 10 , 12 , 16 , 18 , 21) ซึ่งเป็นลำดับก่อกำเนิด ดังนั้น เราสามารถใช้ภาชนะ M(4,1,6) ตวงปริมาตรของเหลวได้ทุกค่าที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ลูกบาศก์หน่วยจนถึง 21 ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ภาชนะ M(4,1,6) เป็น เครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 21 ลูกบาศก์หน่วย □

ต่อไปเราหาปริมาตรสูงสุดที่ภาชนะ M(*d,e,h*) สามารถตวงได้ และทำให้ภาชนะ M เป็นเครื่องตวงกึ่งสากลด้วย

ทฤษฎีบท 4.3 จะมีเครื่องตวงกึ่งสากล M(*d,e,h*) ขนาด 7 ลูกบาศก์หน่วย 13 ลูกบาศก์หน่วย 19 ลูกบาศก์หน่วย 21 ลูกบาศก์หน่วย 31 ลูกบาศก์หน่วย 37 ลูกบาศก์หน่วย และ 43 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ จากฐานของภาชนะ M(*d,e,h*) จะได้ว่า $e = \lambda d$ ซึ่ง $0 < \lambda < 1$ และจาก ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า

$$V_1 = \frac{d^2 h\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_2 = \frac{d^2 h\lambda}{6}$$

$$V_3 = \frac{d^2 h}{6}$$

$$V_4 = \frac{d^2 h}{6}\left(2\lambda + \frac{2\lambda^2}{1+\lambda} + 1 - \lambda^2\right)$$

$$V_5 = \frac{d^2 h}{6}(3\lambda - 2\lambda^2)$$

$$V_6 = \frac{d^2 h}{6}\left(2\lambda + \frac{2\lambda}{1+\lambda} + 2(1-\lambda^2)\right)$$

$$V_7 = \frac{d^2h}{6}(3-(\lambda+2)(1-\lambda)^2)$$

$$V_8 = \frac{d^2h}{6}(3-(1-\lambda)^3)$$

$$V_9 = \frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2)$$

$$V_{10} = \frac{d^2h}{6}(3\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2)$$

$$V_{11} = \frac{d^2h}{6}(3\lambda)$$

$$V_{12} = \frac{d^2h}{6}(1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2))$$

$$V_{13} = \frac{d^2h}{6}(3+6\lambda-3\lambda^2)$$

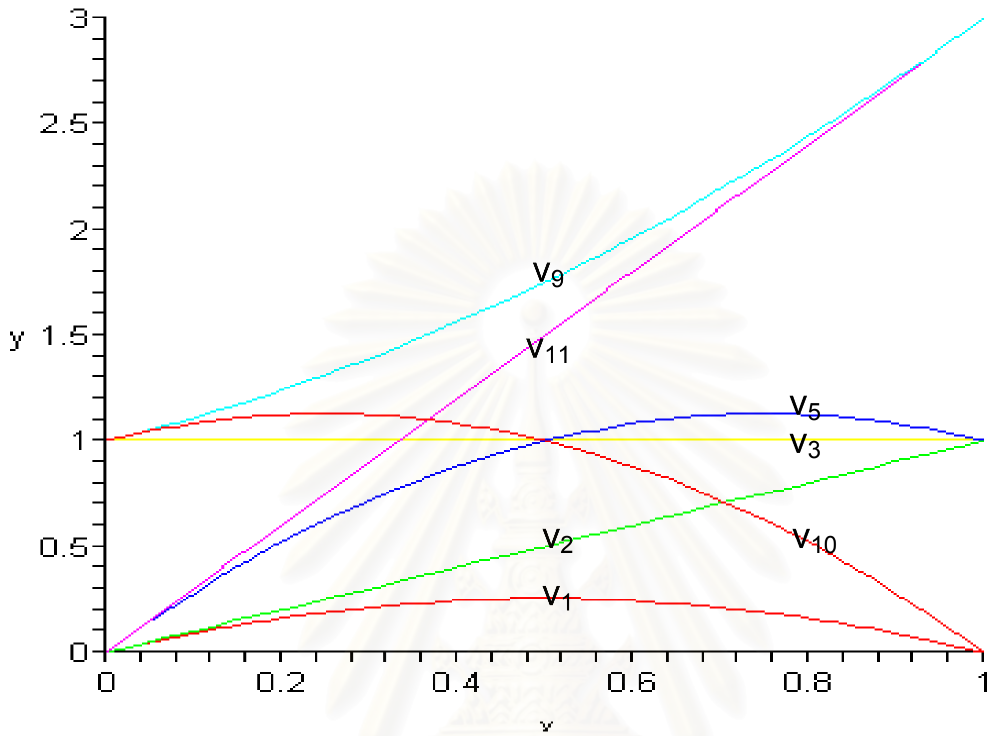
เราจะเห็นทุกค่าปริมาตร มีพจน์ร่วมคือ $\frac{d^2h}{6}$ เนื่องจากเราต้องการให้ปริมาตรต่างๆ เป็นจำนวนเต็ม แต่หากว่า λ เป็นจำนวนอตรรกยะ จึงเป็นการยากหรือแทบจะเป็นไปไม่ได้ที่จะทำให้ค่าปริมาตรต่างๆ เป็นจำนวนเต็ม เช่น เมื่อ λ เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ว่า $1+\lambda+\lambda^2$ ต้องเป็นจำนวนอตรรกยะด้วย ดังนั้น พิจารณา $V_9 = \frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2)$ นั่นคือ $\frac{d^2h}{6}$ ต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ ทำให้ $V_3 = \frac{d^2h}{6}$ เป็นจำนวนอตรรกยะด้วย ซึ่งเราไม่ต้องการผลเช่นนี้

ดังนั้น เราพิจารณาเฉพาะค่า λ ที่เป็นจำนวนตรรกยะ

เนื่องจาก V_{13} เป็นความจุเต็มที่ของเครื่องตวง $M(d,e,h)$ และ V_{13} มีค่ามากกว่าค่าปริมาตรอื่น ๆ อย่างมาก ทำให้ลำดับของปริมาตรไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด จึงทำให้เครื่องตวง $M(d,e,h)$ ไม่เป็นเครื่องตวงสากล

โดยอาศัยทฤษฎีบท 1.5 และข้อสังเกต 1.6 เราจะพิจารณาเฉพาะพหุนามของ λ ที่มีดีกรี 1 และ 2 ยกเว้น V_{13}

สร้างกราฟพหุนามของ λ ที่มีดีกรี 1 และ 2 ดังรูปที่ 4.15
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนพหุนามของ λ



รูป 4.15 แสดงกราฟพหุนามของ λ ที่มีดีกรี 1 และ 2

จากการคำนวณเราได้ช่วงของ λ และค่าปริมาตรที่สมนัยกันเรียงจากน้อยไปมาก ดังตารางต่อไปนี้

ช่วงของ λ	ค่าปริมาตรเรียงจากน้อยไปมาก
$(0,\frac{1}{3})$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_{11} \le V_3 \le V_{10} \le V_9$
$[\frac{1}{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_3 \le V_{11} \le V_{10} \le V_9$
$(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_3 \le V_{10} \le V_{11} \le V_9$
$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$	$V_1 \le V_2 \le V_{10} \le V_3 \le V_5 \le V_{11} \le V_9$
$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	$V_1 \le V_{10} \le V_2 \le V_3 \le V_5 \le V_{11} \le V_9$

ตารางที่ 4.1 แสดงช่วงของ λ และค่าปริมาตรที่สมนัยกันเรียงจากน้อยไปมาก

<u>กรณีที่</u> 1 $\lambda \in (0,\frac{1}{3})$ เราจะแสดงว่า มีเครื่องตวงกึ่งสากล M ขนาด 21 ลูกบาศก์หน่วย 31 ลูกบาศก์หน่วยหรือ 43 ลูกบาศก์หน่วย

พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h\lambda^2}{6}$$

$$V_5 - V_2 = \frac{d^2h2\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_{11} - V_5 = \frac{d^2h2\lambda^2}{6}$$

$$V_3 - V_{11} = \frac{d^2h(1-3\lambda)}{6}$$

$$V_{10} - V_3 = \frac{d^2h\lambda(1-2\lambda)}{6}$$

$$V_9 - V_{10} = \frac{d^2h3\lambda^2}{6}$$

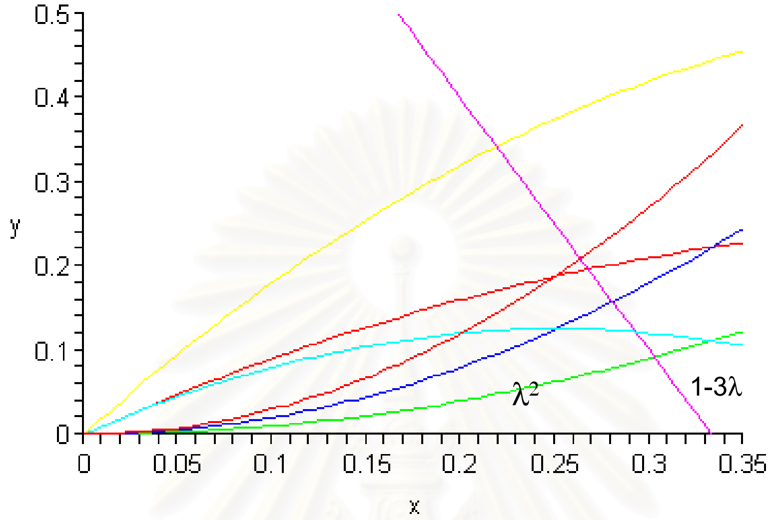
สังเกตว่าผลต่างเหล่านี้มี $\frac{d^2h}{6}$ เป็นตัวร่วม เราต้องการให้ผลต่างเหล่านี้เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมด สร้างเซต D = $\{\lambda(1-\lambda), \lambda^2, 2\lambda(1-\lambda), 2\lambda^2, 1-3\lambda, \lambda(1-2\lambda), 3\lambda^2\}$ และให้

H = $\{(\lambda-\lambda^2)i + (\lambda^2)j + (2\lambda-2\lambda^2)k + (2\lambda^2)l + (1\text{-}3\lambda)m + (\lambda-2\lambda^2)n + (3\lambda^2)p$

โดยที่ $i, j, k, l, m, n, p \in \{0,1\}$ และ i, j, k, l, m, n, p ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน $\}$

ดังนั้น $|H| = 2^7 - 1 = 127$

พิจารณาเซต D = $\{\lambda(1-\lambda), \lambda^2, 2\lambda(1-\lambda), 2\lambda^2, 1-3\lambda, \lambda(1-2\lambda), 3\lambda^2\}$ จากกราฟ (รูปที่ 4.16) โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนพหุนามของ λ



รูปที่ 4.16 แสดงกราฟพหุนามของ λ ในเซต D

จากรูปและการคำนวณจุดตัดของกราฟ เราจะได้ว่า λ^2 เป็นพหุนามค่าน้อยสุด ในช่วง $(0, \frac{-3+\sqrt{13}}{2})$

ดังนั้น $\frac{d^2h\lambda^2}{6} = 1$ และ $\frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \leq 127$

พิจารณาระบบสมการ
$$\frac{d^2h\lambda^2}{6} = 1 \qquad (4.1)$$
$$\frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \leq 127 \qquad (4.2)$$

ดังนั้น $\frac{(4.2)}{(4.1)}$ จะได้ $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2} \leq 127$

เพราะฉะนั้น $\frac{\lambda+1}{\lambda^2} \leq 126$

เนื่องจากว่า ค่าปริมาตรที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $\frac{\lambda+1}{\lambda^2} \in \{1,2,3,\ldots,126\}$

