# บทที่ 4

# ทฤษฎีของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ ที่ใช้ร่วมกับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

บทนี้กล่าวถึงทฤษฎีของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ร่วมกับการประมาณค่าตัวแปรสเตตและพารามิเตอร์ซึ่งได้อธิบายถึงข้อดีและข้อจำกัดรวมถึงสิ่งที่ต้องการสำหรับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์, การนำใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟร่วมกับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ และทฤษฎีของคาลมานฟิลเตอร์รวมถึงคาลมานฟิลเตอร์ที่สภาวะคงตัว (steady-state Kalman filter)

## 4.1 บทนำ

การประยุกต์ใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ ร่วมกับการประมาณค่าตัวแปรสเตตและพารามิเตอร์เช่นคาลมานฟิลเตอร์จะช่วยส่งเสริมให้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟมีประสิทธิภาพการทำงานสูงยิ่งขึ้น เนื่องจากการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ เป็นการควบคุมที่ขึ้นกับแบบจำลอง ดังนั้นเมื่อแบบจำลองของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ แตกต่างจากแบบจำลองของกระบวนการจริงจะให้ผลการควบคุมที่ไม่ดี (การทำนายการเปลี่ยนแปลงค่าเอาท์พุทจากแบบจำลองที่ผิดพลาดส่งผลให้การคำนวณค่าตัวแปรปรับที่เหมาะสมผิดพลาด เมื่อนำค่าตัวแปรปรับที่คำนวณได้นี้ไปทำการควบคุมกับระบบจริง ทำให้การควบคุมไม่ได้ผลดี) ดังนั้นจึงต้องอาศัยการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์เข้ามาช่วยในการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ของแบบจำลองของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟให้ถูกต้องใกล้เคียงกับแบบจำลองของกระบวนการจริงมากที่สุด ซึ่งจะทำให้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟมีประสิทธิภาพดีขึ้น ในการประยุกต์ใช้จริงปกติแล้วจะมีการประยุกต์ใช้เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ร่วมอยู่ด้วยเสมอ เนื่องจากเป็นความจริงที่

ว่า ในการหาแบบจำลองต้องมีการให้สมมติฐานหลายอย่างดังนั้นแบบจำลองที่หาได้ย่อมแตกต่างจากแบบจำลองของกระบวนการจริงเสมอ ซึ่งในการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์นั้นจะอาศัยข้อมูลเอาท์พุทที่วัดได้เป็นฐานในการนำไปคำนวณหรือประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ซึ่งผลการประมาณค่าจะดีหรือไม่ขึ้นกับค่าเอาท์พุทที่วัดได้ว่ามีความถูกต้องมากน้อยเพียงใดรวมทั้งเทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์เองมีข้อดีและข้อจำกัดอย่างไร ดังนั้นการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ร่วมกับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์จะสามารถทำการควบคุมระบบให้เข้าสู่ค่าที่ต้องการและให้ผลการควบคุมที่ดีกว่ากรณีที่ไม่ใช้การประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

### 4.1.1 ข้อดีและข้อจำกัดของการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

ข้อดีของการประยุกต์ใช้เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ร่วมกับเทคนิคการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ คือ

- เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์สามารถนำมาใช้ร่วมกับการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟได้ และช่วยทำให้การควบคุมนี้มีประสิทธิภาพในการทำงานมากยิ่งขึ้น
- เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์สามารถนำมาใช้ในการประมาณค่าสเตตที่ไม่สามารถวัดค่าได้ ทำให้มีความเป็นไปได้ที่จะทำการควบคุมค่าสเตตที่ไม่สามารถวัดค่าได้นี้
- สามารถช่วยในการควบคุมกระบวนการที่มีความไม่แน่นอนของแบบจำลองและพารา-มิเตอร์ต่าง ๆ ได้เช่นในกรณีที่มีความผิดพลาดของแบบจำลองหรือค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของกระบวนการหรือตัวควบคุม (Plant/Model-Mismatch) เป็นต้น ซึ่งเป็นข้อดีในการประยุกต์ใช้เทคนิคการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ กับกระบวนการที่เราไม่ทราบข้อมูลต่าง ๆ ดีพอ