ก่อนที่จะพิสูจน์ต่อไป จะขอพิสูจน์ทฤษฎีบทตั้ง 4.5 ดังนี้

ทฤษฎีบทตั้ง 4.4 ให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะในช่วง (0,1) จะได้ว่า $\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2}$ จะเป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก p ซึ่ง $\lambda = \dfrac{1}{p}$

พิสูจน์ ($\longleftarrow$) สมมติว่า มีจำนวนเต็มบวก p ซึ่ง $\lambda = \dfrac{1}{p}$

ดังนั้น $\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2} = \dfrac{1+\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}} = p(p+1)$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม

($\longrightarrow$) สมมติว่า $\lambda = \dfrac{q}{p}$ โดยที่ $q \neq 1$ และ $(p,q) = 1$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2} = \dfrac{1+\frac{q}{p}}{\frac{q^2}{p^2}} = \dfrac{p(p+q)}{q^2}$

เนื่องจาก $\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น q^2 หาร $p(p+q)$ ลงตัว นั่นคือ q หาร $p(p+q)$ ลงตัว และเนื่องจาก $(p,q) = 1$ ดังนั้น q หาร $p+q$ ลงตัว นั่นคือ q หาร p ลงตัว เราก็จะได้ว่า q หาร (p,q) ลงตัว ทำให้ได้ q หาร 1 ลงตัว ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน

เนื่องจาก $\lambda \in (0,\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2})$ โดยทฤษฎีบทตั้ง 4.4 ทำให้ได้ $\lambda = \{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\ldots,\dfrac{1}{10}\}$ ตารางที่ 4.2 แสดงค่าของ λ ปริมาตรที่สมนัยกัน และการเป็นลำดับก่อกำเนิด

λ	d^2h	ปริมาตร (ลูกบาศก์หน่วย)	ลำดับก่อกำเนิด	ปริมาตรสูงสุด
$\frac{1}{4}$	16×6	$V_1 = 3$, $V_2 = 4$, $V_5 = 10$, $V_{11} = 12$ $V_3 = 16$, $V_{10} = 18$, $V_9 = 21$	เป็น	21
$\frac{1}{5}$	25×6	$V_1 = 4$, $V_2 = 5$, $V_5 = 13$, $V_{11} = 15$ $V_3 = 25$,$V_{10} = 28$, $V_9 = 31$	เป็น	31
$\frac{1}{6}$	36×6	$V_1 = 5$, $V_2 = 6$, $V_5 = 16$, $V_{11} = 18$ $V_3 = 36$,$V_{10} = 40$, $V_9 = 43$	เป็น	43
$\frac{1}{7}$	49×6	$V_1 = 6$, $V_2 = 7$, $V_5 = 19$, $V_{11} = 21$ $V_3 = 49$, $V_{10} = 54$, $V_9 = 57$	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{8}$	64×6	$V_1 = 7$, $V_2 = 8$, $V_5 = 22$, $V_{11} = 24$ $V_3 = 60$,$V_{10} = 70$, $V_9 = 73$	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{9}$	81×6	$V_1 = 8$, $V_2 = 9$, $V_5 = 25$, $V_{11} = 27$ $V_3 = 81$,$V_{10} = 88$, $V_9 = 91$	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{10}$	100×6	$V_1 = 9$, $V_2 = 10$, $V_5 = 28$, $V_{11} = 30$ $V_3 = 100$,$V_{10} = 108$, $V_9 = 111$	ไม่เป็น	-

ตารางที่ 4.2

เมื่อ $\lambda \in (\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \frac{1}{3})$ เราจะได้ว่า $1-3\lambda$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด

ดังนั้น $\frac{d^2h(1-3\lambda)}{6} = 1$ และ $\frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \le 127$

พิจารณาระบบสมการ $$\frac{d^2h(1-3\lambda)}{6} = 1 \tag{4.3}$$

$$\frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \le 127 \tag{4.4}$$

ดังนั้น $\frac{(4.4)}{(4.3)}$ จะได้ $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{1-3\lambda} \le 127$

เพราะฉะนั้น $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{1-3\lambda} = k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$

ซึ่งเราจะได้ $\lambda = \frac{-(3k+1)+\sqrt{9k^2+10k-3}}{2}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$

เนื่องจาก λ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $9k^2+10k-3$ จะต้องเป็นจำนวนกำลังสอง และจาก คำนวณ เราพบว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้ $9k^2+10k-3$ เป็นจำนวนกำลังสอง

จากการคำนวณพบว่า ไม่มีค่า λ ที่เป็นจำนวนตรรกยะ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

สรุปว่าในกรณีที่ 1 เราได้เครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 21 ลูกบาศก์หน่วย 31 ลูกบาศก์หน่วย และ 43 ลูกบาศก์หน่วย

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda \in [\frac{1}{3}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$ เราจะแสดงว่ามีเครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 13 ลูกบาศก์หน่วย

จากตารางที่ 4.1 พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h\lambda^2}{6}$$

$$V_5 - V_2 = \frac{d^2h2\lambda(1-\lambda)}{6}$$

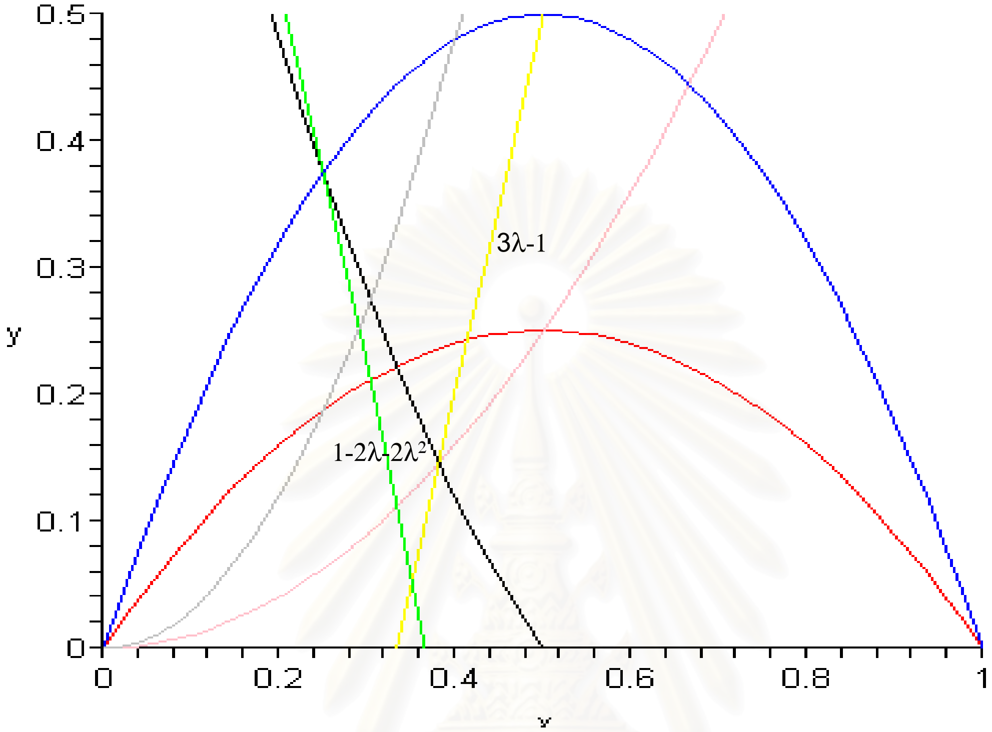
$$V_3 - V_5 = \frac{d^2h(1-3\lambda+2\lambda^2)}{6}$$

$$V_{11} - V_3 = \frac{d^2h(3\lambda-1)}{6}$$

$$V_{10} - V_{11} = \frac{d^2h(1-2\lambda-2\lambda^2)}{6}$$

$$V_9 - V_{10} = \frac{d^2h3\lambda^2}{6}$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 พิจารณา รูปที่ 4.17 แสดงกราฟพหุนามของ λ โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนพหุนามของ λ



รูปที่ 4.17 แสดงกราฟพหุนามของ λ

จากกราฟพหุนามของ λ (รูปที่ 4.17) และการคำนวณจุดตัดของกราฟ ทำให้เราต้องแบ่ง λ ออกเป็น สองกรณีย่อย ดังนี้

<u>กรณีย่อย 2.1</u> $\lambda \in [\frac{1}{3}, \frac{-5+\sqrt{41}}{4})$

จะได้ว่า $3\lambda - 1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด

ดังนั้น ให้ $$\frac{d^2 h(3\lambda - 1)}{6} = 1 \quad (4.5)$$

และ $$\frac{d^2 h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \leq 127 \quad (4.6)$$

ดังนั้น $\frac{(4.6)}{(4.5)}$ จะได้ $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3\lambda-1} \leq 127$

นั่นคือ $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3\lambda-1} = k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$

ซึ่งเราจะได้ $\lambda = \frac{3k-1 \pm \sqrt{9k^2-10k-3}}{2}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$

เนื่องจาก λ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $9k^2-10k-3$ จะต้องเป็นจำนวนกำลังสอง และจากคำนวณ เราพบว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้ $9k^2-10k-3$ เป็นจำนวนกำลังสอง

<u>กรณีย่อย 2.2</u> $\lambda \in [\frac{-5+\sqrt{41}}{4}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$

จะได้ $1-2\lambda-2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด

ดังนั้น ให้ $$\frac{d^2h(1-2\lambda-2\lambda^2)}{6} = 1 \tag{4.7}$$

และ $$\frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \le 127 \tag{4.8}$$

ดังนั้น $\frac{(4.8)}{(4.7)}$ จะได้ $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1-2\lambda-2\lambda^2} \le 127$

นั่นคือ $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1-2\lambda-2\lambda^2} = k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$

ซึ่งเราจะได้ $\lambda = \frac{-(1+2k)+\sqrt{12k^2-3}}{2(1+2k)}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$

เนื่องจาก λ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $12k^2-3$ จะต้องเป็นจำนวนกำลังสอง และจากตารางที่ 4.3 พบว่า มีเพียง $k = 1$ และ $k = 13$ เท่านั้น ที่ทำให้ $12k^2-3$ เป็นจำนวนกำลังสอง แต่ในกรณีที่ $k = 1$ ทำให้ได้ค่า $\lambda = 0$ ซึ่งใช้ไม่ได้ ในกรณีที่ $k = 13$ จะได้ $\lambda = \frac{1}{3} \notin [\frac{-5+\sqrt{41}}{4}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$

พิจารณาที่จุดขอบ เมื่อ $\lambda = \frac{1}{3}$ และให้ $d^2h = 9 \times 6$ จะได้ว่า

$V_1 = 2$ ลูกบาศก์หน่วย $V_2 = 3$ ลูกบาศก์หน่วย $V_5 = 7$ ลูกบาศก์หน่วย $V_3 = 9$ ลูกบาศก์หน่วย

$V_{11} = 9$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{10} = 10$ ลูกบาศก์หน่วย $V_9 = 13$ ลูกบาศก์หน่วย

และเราจะพบว่า (2, 3, 7, 9, 9, 10, 13) เป็นลำดับก่อกำเนิด

ดังนั้นในกรณีที่ 2 เราจะได้ เครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 13 ลูกบาศก์หน่วย

k	$12k^2-3$	k	$12k^2-3$	k	$12k^2-3$	k	$12k^2-3$	k	$12k^2-3$
1	9	27	8745	53	33705	79	74889	105	132297
2	45	28	9405	54	34989	80	76797	106	134829
3	105	29	10089	55	36297	81	78729	107	137385
4	189	30	10797	56	37629	82	80685	108	139965
5	297	31	11529	57	38985	83	82665	109	142569
6	429	32	12285	58	40365	84	84669	110	145197
7	585	33	13065	59	41769	85	86697	111	147849
8	765	34	13869	60	43197	86	88749	112	150525
9	969	35	14697	61	44649	87	90825	113	153225
10	1197	36	15549	62	46125	88	92925	114	155949
11	1449	37	16425	63	47625	89	95049	115	158697
12	1725	38	17325	64	49149	90	97197	116	161469
13	2025	39	18249	65	50697	91	99369	117	164265
14	2349	40	19197	66	52269	92	101565	118	167085
15	2697	41	20169	67	53865	93	103785	119	169929
16	3069	42	21165	68	55485	94	106029	120	172797
17	3465	43	22185	69	57129	95	108297	121	175689
18	3885	44	23229	70	58797	96	110589	122	178605
19	4329	45	24297	71	60489	97	112905	123	181545
20	4797	46	25389	72	62205	98	115245	124	184509
21	5289	47	26505	73	63945	99	117609	125	187497
22	5805	48	27645	74	65709	100	119997	126	190509
23	6345	49	28809	75	67497	101	122409	127	193545
24	6909	50	29997	76	69309	102	124845	128	196605
25	7497	51	31209	77	71145	103	127305	129	199689
26	8109	52	32445	78	73005	104	129789	130	202797

ตารางที่ 4.3 แสดงค่าของ $12k^2-3$ เมื่อ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 130\}$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda \in (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.1 พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h\lambda^2}{6}$$

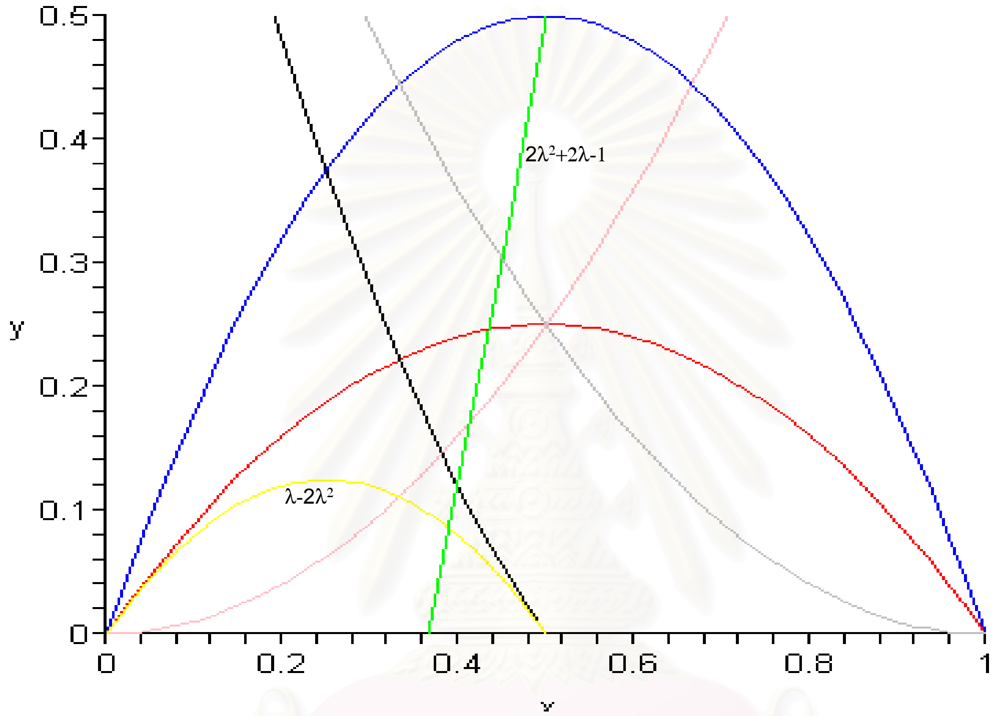
$$V_5 - V_2 = \frac{d^2h2\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_3 - V_5 = \frac{d^2h(1-3\lambda+2\lambda^2)}{6}$$

$$V_{10} - V_3 = \frac{d^2h\lambda(1-2\lambda)}{6}$$

$$V_{11} - V_{10} = \frac{d^2h(2\lambda^2 + 2\lambda - 1)}{6}$$
$$V_9 - V_{11} = \frac{d^2h(1 - 2\lambda + \lambda^2)}{6}$$

พิจารณากราฟพหุนามของ λ โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนพหุนามของ λ



รูปที่ 4.18 แสดงกราฟพหุนามของ λ

จากกราฟพหุนามของ λ (รูปที่ 4.18) และการคำนวณจุดตัดของกราฟ ทำให้เราต้องแบ่ง λ ออกเป็น สองกรณีย่อย ดังนี้

<u>กรณีย่อย 3.1</u> $\lambda \in (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{8})$

สำหรับ λ ในช่วงนี้ เมื่อพิจารณาจากกราฟเราจะเห็นว่า $2\lambda^2 + 2\lambda - 1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด ดังนั้น

จะได้ว่า $$\frac{d^2h(2\lambda^2 + 2\lambda - 1)}{6} = 1 \qquad (4.9)$$

และ $$\frac{d^2h}{6}(1 + \lambda + \lambda^2) \leq 127 \qquad (4.10)$$

ดังนั้น $\frac{(4.10)}{(4.9)}$ จะได้ $$\frac{1 + \lambda + \lambda^2}{2\lambda^2 + 2\lambda - 1} \leq 127$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{2\lambda^2+2\lambda-1} = k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$ และจาก

การแก้สมการเราจะได้ว่า $\lambda = \dfrac{(1-2k)+\sqrt{12k^2-3}}{2(2k-1)}$ ซึ่งจากตารางที่ 4.3 เราได้ค่า $k = 13$ และ

เมื่อแทนค่า k เราก็จะได้ว่า $\lambda = \dfrac{2}{5}$ แต่เนื่องจาก $\lambda = \dfrac{2}{5} \notin (\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{8})$

<u>กรณีย่อย 3.2</u> $\lambda \in (\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}, \dfrac{1}{2})$

ในกรณีนี้ เราจะเห็นว่า $\lambda - 2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด และด้วยวิธีการเดียวกันกับกรณีอื่น ๆ เราจะได้ว่า

$$\frac{d^2h(\lambda-2\lambda^2)}{6} = 1 \tag{4.11}$$

$$\frac{d^2h}{6}(1+\lambda+\lambda^2) \leq 127 \tag{4.12}$$

ดังนั้น $\dfrac{(4.12)}{(4.11)}$ จะได้ $\dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda-2\lambda^2} \leq 127$

นั่นคือ $\dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda-2\lambda^2} = k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 127\}$ จากการแก้สมการจะได้

$\lambda = \dfrac{(k-1)\pm\sqrt{k^2-10k-3}}{2(2k+1)}$ และเนื่องจากว่า λ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $k^2-10k-3$

จะต้องเป็นจำนวนกำลังสอง จากการแทนค่า k ตั้งแต่ $1, 2, 3, \ldots, 127$ เราก็จะพบว่า $k = 13$

ทำให้ $k^2-10k-3$ เป็นจำนวนกำลังสองและทำให้ $\lambda = \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}$ แต่เนื่องจาก

$\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9} \notin (\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}, \dfrac{1}{2})$ ดังนั้นในกรณีนี้เราไม่ได้ค่า λ เพื่อที่จะนำมาคำนวณหาเครื่องตวงกึ่งสากลเลย

<u>กรณีที่ 4</u> $\lambda \in [\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ เราจะแสดงว่ามีเครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 7 ลูกบาศก์หน่วย หรือ 19 ลูกบาศก์หน่วยในทำนองเดียวกันกับกรณีที่แล้ว พิจารณาผลต่างของปริมาตรต่อไปนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h\lambda^2}{6}$$

$$V_{10} - V_2 = \frac{d^2h(1-2\lambda^2)}{6}$$

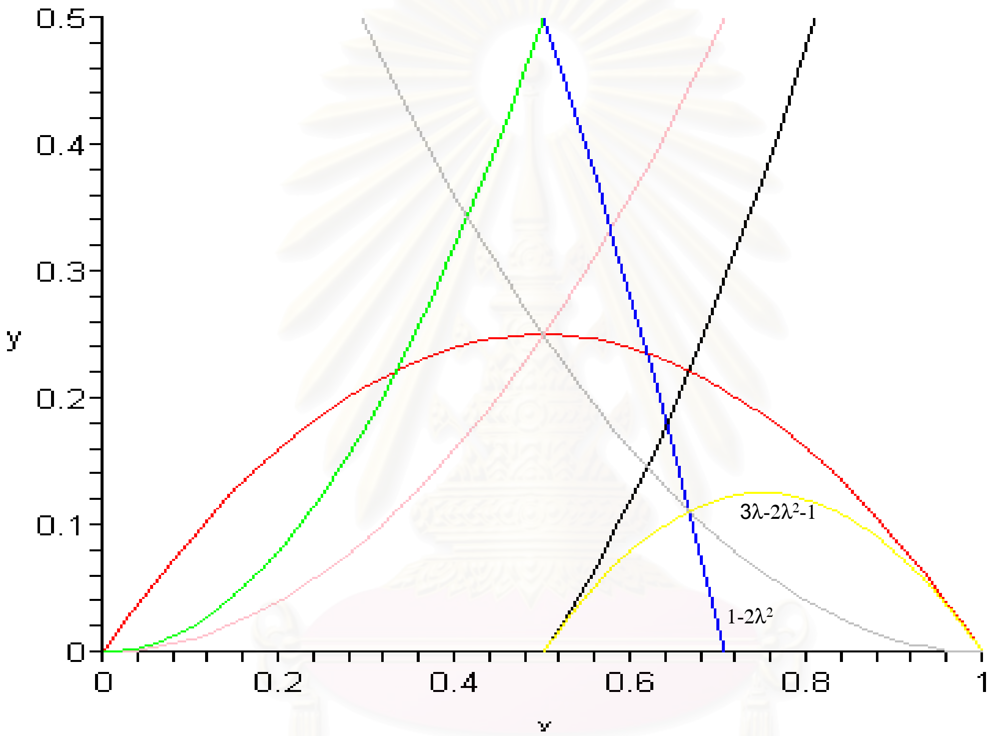
$$V_3 - V_{10} = \frac{d^2h(2\lambda^2-\lambda)}{6}$$

$$V_5 - V_3 = \frac{d^2h(3\lambda - 2\lambda^2 - 1)}{6}$$

$$V_{11} - V_5 = \frac{d^2h2\lambda^2}{6}$$

$$V_9 - V_{11} = \frac{d^2h(1 - 2\lambda + \lambda^2)}{6}$$

พิจารณากราฟพหุนามของ λ โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนพหุนามของ λ



รูปที่ 4.19 แสดงกราฟพหุนามของ λ

จากกราฟพหุนามของ λ (รูปที่ 4.19) และการคำนวณจุดตัดของกราฟ ทำให้เราต้องแบ่ง λ ออกเป็น สองกรณีย่อย ดังนี้

<u>กรณีย่อย 4.1</u> $\lambda \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

เมื่อพิจารณาจากกราฟจะเห็นว่า ในช่วงนี้ พหุนามค่าน้อยสุดคือ $3\lambda - 2\lambda^2 - 1$ และด้วยวิธีการเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{d^2h(3\lambda - 2\lambda^2 - 1)}{6} = 1 \qquad (4.13)$$

$$\frac{d^2h}{6}(1 + \lambda + \lambda^2) \leq 127 \qquad (4.14)$$

ดังนั้น $\frac{(4.14)}{(4.13)}$ จะได้ $\frac{1 + \lambda + \lambda^2}{3\lambda - 2\lambda^2 - 1} \leq 127$