อย่างไรก็ตามความสามารถในการประมาณค่านี้ขึ้นกับแบบจำลองที่ใช้, ตัวพารามิเตอร์ที่ใช้และเทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์เอง อีกทั้งแบบจำลองของตัวประมาณค่า รวมทั้งค่าเอาท์พุทที่วัดได้ว่าถูกต้องมากน้อยเพียงใดแต่โดยหลักการแล้วการประยุกต์ใช้การประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ร่วมกับเทคนิคการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟจะสามารถควบคุมระบบให้เข้าสู่ค่าที่ต้องการได้ดีกว่ากรณีที่ไม่มีการใช้การประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

การประยุกต์ใช้เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์นี้มีข้อจำกัดคือ

- การประยุกต์ใช้เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ร่วมกับการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟนั้นสามารถนำมาใช้ได้กับระบบซึ่งเอาท์พุทสามารถวัดได้และเชื่อถือได้เท่านั้นแต่ทั้งนี้ เอาท์พุทที่วัดค่าได้ต้องเป็นเอาท์พุทที่ทำให้ระบบที่สนใจสามารถสังเกตได้ (observability)

### 4.1.2 สิ่งที่ต้องการสำหรับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

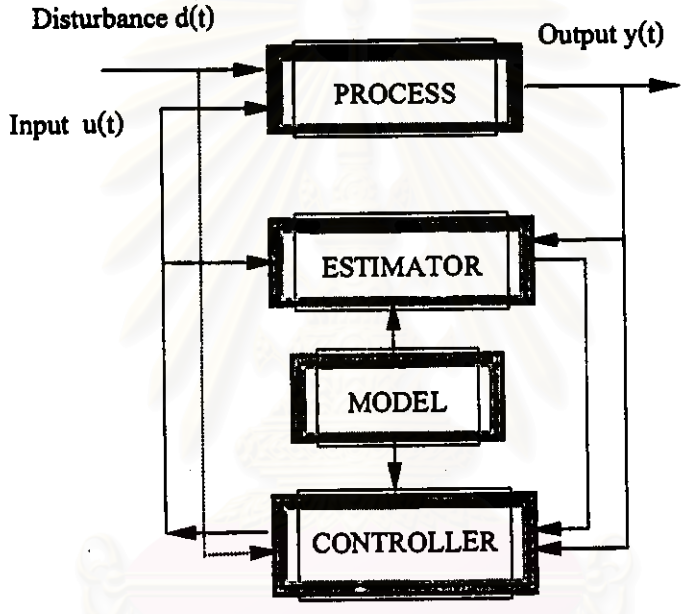
เทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์นั้นอาศัยแบบจำลองเช่นเดียวกันเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเอาท์พุทที่วัดได้กับค่าสเตตและพารามิเตอร์ที่ต้องการจะประมาณซึ่งผลการประมาณค่าจะดีหรือไม่ขึ้นกับแบบจำลองเหล่านี้

- การประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ต้องการค่าวัดของตัวแปรที่สามารถวัดได้ โดยการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์นั้นจะอาศัยข้อมูลของเอาท์พุทที่วัดได้เป็นฐานในการนำไปคำนวณหรือประมาณค่าสเตตหรือพารามิเตอร์ ซึ่งถ้าไม่มีการวัดค่าเอาท์พุทเหล่านี้ตัวประมาณค่าจะไม่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์และตัวแปรเหล่านี้ได้เนื่องจากไม่สามารถทราบค่าที่สภาวะปัจจุบันของระบบ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## 4.2 การนำใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟร่วมกับการประมาณค่าสเตต และพารามิเตอร์

การนำใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟร่วมกับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์นั้น มีโครงสร้างโดยทั่วไปแสดงได้ดังรูปที่ 4.1




รูปที่ 4.1 โครงสร้างโดยทั่วไปของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ร่วมกับการประมาณค่าสเตตและ พารามิเตอร์

ในการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ ตัวประมาณค่า (estimator) จะอาศัยข้อมูลอินพุทและเอาท์พุทของกระบวนการที่วัดได้ ($u$ และ $y$, ตามลำดับ) เป็นฐานในการคำนวณหรือประมาณค่าสเตต และพารามิเตอร์ที่ไม่ถูกต้องหรือตัวแปรที่ไม่สามารถวัดค่าได้ โดยอาศัยแบบจำลองซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเอาท์พุทที่วัดได้กับค่าสเตตและพารามิเตอร์ที่จะทำการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณ จะส่งเข้าตัวควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟในขณะเดียวกันค่าเอาท์พุทที่วัดได้เหล่านั้นจะป้อนให้กับตัวควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟด้วยซึ่งตัวควบคุมแบบ