นั่นคือ $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3\lambda-2\lambda^2-1} = k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \{1, 2, 3, \ldots,127\}$ จากการแก้สมการจะได้ $\lambda = \frac{(3k-1)\pm\sqrt{k^2-18k-3}}{2(2k+1)}$ และเมื่อแทนค่าเราพบว่ามีเพียง $k = 31$ เท่านั้นที่ทำให้ $k^2-18k-3$ เป็นจำนวนกำลังสอง ทำให้เราได้ว่า $\lambda = \frac{8}{9},\frac{4}{7}$ แต่เนื่องจาก $\frac{8}{9} \notin (\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ ดังนั้นเราได้ค่า $\lambda = \frac{4}{7}$ และจากการแทนค่า $\lambda = \frac{4}{7}$ และความจริงที่ว่า $k = 31$

ทำให้เราได้ $V_1 = 4$ ลูกบาศก์หน่วย $V_2 = \frac{28}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{10} = 15$ ลูกบาศก์หน่วย $V_3 = \frac{49}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย $V_5 = \frac{52}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{11} = 18$ ลูกบาศก์หน่วย $V_9 = 31$ ลูกบาศก์หน่วย (เมื่อเราเลือกค่า $\frac{d^2h}{6}$ ให้ดีพอ)

แต่จากทฤษฎีบท 1.4 ทำให้ได้ว่า $(4, \frac{28}{3}, 15, \frac{49}{3}, \frac{52}{3}, 18, 31)$ ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด

พิจารณา $\lambda = \frac{1}{2}$ และให้ $d^2h = 4\times 6$ จะได้

$V_1 = 1$ ลูกบาศก์หน่วย $V_2 = 2$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{10} = 4$ ลูกบาศก์หน่วย $V_3 = 4$ลูกบาศก์หน่วย $V_5 = 4$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{11} = 6$ ลูกบาศก์หน่วย $V_9 = 7$ ลูกบาศก์หน่วย

และเราจะเห็นว่า (1, 2, 4, 4, 4, 6, 7) เป็นลำดับก่อกำเนิด ดังนั้นเราได้เครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 7 ลูกบาศก์หน่วย

<u>กรณีย่อย 4.2</u> $\lambda \in [\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$

ในกรณีนี้ จากกราฟจะเห็นว่า $1-2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด ด้วยวิธีการเดียวกัน คำนวณได้ว่า $\lambda = \frac{-1+\sqrt{8k^2-4k-3}}{2(2k+1)}$ และจากการแทนค่า k ตั้งแต่ 1, 2, 3, …,127 เราพบว่า $k = 7$ ทำให้ $\lambda = \frac{3}{5}$ และ $k = 19$ ทำให้ $\lambda = \frac{2}{3}$ เนื่องจาก $\frac{3}{5} \notin [\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$ เพราะฉะนั้น $\lambda = \frac{2}{3}$ เท่านั้น

พิจารณา เมื่อ $\lambda = \frac{2}{3}$ และให้ $d^2h = 9\times 6$

$V_1 = 2$ ลูกบาศก์หน่วย $V_2 = 6$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{10} = 7$ ลูกบาศก์หน่วย $V_3 = 9$ ลูกบาศก์หน่วย $V_5 = 10$ ลูกบาศก์หน่วย $V_{11} = 18$ ลูกบาศก์หน่วย $V_9 = 19$ ลูกบาศก์หน่วย

จะเห็นว่า (2, 6, 7, 9, 10, 18, 19) เป็นลำดับก่อกำเนิด ดังนั้นเราได้เครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 19 ลูกบาศก์หน่วย

<u>กรณีที่ 5</u> $\lambda \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ เราจะแสดงว่ามีเครื่องตวงกึ่งสากลขนาด 37 ลูกบาศก์หน่วย

พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h\lambda(1-\lambda)}{6}$$

$$V_{10} - V_1 = \frac{d^2h(1-\lambda^2)}{6}$$

$$V_2 - V_{10} = \frac{d^2h(2\lambda^2-1)}{6}$$

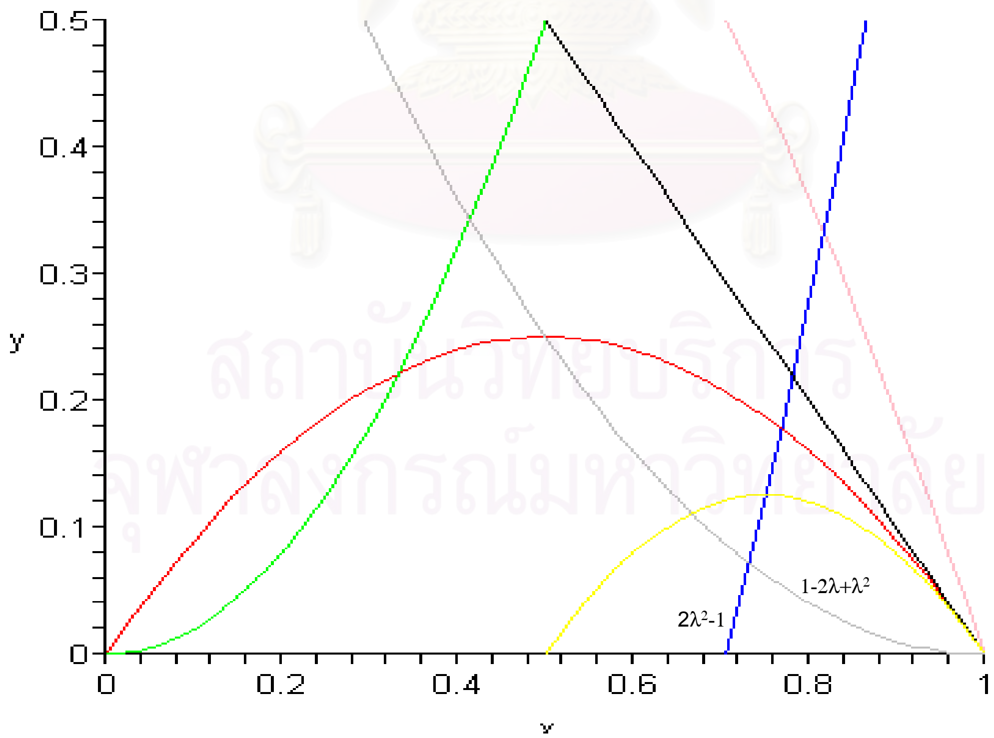
$$V_3 - V_2 = \frac{d^2h(1-\lambda)}{6}$$

$$V_5 - V_3 = \frac{d^2h(3\lambda-2\lambda^2-1)}{6}$$

$$V_{11} - V_5 = \frac{d^2h2\lambda^2}{6}$$

$$V_9 - V_{11} = \frac{d^2h(1-2\lambda+\lambda^2)}{6}$$

พิจารณากราฟพหุนามของ λ โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนพหุนามของ λ



รูปที่ 4.20 แสดงกราฟพหุนามของ λ

จากกราฟพหุนามของ λ (รูปที่ 4.20) และการคำนวณจุดตัดของกราฟ ทำให้เราต้องแบ่ง λ ออกเป็น สองกรณีย่อย ดังนี้

<u>กรณีย่อย 5.1</u> $\lambda \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\sqrt{3})$

จากกราฟจะเห็นได้ชัดว่า $2\lambda^2-1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด และด้วยวิธีการเดียวกันเราจะได้ว่า $\lambda = \frac{1+\sqrt{8k^2+4k-3}}{2(2k-1)}$ และจากการแทนค่า k ตั้งแต่ 1, 2, 3, …,127 เราพบว่า $k = 39$ ทำให้ $\lambda = \frac{8}{11}$ และ $k = 109$ ทำให้ $\lambda = \frac{5}{7}$ ดังนั้น เราได้ว่า $\lambda = \frac{8}{11}$ และ $\frac{5}{7}$ จากการแทนค่าเพื่อหาปริมาตร เราพบว่าค่าที่ได้ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด

<u>กรณีย่อย 5.2</u> $\lambda \in (-1+\sqrt{3}, 1)$

เมื่อพิจารณาจากกราฟ (รูปที่ 4.20) เราจะเห็นได้ทันทีว่า $1-2\lambda+\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด จากการคำนวณด้วยวิธีเดียวกันเราจะพบว่า $\lambda = \frac{(2k+1)\pm\sqrt{12k-3}}{2(k-1)}$ และ แทนค่า k ตั้งแต่ 1, 2, 3, …,127 เราจะได้ว่า $\lambda = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ เมื่อ k = 37, 61, 91, 127 ตามลำดับ

พิจารณาการแทนค่า λ จากตารางต่อไปนี้

λ	d^2h	ปริมาตร (ลูกบาศก์หน่วย)	ลำดับก่อกำเนิด	ปริมาตรสูงสุด
$\frac{3}{4}$	16×6	$V_1 = 3$, $V_{10} = 10$, $V_2 = 12$, $V_3 = 16$, $V_5 = 18$ $V_{11} = 36$, $V_9 = 37$	เป็น	37
$\frac{4}{5}$	25×6	$V_1 = 4$, $V_{10} = 13$, $V_2 = 20$, $V_3 = 25$, $V_5 = 28$ $V_{11} = 60$, $V_9 = 61$	ไม่เป็น	-
$\frac{5}{6}$	36×6	$V_1 = 5$, $V_{10} = 16$, $V_2 = 30$, $V_3 = 36$, $V_5 = 40$ $V_{11} = 90$, $V_9 = 91$	ไม่เป็น	-
$\frac{6}{7}$	49×6	$V_1 = 6$, $V_{10} = 19$, $V_2 = 42$, $V_3 = 49$, $V_5 = 54$ $V_{11} = 126$, $V_9 = 127$	ไม่เป็น	-

ตารางที่ 4.4 แสดงการแทนค่า λ เมื่อ $\lambda = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

จากทั้ง 5 กรณี ทำให้เรามีเครื่องตวงกึ่งสากล M ขนาด 7 ลูกบาศก์หน่วย 13 ลูกบาศก์หน่วย 19 ลูกบาศก์หน่วย 21 ลูกบาศก์หน่วย 31 ลูกบาศก์หน่วย 37 ลูกบาศก์หน่วย และ 43 ลูกบาศก์หน่วย ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 4.4 ปริมาตรสูงสุดของเครื่องตวงกึ่งสากลที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษ คือ 43 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ สังเกตว่าการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4.3 เป็นการหาค่า λ ที่ทำให้ลำดับของปริมาตรที่สมนัยเป็นลำดับก่อกำเนิด โดยใช้วิธีการเช่นเดียวกันนี้ คำนวณค่า λ ที่เป็นจำนวนตรรกยะด้วยโปรแกรมคณิตศาสตร์เมเปิลสำหรับปริมาตร V_1 ถึง V_{13} (ดูรายละเอียดที่ภาคผนวก)

ตารางต่อไปนี้แสดงค่า λ ทั้งหมดที่ทำให้ลำดับของปริมาตรที่สมนัยเป็นลำดับก่อกำเนิด

λ	ปริมาตรที่เป็นจำนวนเต็มเรียงจากน้อยไปมาก (ลูกบาศก์หน่วย)	ลำดับก่อกำเนิด	ปริมาตรสูงสุด
$\frac{1}{4}$	3 , 4 , 10 , 12 , 16 , 18 , 21	เป็น	21
$\frac{1}{5}$	4 , 5 , 13 , 15 , 25 , 28 , 31	เป็น	31
$\frac{1}{6}$	5 , 6 , 16 , 18 , 36 , 40 , 43	เป็น	43
$\frac{2}{3}$	2 , 6 , 7 , 9 , 10 , 18 , 19	เป็น	19
$\frac{3}{4}$	3 , 10 , 12 , 16 , 18 , 36 , 37	เป็น	37
$\frac{1}{3}$	2 , 3 , 7 , 9 , 9, 10 , 13	เป็น	13
$\frac{1}{2}$	1 , 2 , 4 , 4 , 4 , 6 , 7	เป็น	7

ตารางที่ 4.5 แสดงค่า λ ทั้งหมดที่ทำให้เกิดเครื่องตวงกึ่งสากล

เราพบว่า ค่า λ ที่ทำให้ลำดับของปริมาตรที่สมนัยเป็นลำดับก่อกำเนิด คือค่า λ ชุดเดียวกับค่าที่ได้ในทฤษฎีบท 4.3 เราจึงสรุปว่า เครื่องตวงกึ่งสากลที่มีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยมแบบพิเศษ ขนาด 43 ลูกบาศก์หน่วย เป็นเครื่องตวงกึ่งสากลที่ให้ปริมาตรสูงสุด $\square$

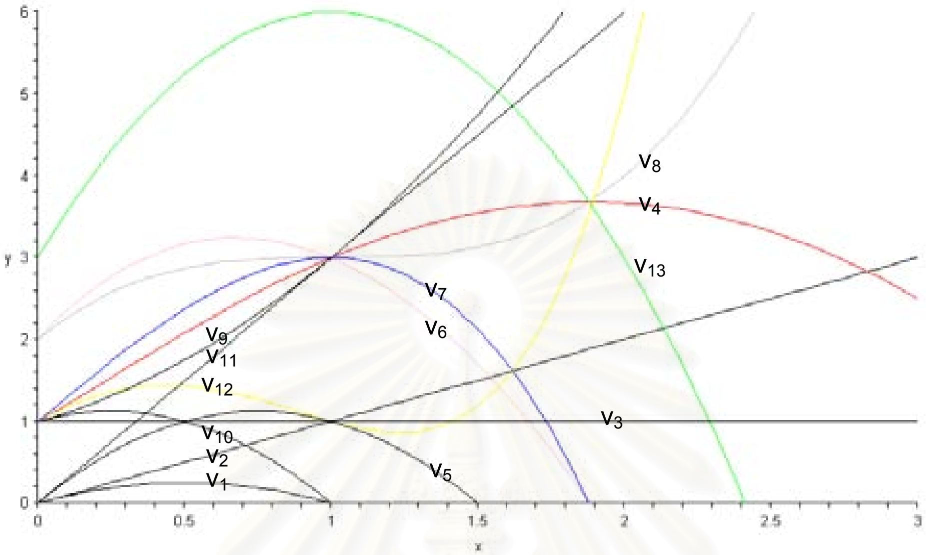
รายการอ้างอิง

1. Akiyama,J., Fukada,H., Nakamura,G., Sakai,T., Urrutia,J., Zamora Cura,C.:Universal Measuring Devices Without Gradations, Discrete and Computational Geometry, JCDCG 2000(Lecture Note in Computer Science), Springer:31-40.

2. Akiyama,J. ,Fukada,H. ,Nakamura,G.: Universal Measuring Devices With Rectangular base, to appear in Discrete and Computational Geometry, JCDCG2002(Lecture Note in Computer Science), Springer:1-8

ภาคผนวก

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ทั้งหมด จากขั้นตอนการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4.3
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 1 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ

จะได้ช่วงของ λ และค่าปริมาตรเรียงจากน้อยไปมากดังนี้

ช่วงของ λ	ปริมาตรเรียงจากน้อยไปมาก
$(0,\beta)$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_{11} \le V_3 \le V_{10} \le V_9 \le V_{12} \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$
$(\beta,\frac{1}{3})$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_{11} \le V_3 \le V_{10} \le V_{12} \le V_9 \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$
$(\frac{1}{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_3 \le V_{11} \le V_{10} \le V_{12} \le V_9 \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$
$(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\alpha)$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_3 \le V_{10} \le V_{11} \le V_{12} \le V_9 \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$
$(\alpha,\frac{1}{2})$	$V_1 \le V_2 \le V_5 \le V_3 \le V_{10} \le V_{12} \le V_{11} \le V_9 \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$
$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$V_1 \le V_2 \le V_{10} \le V_3 \le V_5 \le V_{12} \le V_{11} \le V_9 \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$
$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	$V_1 \le V_{10} \le V_2 \le V_3 \le V_5 \le V_{12} \le V_{11} \le V_9 \le V_4 \le V_7 \le V_8 \le V_6 \le V_{13}$

ตารางที่ 1 แสดงช่วงของ λ และปริมาตรเรียงจากน้อยไปมาก

เมื่อ β,α คำนวณโดยโปรแกรมคณิตศาสตร์เมเปิล

ด้วยคำสั่ง > evalf(solve(1+x*(1-x)*(2-x^2) = 1+x+x^2)); ได้ $\beta \approx 0.3111078169$

คำนวณ α ด้วยคำสั่ง > evalf(solve(1+x*(1-x)*(2-x^2) = 3*x)); ได้ $\alpha \approx 0.4805338162$

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda \in (0,\beta)$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-\lambda\}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}$$

$$V_5 - V_2 = \frac{d^2h}{6}\{2\lambda(1-\lambda)\}$$

$$V_{11} - V_5 = \frac{d^2h}{6}\{2\lambda^2\}$$

$$V_3 - V_{11} = \frac{d^2h}{6}\{1-3\lambda\}$$

$$V_{10} - V_3 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-2\lambda)\}$$

$$V_9 - V_{10} = \frac{d^2h}{6}\{3\lambda^2\}$$

$$V_{12} - V_9 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)-\lambda-\lambda^2\}$$

$$V_4 - V_{12} = \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}-\lambda^2-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\right\}$$

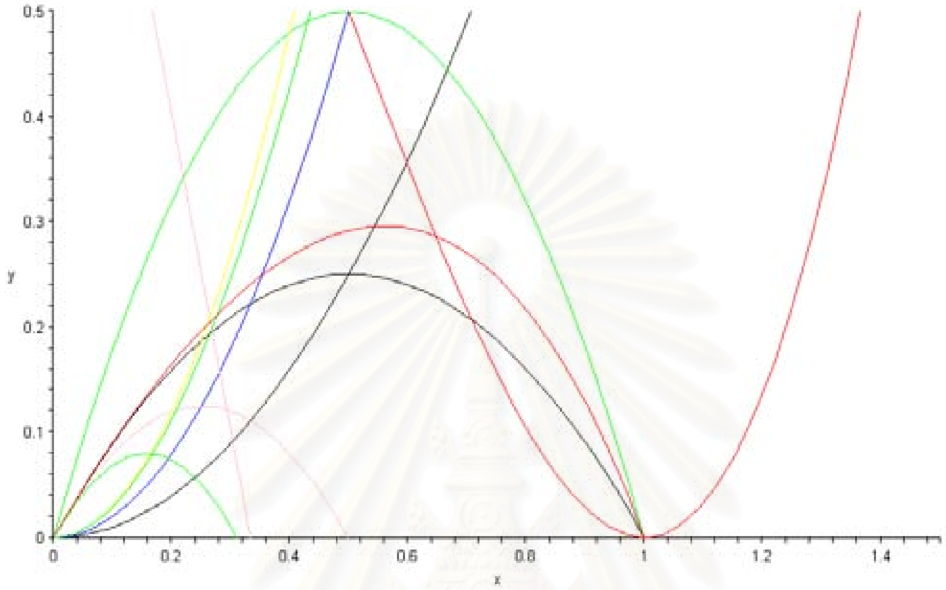
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2h}{6}\left\{2-(\lambda+2)(1-\lambda)^2-2\lambda+\lambda^2-\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2h}{6}\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2-(1-\lambda)^3\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}-2\lambda^2-1+(1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2h}{6}\left\{1+4\lambda-\lambda^2-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 2
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 2 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 1

จากรูปที่ 2 ทำให้ได้ว่า λ^2 เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(0,\delta)$ เมื่อ $\delta \approx 0.2391232786$
และ $\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)-\lambda-\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง (δ,β)

<u>กรณีที่ 1.1</u> $\lambda \in (0,\delta)$ จะได้ว่า

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\{3+6\lambda-3\lambda^2\}\le 2^{13} \tag{1}$$

หรือ

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}+2(1-\lambda^2)\right\}\le 2^{12} \tag{2}$$

หรือ

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\{3-(1-\lambda)^3\}\le 2^{11} \tag{3}$$

หรือ

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\{3-(2+\lambda)(1-\lambda)^2\}\le 2^{10} \tag{4}$$

หรือ

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}+1-\lambda^2\right\}\leq 2^9 \tag{5}$$

หรือ

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\}\leq 2^8 \tag{6}$$

หรือ

$$\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1 \quad \text{และ} \quad \frac{d^2h}{6}\{1+\lambda+\lambda^2\}\leq 2^7 \tag{7}$$

ในการคำนวณเราใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์เมเปิล เพื่อคำนวณค่า λ ที่เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนี้

<u>สำหรับ</u> (1)

จาก $\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1$ และ $\frac{d^2h}{6}\{3+6\lambda-3\lambda^2\}\leq 2^{13}$ ดังนั้น

$\frac{3+6\lambda-3\lambda^2}{\lambda^2}\leq 2^{13}$ นั่นคือ $\frac{3+6\lambda-3\lambda^2}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^{13}\}$

คำสั่ง
```
> for k from 1 to 8192  do
      print( k , solve(3+6*x-3*x^2 = k*x^2))
   end  do;
```

พบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

เราเขียน (k,λ) แทน k และ λ ที่สมนัยกัน

$(21,\frac{1}{2})$, $(42,\frac{1}{3})$, $(69,\frac{1}{4})$, $(102,\frac{1}{5})$, $(141,\frac{1}{6})$, $(186,\frac{1}{7})$, $(237,\frac{1}{8})$, $(294,\frac{1}{9})$,

$(426,\frac{1}{11}),\ldots,((3p^2+6p-3),\frac{1}{p}),\ldots,\ (7797,\frac{1}{50}),(8106,\frac{1}{51})$

และด้วยวิธีการเดียวกัน เราสามารถเขียนคำสั่งให้โปรแกรมคำนวณในทุกกรณีย่อย ดังนี้

<u>สำหรับ</u> (2)

จาก $\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1$ และ $\frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}+2(1-\lambda^2)\right\}\leq 2^{12}$ ดังนั้น

$\frac{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}+2(1-\lambda^2)}{\lambda^2}\leq 2^{12}$ นั่นคือ $\frac{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}+2(1-\lambda^2)}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^{12}\}$

คำนวณด้วยคำสั่ง
```
> for k from 1 to 4096  do
      print( k , solve(2*x+2*x /(1+x)+2*(1-x^2) = k*x^2))
   end  do;
```

พบว่า ไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>สำหรับ</u> (3)

จาก $\dfrac{d^2h}{6}\left\{\lambda^2\right\}=1$ และ $\dfrac{d^2h}{6}\left\{3-(1-\lambda)^3\right\}\le 2^{11}$ ดังนั้น

$\dfrac{3-(1-\lambda)^3}{\lambda^2}\le 2^{11}$ นั่นคือ $\dfrac{3-(1-\lambda)^3}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^{11}\}$

คำนวณด้วยคำสั่ง
```
> for k from 1 to 2048  do
        print( k , solve(3-(1-x)^3 = k*x^2))
    end  do;
```
พบว่า ไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>สำหรับ</u> (4)