โมเดลพรีดิกทีฟที่อาศัยแบบจำลองในการคำนวณค่าของตัวแปรปรับที่เหมาะสม เพื่อควบคุมตัวแปรควบคุมให้อยู่ที่ค่าเซ็ทพอยท์ที่ต้องการ และอาศัยแบบแผนของการออฟติไมซ์ในการทำนายแนวทางของตัวแปรควบคุมผ่านแกนการทำนาย, $P$ ค้วยค่าของตัวแปรปรับกระบวนการ ซึ่งเปลี่ยนแปลงผ่านแกนการควบคุม, $M$ ซึ่ง $M \le P$ เช่นเดียวกัน ซึ่งสเต็บของการทำนายนี้แสดงได้ดังรูปที่ 3.2

จากชุดของตัวแปรปรับที่คำนวณได้ ค่าของตัวแปรปรับเพียงค่าแรก $\Delta u(k/k)$ เท่านั้นที่นำมาประยุกต์กับกระบวนการจริงจากสเต็บเวลา $k$ ถึง $k+1$ ที่สเต็บเวลา $k+1$ จะได้ค่าวัด $y(k+1)$ ซึ่งถูกใช้ร่วมกับ $\Delta u(k/k)$ โดยตัวประมาณค่าในการคำนวณค่าประมาณค่าใหม่ $\hat{x}(k+1)$, แกนการควบคุม, $M$ และแกนการทำนาย, $P$ จะเคลื่อนไปข้างหน้าหนึ่งสเต็บและการแก้ปัญหาของออฟติไมเซชั่นจะเกิดขึ้นใหม่ที่สเต็บเวลา $k+1$ ด้วยสภาวะเริ่มต้นใหม่ $\hat{x}(k+1)$

### 4.2.1 รูปแบบโดยทั่วไปการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

ระบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous-Time Systems) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t), u(t), t) + K(t)[y(t) - \hat{y}(t)] \tag{4.1}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{g}(\hat{x}(t), u(t), t) \tag{4.2}$$

ระบบเวลาดิสครีต (Discrete-Time Systems) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{F}(\hat{x}(k), u(k), k) + K(k)[y(k) - \hat{y}(k)] \tag{4.3}$$

$$\hat{y}(k) = \hat{g}(\hat{x}(k), u(k), k) \tag{4.4}$$

ซึ่งค่า $K(t)$ หรือ $K(k)$ เป็นค่าที่ได้มาจากการหาคำตอบของสมการ เรคคาติ (Riccati equation)

## 4.3 ทฤษฎีของคาลมานฟิลเตอร์ (Kalman filter)

คาลมานฟิลเตอร์เป็นอัลกอริธึมในการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ที่นิยมใช้ ซึ่งง่ายต่อการนำไปประยุกต์ใช้กับการควบคุมซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งของการหาค่าความแปรปรวนต่ำสุด (Minimun Variance) ที่ได้มีการนำมาประยุกต์ใช้สำหรับการแก้ปัญหาในการควบคุมที่มีความยุ่งยากซับซ้อนยิ่งขึ้น สามารถนำมาใช้ประมาณค่าสเตตที่ไม่สามารถวัดได้ทำให้มีความเป็นไปได้จะควบคุมค่าสเตตที่ไม่สามารถวัดค่าได้และสามารถควบคุมกระบวนการที่มีความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ได้

หลักการของคาลมานฟิลเตอร์นั้นอาศัยการเขียนสมการในรูปสเตตสเปซ (state space)

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.5}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4.6}$$

ทำการแปลงสมการแบบจำลองไปอยู่ในรูปดิสครีต (discrete form) โดยการประมาณคำตอบของสมการ (4.5) เป็น