จาก $\dfrac{d^2h}{6}\left\{\lambda^2\right\}=1$ และ $\dfrac{d^2h}{6}\left\{3-(2+\lambda)(1-\lambda)^2\right\}\le 2^{10}$ ดังนั้น

$\dfrac{3-(2+\lambda)(1-\lambda)^2}{\lambda^2}\le 2^{10}$ นั่นคือ $\dfrac{3-(2+\lambda)(1-\lambda)^2}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^{10}\}$

คำนวณด้วยคำสั่ง
```
> for k from 1 to 1024  do

        print( k , solve(3-(2+x)*(1-x)^2 = k*x^2))
    end  do;
```
พบว่า ไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>สำหรับ</u> (5)

จาก $\dfrac{d^2h}{6}\left\{\lambda^2\right\}=1$ และ $\dfrac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\dfrac{2\lambda^2}{1+\lambda}+1-\lambda^2\right\}\le 2^9$ ดังนั้น

$\dfrac{2\lambda+\dfrac{2\lambda^2}{1+\lambda}+1-\lambda^2}{\lambda^2}\le 2^9$ นั่นคือ $\dfrac{2\lambda+\dfrac{2\lambda^2}{1+\lambda}+1-\lambda^2}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^9\}$

คำนวณด้วยคำสั่ง
```
> for k from 1 to 512  do
        print( k , solve(2*x+2*x^2 /(1+x)+1-x^2 = k*x^2))
    end  do;
```
พบว่า ไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>สำหรับ</u> (6)

จาก $\dfrac{d^2h}{6}\left\{\lambda^2\right\}=1$ และ $\dfrac{d^2h}{6}\left\{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\right\}\le 2^8$ ดังนั้น

$\dfrac{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)}{\lambda^2}\le 2^8$ นั่นคือ $\dfrac{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^8\}$

คำนวณด้วยคำสั่ง
```
> for k from 1 to 256  do
        print( k , solve(1+x*(1-x)*(2-x^2) = k*x^2))
    end  do;
```
พบว่า ไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>สำหรับ</u> (7)

จาก $\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}=1$ และ $\frac{d^2h}{6}\{1+\lambda+\lambda^2\}\le 2^7$ ดังนั้น

$\frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda^2}\le 2^7$ นั่นคือ $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda^2}=k$ โดยที่ $k\in\{1,2,3,\ldots,2^7\}$

คำนวณด้วยคำสั่ง > for k from 1 to 128 do

```
print( k , solve(1+x+x^2 = k*x^2))
end do;
```

พบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(7,\frac{1}{2})$, $(13,\frac{1}{3})$, $(21,\frac{1}{4})$, $(31,\frac{1}{5})$, $(43,\frac{1}{6})$, $(57,\frac{1}{7})$, $(73,\frac{1}{8})$, $(91,\frac{1}{9})$, $(111,\frac{1}{10})$

<u>กรณีที่ 1.2</u> $\lambda\in(\delta,\beta)$ เราสามารถคำนวณด้วยวิธีการเดียวกัน เพียงเปลี่ยนจาก λ^2 เป็น $\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)-\lambda-\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด

พบว่า ไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda\in(\beta,\frac{1}{3})$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1-V_0=\frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-\lambda\}$$

$$V_2-V_1=\frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}$$

$$V_5-V_2=\frac{d^2h}{6}\{2\lambda(1-\lambda)\}$$

$$V_{11}-V_5=\frac{d^2h}{6}\{2\lambda^2\}$$

$$V_3-V_{11}=\frac{d^2h}{6}\{1-3\lambda\}$$

$$V_{10}-V_3=\frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-2\lambda)\}$$

$$V_{12}-V_{10}=\frac{d^2h}{6}\{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)-3\lambda(1-\lambda)-(1-\lambda)^2\}$$

$$V_9-V_{12}=\frac{d^2h}{6}\{\lambda+\lambda^2-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\}$$

$$V_4-V_9=\frac{d^2h}{6}\left\{\lambda-2\lambda^2+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

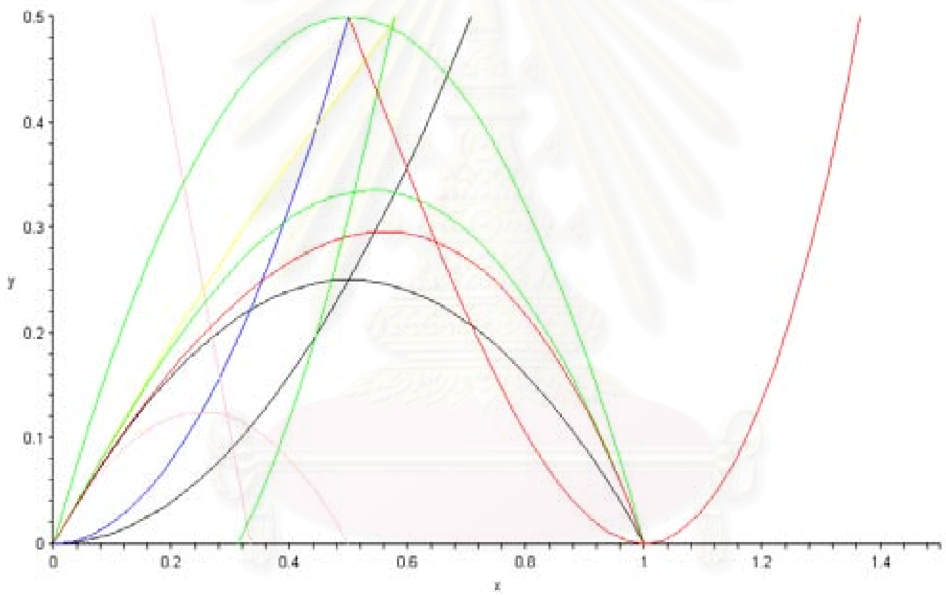
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2h}{6}\left\{2-(\lambda+2)(1-\lambda)^2 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2h}{6}\left\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda + \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 2\lambda^2 - 1 + (1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2h}{6}\left\{1 + 4\lambda - \lambda^2 - \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 3
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 3 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 2

จากรูปที่ 3 และการคำนวณจุดตัด จะได้ $\lambda + \lambda^2 - \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับ ช่วง (β,γ) เมื่อ $\gamma \approx 0.3274056262$ และ $1-3\lambda$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\gamma,\frac{1}{3})$

<u>กรณีที่ 2.1</u> $\lambda \in (\beta,\gamma)$ นั่นคือ $\lambda + \lambda^2 - \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด
จากการคำนวณพบว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>กรณีที่ 2.2</u> $\lambda \in (\gamma,\frac{1}{3})$ นั่นคือ $1-3\lambda$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด
จากการคำนวณพบว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-\lambda\}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}$$

$$V_5 - V_2 = \frac{d^2h}{6}\{2\lambda(1-\lambda)\}$$

$$V_3 - V_5 = \frac{d^2h}{6}\{1-3\lambda+2\lambda^2\}$$

$$V_{11} - V_3 = \frac{d^2h}{6}\{3\lambda-1\}$$

$$V_{10} - V_{11} = \frac{d^2h}{6}\{1-2\lambda-2\lambda^2)\}$$

$$V_{12} - V_{10} = \frac{d^2h}{6}\{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)-3\lambda(1-\lambda)-(1-\lambda)^2\}$$

$$V_9 - V_{12} = \frac{d^2h}{6}\{\lambda+\lambda^2-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\}$$

$$V_4 - V_9 = \frac{d^2h}{6}\left\{\lambda-2\lambda^2+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

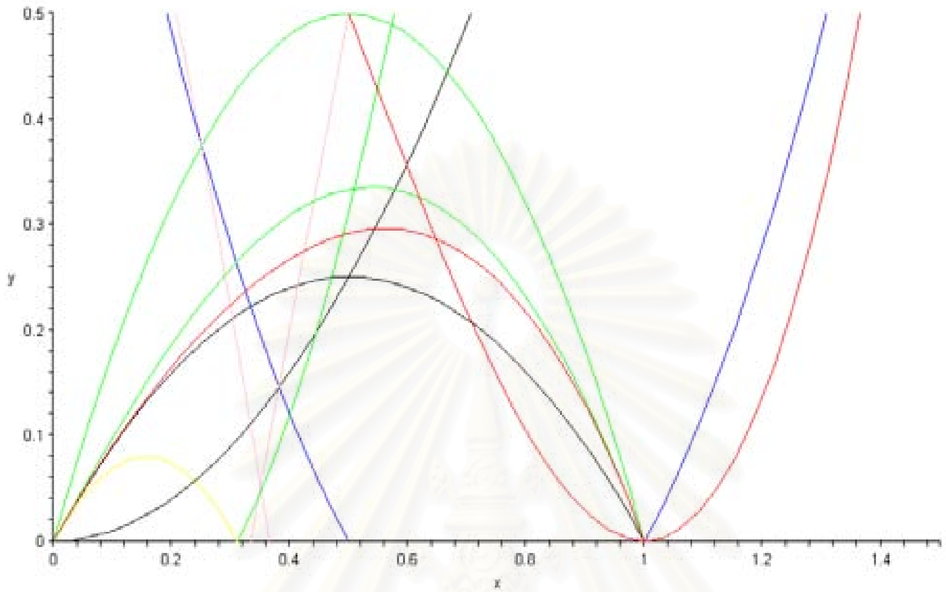
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2h}{6}\left\{2-(\lambda+2)(1-\lambda)^2-2\lambda+\lambda^2-\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2h}{6}\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2-(1-\lambda)^3\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}-2\lambda^2-1+(1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2h}{6}\left\{1+4\lambda-\lambda^2-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 4
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 4 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 3

จากรูปที่ 4 และการคำนวณจุดตัด จะได้ $3\lambda-1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\frac{1}{3},\sigma)$ เมื่อ $\sigma \approx 0.3472963549$ และ $\lambda+\lambda^2-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง (σ,χ) เมื่อ $\chi \approx 0.3520462095$ และ $1-2\lambda-2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\chi,\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$

<u>กรณีที่ 3.1</u> $\lambda \in (\frac{1}{3},\sigma)$

จากการคำนวณพบว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้ λ เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>กรณีที่ 3.2</u> $\lambda \in (\sigma,\chi)$

จากการคำนวณพบว่า เมื่อ $k=189$ ค่า $\lambda=\frac{1}{3}$

<u>กรณีที่ 3.3</u> $\lambda \in (\chi,\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(94,\frac{13}{37})$, $(42,\frac{1}{3})$, $(7,\frac{2}{11})$, $(13,\frac{1}{3})$

<u>กรณีที่ 4</u> $\lambda \in (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \alpha)$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2 h}{6}\left\{\lambda(1-\lambda\right\}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2 h}{6}\left\{\lambda^2\right\}$$

$$V_5 - V_2 = \frac{d^2 h}{6}\left\{2\lambda(1-\lambda)\right\}$$

$$V_3 - V_5 = \frac{d^2 h}{6}\left\{1-3\lambda+2\lambda^2\right\}$$

$$V_{10} - V_3 = \frac{d^2 h}{6}\left\{\lambda-2\lambda^2\right\}$$

$$V_{11} - V_{10} = \frac{d^2 h}{6}\left\{2\lambda^2+2\lambda-1)\right\}$$

$$V_{12} - V_{11} = \frac{d^2 h}{6}\left\{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)-3\lambda\right\}$$

$$V_9 - V_{12} = \frac{d^2 h}{6}\left\{\lambda+\lambda^2-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\right\}$$

$$V_4 - V_9 = \frac{d^2 h}{6}\left\{\lambda-2\lambda^2+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

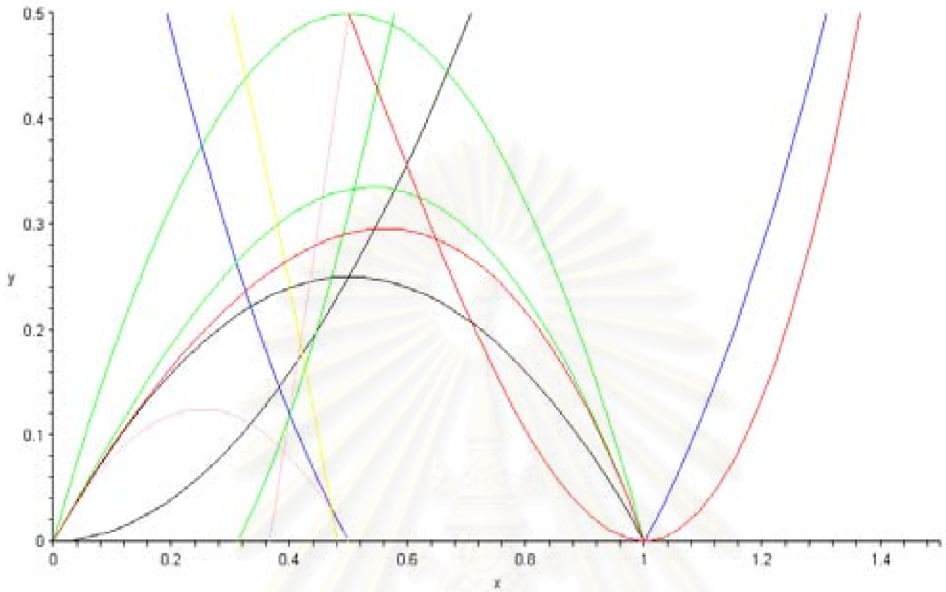
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2 h}{6}\left\{2-(\lambda+2)(1-\lambda)^2-2\lambda+\lambda^2-\frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2 h}{6}\left\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2-(1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2 h}{6}\left\{2\lambda+\frac{2\lambda}{1+\lambda}-2\lambda^2-1+(1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2 h}{6}\left\{1+4\lambda-\lambda^2-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 5
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 5แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 4

จากรูปที่ 5 และการคำนวณจุดตัด จะได้ $2\lambda^2+2\lambda-1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\phi)$ เมื่อ $\phi\approx 0.3903882032$ และ $\lambda-2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุดสำหรับช่วง (ϕ,α)

<u>กรณีที่ 4.1</u> $\lambda\in(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\phi)$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(93,\frac{8}{21})$, $(41,\frac{2}{5})$, $(6,\frac{3}{5})$

<u>กรณีที่ 4.2</u> $\lambda\in(\phi,\alpha)$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(82,\frac{3}{7})$, $(82,\frac{1}{23})$, $(42,\frac{1}{3})$, $(42,\frac{1}{9})$, $(34,\frac{3}{13})$, $(34,\frac{1}{5})$, $(13,\frac{1}{3})$, $(13,\frac{1}{9})$

<u>กรณีที่ 5</u> $\lambda \in (\alpha, \frac{1}{2})$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2 h}{6}\{\lambda(1-\lambda\}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2 h}{6}\{\lambda^2\}$$

$$V_5 - V_2 = \frac{d^2 h}{6}\{2\lambda(1-\lambda)\}$$

$$V_3 - V_5 = \frac{d^2 h}{6}\{1 - 3\lambda + 2\lambda^2\}$$

$$V_{10} - V_3 = \frac{d^2 h}{6}\{\lambda - 2\lambda^2\}$$

$$V_{12} - V_{10} = \frac{d^2 h}{6}\{1 + \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2) - 3\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2\}$$

$$V_{11} - V_{12} = \frac{d^2 h}{6}\{3\lambda - 1 - \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\}$$

$$V_9 - V_{11} = \frac{d^2 h}{6}\{1 - 2\lambda + \lambda^2\}$$

$$V_4 - V_9 = \frac{d^2 h}{6}\left\{\lambda - 2\lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

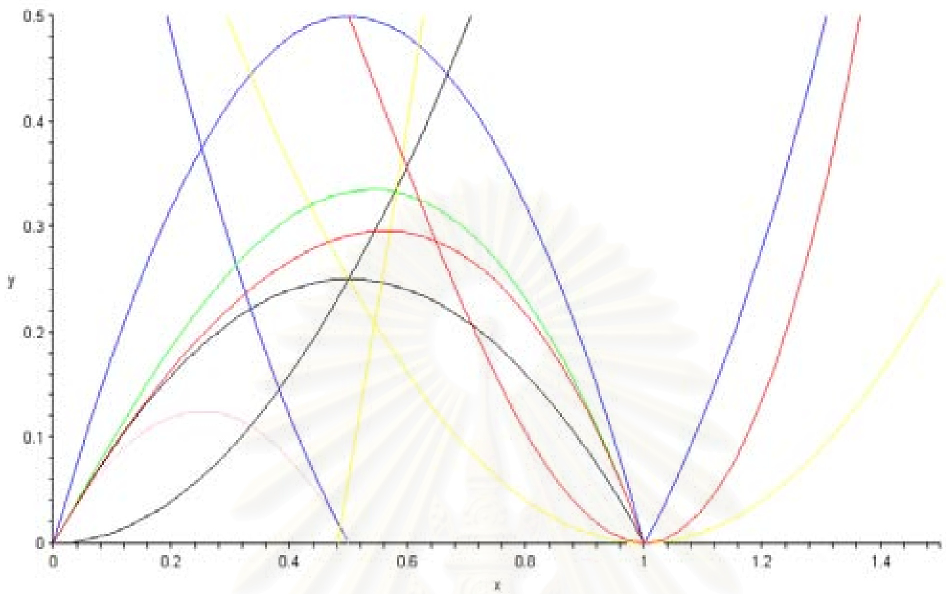
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2 h}{6}\left\{2 - (\lambda+2)(1-\lambda)^2 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2 h}{6}\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^3\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2 h}{6}\left\{2\lambda + \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 2\lambda^2 - 1 + (1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2 h}{6}\left\{1 + 4\lambda - \lambda^2 - \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 6
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 6 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 5

จากรูปที่ 6 และการคำนวณจุดตัด จะได้ $\lambda - 2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง (α,η) เมื่อ $\eta \approx 0.4850839474$ และ $3\lambda - 1 - \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\eta,\frac{1}{2})$

<u>กรณีที่ 5.1</u> $\lambda \in (\alpha,\eta)$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(82,\frac{3}{7})$, $(82,\frac{1}{23})$, $(42,\frac{1}{3})$, $(42,\frac{1}{9})$, $(34,\frac{3}{13})$, $(34,\frac{1}{5})$, $(13,\frac{1}{3})$, $(13,\frac{1}{9})$

<u>กรณีที่ 5.2</u> $\lambda \in (\eta,\frac{1}{2})$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(84,\frac{1}{2})$, $(46,\frac{1}{2})$, $(38,\frac{1}{2})$, $(28,\frac{1}{2})$, $(23,\frac{1}{2})$

<u>กรณีที่ 6</u> $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-\lambda\}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda^2\}$$

$$V_{10} - V_2 = \frac{d^2h}{6}\{1-2\lambda^2\}$$

$$V_3 - V_{10} = \frac{d^2h}{6}\{2\lambda^2 - \lambda\}$$

$$V_5 - V_3 = \frac{d^2h}{6}\{3\lambda - 2\lambda^2 - 1\}$$

$$V_{12} - V_5 = \frac{d^2h}{6}\{1 + \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2) - 3\lambda + 2\lambda^2\}$$

$$V_{11} - V_{12} = \frac{d^2h}{6}\{3\lambda - 1 - \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\}$$

$$V_9 - V_{11} = \frac{d^2h}{6}\{1 - 2\lambda + \lambda^2\}$$

$$V_4 - V_9 = \frac{d^2h}{6}\left\{\lambda - 2\lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

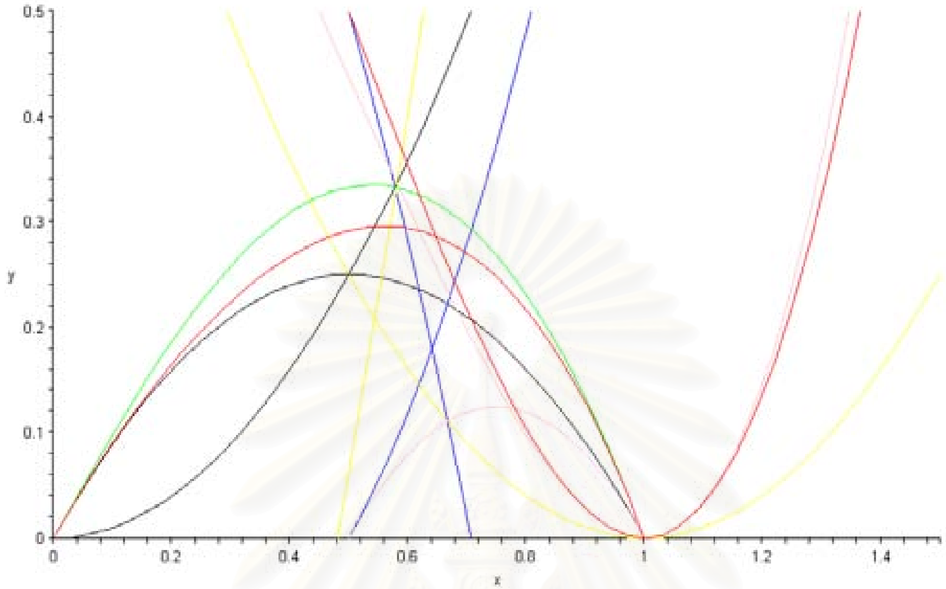
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2h}{6}\left\{2 - (\lambda+2)(1-\lambda)^2 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2h}{6}\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^3\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda + \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 2\lambda^2 - 1 + (1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2h}{6}\left\{1 + 4\lambda - \lambda^2 - \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 7
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 7 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 6

จากรูปที่ 7 และการคำนวณจุดตัด จะได้ $3\lambda - 2\lambda^2 - 1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\frac{1}{2},\varpi)$ เมื่อ $\varpi \approx 0.6666666667$ และ $1-2\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุดสำหรับช่วง $(\varpi,\frac{\sqrt{2}}{2})$

<u>กรณีที่ 6.1</u> $\lambda \in (\frac{1}{2},\varpi)$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(151,\frac{22}{23})$, $(151,\frac{7}{13})$, $(89,\frac{23}{25})$, $(89,\frac{4}{7})$, $(69,\frac{8}{9})$, $(69,\frac{3}{5})$, $(51,\frac{9}{11})$, $(51,\frac{2}{3})$, $(47,\frac{5}{7})$
$(47,\frac{10}{13})$, $(31,\frac{8}{9})$, $(31,\frac{4}{7})$, $(19,\frac{10}{13})$, $(19,\frac{2}{3})$

<u>กรณีที่ 6.2</u> $\lambda \in (\varpi,\frac{\sqrt{2}}{2})$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(138,\frac{9}{13})$, $(51,\frac{2}{3})$, $(6,\frac{1}{3})$, $(19,\frac{2}{3})$, $(7,\frac{3}{5})$,