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = Ax(k) + Bu(k) \tag{4.7}$$

ดังนั้นรูปแบบดิสครีตจากแบบจำลองเชิงเส้นสามารถแสดงได้เป็น

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \tag{4.8}$$

$$y(t) = Cx(k) \tag{4.9}$$

เมื่อ

$$\Phi = 1 + A\Delta t \tag{4.10}$$

$$\Gamma = B\Delta t \tag{4.11}$$

การประมาณค่าสเตต สามารถทำได้โดยการใช้สมการต่าง ๆ ของคาลมานฟิลเตอร์ ในการประมาณที่แต่ละสเต็บเวลาซึ่งเป็นการประมาณค่าความแปรปรวนต่ำสุด (minimum variance estimation) ซึ่งได้รวมความไม่แน่นอนของสมการแบบจำลองและการวัดเข้าไปด้วยดังสมการ

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \zeta(k) \tag{4.12}$$

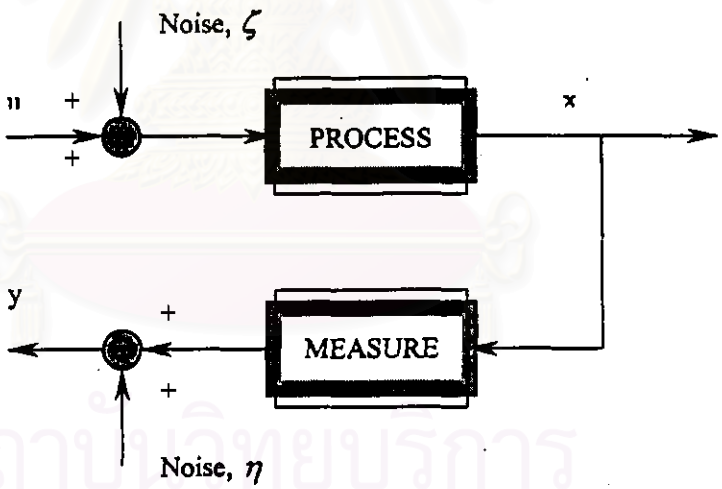
$$y(k) = Cx(k) + \eta(k) \tag{4.13}$$

โดยที่

$\zeta(k)$ คือ สัญญาณรบกวนกระบวนการ (process noise) ซึ่งไม่เพียงแต่รวมสัญญาณอินพุทของค่าการรบกวนระบบต่าง ๆ ยังได้รวมความไม่แน่นอนของแบบจำลองของกระบวนการไว้ด้วย

$\eta(k)$ คือ สัญญาณรบกวนค่าวัด (measurement noise)

แผนภาพแสดงแบบจำลองของระบบตามสมการ (4.12) และ (4.13) แสดงได้ดังรูปที่ 4.2




รูปที่ 4.2 แบบจำลองของระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบสุ่ม

กำหนดให้

$P$ คือเมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วม (covariance) ของความผิดพลาดในการประมาณ

$$P = E\{\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)\} \tag{4.14}$$

เมื่อ $\tilde{x}(k)$ คือค่าความผิดพลาดจากการประมาณ

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \tag{4.15}$$

เมื่อ $\hat{x}(k)$ คือค่าประมาณของ $x$ ที่เวลา $k$

$Q$ คือความแปรปรวนร่วม (covariance) ของ $w(k)$ (จากแบบจำลอง)

$$Q = E[\zeta(k)\zeta^T(k)] \tag{4.16}$$

$R$ คือความแปรปรวนร่วม (covariance) ของ $\eta$ (จากแบบจำลอง)

$$R = E[\eta(k)\eta^T(k)] \tag{4.17}$$

ดังนั้นจะสามารถประมาณค่า $x$ ที่เวลา $k+1$ ได้จากข้อมูลต่าง ๆ ที่เวลา $k$ นั่นคือ เมื่อให้ $x(j/i)$ เป็นค่าประมาณของสเตต $x$ ที่เวลา $j$ โดยอาศัยค่าวัดที่เวลา $i$ ทำนองเดียวกัน, $P(j/i)$ เป็นความแปรปรวนร่วมของความผิดพลาดจากประมาณ (covariance of estimated errors) ที่เวลา $j$ โดยอาศัยค่าวัดที่เวลา $i$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 4.3.1 อัลกอริธึมคาลมานฟิลเตอร์ (Kalman Filter Algorithm)

ขั้นตอนการออกแบบคาลมานฟิลเตอร์แบบมาตรฐานประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

**การทำนาย (Prediction)**

กำหนดค่า $\hat{x}(k/k)$, $\hat{P}(k/k)$, $Q$, $R$

ขั้นตอนที่1 คำนวณค่าประมาณของสเตตที่เวลา $k+1$

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi\hat{x}(k/k) + \Gamma\Delta u(k) \tag{4.18}$$

และคำนวณค่าเมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วมของความผิดพลาดจากการประมาณ (covariance of error of state estimates) ที่เวลา $k+1$

$$\hat{P}(k+1/k) = \Phi\hat{P}(k/k)\Phi^T + Q \tag{4.19}$$

**การตรวจสอบ (Correction)**

ขั้นตอนที่2 คำนวณหาเมตริกซ์เกนคาลมาน (Kalman gain matrix) ที่เวลา $k+1$

$$K(k+1) = \hat{P}(k+1/k)C^T[C\hat{P}(k+1/k)C^T + R]^{-1} \tag{4.20}$$

ขั้นตอนที่3 คำนวณหาค่าการประมาณค่าใหม่โดยอาศัยค่าวัดของกระบวนการ

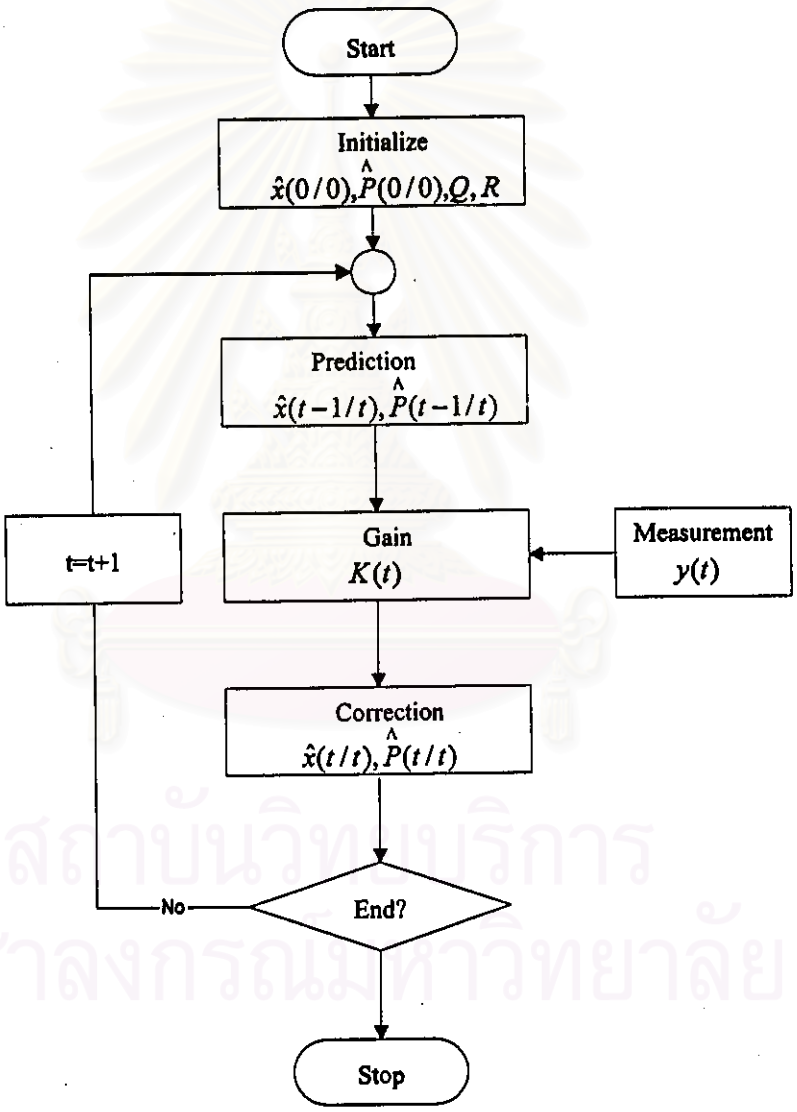
$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1)[y(k+1) - C\hat{x}(k+1/k)] \tag{4.21}$$

ขั้นตอนที่4 คำนวณค่าเมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วมของความผิดพลาดจากการประมาณค่าใหม่ที่ เวลา $k+1$ โดยอาศัยค่าวัดของกระบวนการ

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)C\hat{P}(k+1/k)[I - K(k+1)C]^T + K(k+1)RK(k+1)