<u>กรณีที่ 7</u> $\lambda \in (\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ พิจารณาผลต่างของปริมาตรดังนี้

$$V_1 - V_0 = \frac{d^2h}{6}\{\lambda(1-\lambda\}$$

$$V_{10} - V_1 = \frac{d^2h}{6}\{1-\lambda^2\}$$

$$V_2 - V_{10} = \frac{d^2h}{6}\{2\lambda^2 - 1\}$$

$$V_3 - V_2 = \frac{d^2h}{6}\{1-\lambda\}$$

$$V_5 - V_3 = \frac{d^2h}{6}\{3\lambda - 2\lambda^2 - 1\}$$

$$V_{12} - V_5 = \frac{d^2h}{6}\{1+\lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2) - 3\lambda + 2\lambda^2\}$$

$$V_{11} - V_{12} = \frac{d^2h}{6}\{3\lambda - 1 - \lambda(1-\lambda)(2-\lambda^2)\}$$

$$V_9 - V_{11} = \frac{d^2h}{6}\{1 - 2\lambda + \lambda^2\}$$

$$V_4 - V_9 = \frac{d^2h}{6}\left\{\lambda - 2\lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

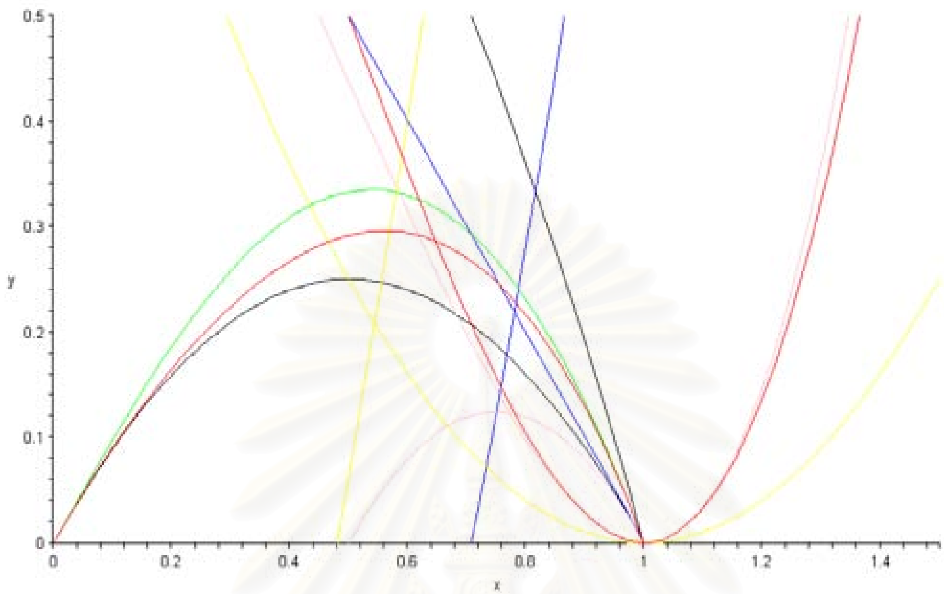
$$V_7 - V_4 = \frac{d^2h}{6}\left\{2 - (\lambda+2)(1-\lambda)^2 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{2\lambda^2}{1+\lambda}\right\}$$

$$V_8 - V_7 = \frac{d^2h}{6}\{(\lambda+2)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^3\}$$

$$V_6 - V_8 = \frac{d^2h}{6}\left\{2\lambda + \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 2\lambda^2 - 1 + (1-\lambda)^3\right\}$$

$$V_{13} - V_6 = \frac{d^2h}{6}\left\{1 + 4\lambda - \lambda^2 - \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

พิจารณากราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตร ดังรูปที่ 8
โดยที่ x แทนค่าของ λ และ y แทนฟังก์ชันของ λ



รูปที่ 8 แสดงกราฟฟังก์ชันของ λ ที่เกิดจากผลต่างของปริมาตรในกรณีที่ 7

จากรูปที่ 8 และการคำนวณจุดตัด จะได้ $2\lambda^2-1$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\frac{\sqrt{2}}{2},\vartheta)$ เมื่อ $\vartheta \approx 0.732050808$ และ $1-2\lambda+\lambda^2$ เป็นพหุนามค่าน้อยสุด สำหรับช่วง $(\vartheta,1)$

<u>กรณีที่ 7.1</u> $\lambda \in (\frac{\sqrt{2}}{2},\vartheta)$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(282,\frac{5}{7})$, $(21,\frac{4}{5})$, $(109,\frac{5}{7})$, $(39,\frac{8}{11})$

<u>กรณีที่ 7.2</u> $\lambda \in (\vartheta,1)$

จากการคำนวณพบว่าได้ค่า k และค่า λ ที่สมนัยกันดังนี้

$(483,\frac{8}{9})$, $(381,\frac{7}{8})$, $(291,\frac{6}{7})$, $(213,\frac{5}{6})$, $(147,\frac{4}{5})$, $(93,\frac{3}{4})$, $(51,\frac{2}{3})$, $(21,\frac{1}{2})$, $(127,\frac{6}{7})$, $(91,\frac{5}{6})$, $(61,\frac{4}{5})$, $(37,\frac{3}{4})$, $(19,\frac{2}{3})$, $(7,\frac{1}{2})$

จากนั้น นำค่า λ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละกรณี จากทั้ง 7 กรณีข้างต้น มาแทนค่า เพื่อหาปริมาตรต่าง ๆ และกำหนดค่าของ $\frac{d^2h}{6}$ ให้เหมาะสม พร้อมทั้งตรวจสอบว่าปริมาตรที่ได้เป็นลำดับก่อกำเนิดหรือไม่ ดังตารางต่อไปนี้

λ	k	ปริมาตรที่เป็นจำนวนเต็มเรียงจากน้อยไปมาก (ลูกบาศก์หน่วย)	ลำดับก่อกำเนิด
$\frac{1}{4}$	21	3 , 4 , 10 , 12 , 16 , 18 , 21 , 69	ไม่เป็น
$\frac{1}{5}$	31	4 , 5 , 13 , 15 , 25 , 28 , 31 , 102	ไม่เป็น
$\frac{1}{6}$	43	5 , 6 , 16 , 18 , 36 , 40 , 43 , 141	ไม่เป็น
$\frac{1}{7}$	57	6 , 7 , 19 , 21 , 49 , 54 , 57 , 186	ไม่เป็น
$\frac{1}{8}$	73	7 , 8 , 22 , 24 , 64 , 70 , 73 , 237	ไม่เป็น
$\frac{1}{9}$	91	8 , 9 , 25 , 27 , 81 , 88 , 91 , 294	ไม่เป็น
$\frac{1}{10}$	111	9 , 10 , 28 , 30 , 100 , 108 , 111 , 357	ไม่เป็น
$\frac{8}{21}$	93	93	ไม่เป็น
$\frac{3}{7}$	82	4 , 7 , 21 , 82	ไม่เป็น
$\frac{1}{2}$	84	4 , 8 , 16 , 16 , 16 , 23 , 24 , 28 , 38 , 46 , 84	ไม่เป็น
$\frac{7}{13}$	151	7 , 21 , 151	ไม่เป็น
$\frac{4}{7}$	89	4 , 15 , 28 , 31 , 89	ไม่เป็น
$\frac{3}{5}$	69	3 , 11 , 69	ไม่เป็น
$\frac{2}{3}$	51	2 , 6 , 7 , 9 , 10 , 18 , 19 , 51	ไม่เป็น
$\frac{9}{13}$	138	27 , 138	ไม่เป็น
$\frac{5}{7}$	282	10 , 34 , 35 , 49 , 55 , 105 , 109 , 282	ไม่เป็น
$\frac{8}{11}$	39	39	ไม่เป็น
$\frac{8}{9}$	483	8 , 25 , 72 , 81 , 88 , 216 , 217 , 483	ไม่เป็น

$\frac{7}{8}$	381	7 , 22 , 56 , 64 , 70 , 168 , 169 , 381	ไม่เป็น
$\frac{6}{7}$	291	6 , 19 , 42 , 49 , 54 , 126 , 127 , 291	ไม่เป็น
$\frac{5}{6}$	213	5 , 16 , 30 , 36 , 40 , 90 , 91 , 213	ไม่เป็น
$\frac{4}{5}$	147	4 , 13 , 20 , 25 , 28 , 60 , 61 , 147	ไม่เป็น
$\frac{3}{4}$	93	3 , 10 , 12 , 16 , 18 , 36 , 37 , 93	ไม่เป็น

ตารางที่ 2

ในกรณีที่ $\lambda \in \{\frac{1}{11},\frac{1}{12},\frac{1}{13},...,\frac{1}{49},\frac{1}{50},\frac{1}{51}\}$ เราได้ตรวจสอบแล้วว่า ลำดับของปริมาตรที่สมนัยกับค่า λ เหล่านี้ ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด

กรณีที่ $\lambda = \frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นจุดขอบ พบว่าลำดับปริมาตรที่สมนัยคือ (2,3,7,9,9,10,13,42) แต่ลำดับ (2,3,7,9,9,10,13,42) ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด ดังนั้น พิจารณาลำดับ (2,3,7,9,9,10,13) พบว่าเป็นลำดับก่อกำเนิด

จากตารางที่ 2 พบว่าลำดับของปริมาตรที่ได้ไม่เป็นลำดับก่อกำเนิด เนื่องจากเราต้องการเครื่องตวงกึ่งสากล จึงพิจารณาลำดับของปริมาตรที่ตัดค่าปริมาตรบางค่าทิ้งไป ดังตารางที่ 3
ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ เพื่อหาลำดับของปริมาตรที่เป็นลำดับก่อกำเนิด เราก็จะได้เครื่องตวงกึ่งสากลตามต้องการ

λ	ปริมาตรที่เป็นจำนวนเต็มเรียงจากน้อยไปมาก (ลูกบาศก์หน่วย)	ลำดับก่อกำเนิด	ปริมาตรสูงสุด
$\frac{1}{4}$	3 , 4 , 10 , 12 , 16 , 18 , 21	เป็น	21
$\frac{1}{5}$	4 , 5 , 13 , 15 , 25 , 28 , 31	เป็น	31
$\frac{1}{6}$	5 , 6 , 16 , 18 , 36 , 40 , 43	เป็น	43
$\frac{1}{7}$	6 , 7 , 19 , 21 , 49 , 54 , 57	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{8}$	7 , 8 , 22 , 24 , 64 , 70 , 73	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{9}$	8 , 9 , 25 , 27 , 81 , 88 , 91	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{10}$	9 , 10 , 28 , 30 , 100 , 108 , 111	ไม่เป็น	-
$\frac{1}{2}$	4 , 8 , 16 , 16 , 16 , 23 , 24 , 28 , 38 , 46	ไม่เป็น	-
$\frac{4}{7}$	4 , 15 , 28 , 31	ไม่เป็น	-
$\frac{2}{3}$	2 , 6 , 7 , 9 , 10 , 18 , 19	เป็น	19
$\frac{5}{7}$	10 , 34 , 35 , 49 , 55 , 105 , 109	ไม่เป็น	-
$\frac{8}{9}$	8 , 25 , 72 , 81 , 88 , 216 , 217	ไม่เป็น	-
$\frac{7}{8}$	7 , 22 , 56 , 64 , 70 , 168 , 169	ไม่เป็น	-
$\frac{6}{7}$	6 , 19 , 42 , 49 , 54 , 126 , 127	ไม่เป็น	-
$\frac{5}{6}$	5 , 16 , 30 , 36 , 40 , 90 , 91	ไม่เป็น	-
$\frac{4}{5}$	4 , 13 , 20 , 25 , 28 , 60 , 61	ไม่เป็น	-
$\frac{3}{4}$	3 , 10 , 12 , 16 , 18 , 36 , 37	เป็น	37

ตารางที่ 3

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายนิตินัย อุดมทรัพย์ เกิดเมื่อวันที่ 14 ตุลาคม พ.ศ. 2522 ที่จังหวัดชัยภูมิ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2544 และในปีการศึกษา 2545 ได้เข้าศึกษาในระดับปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย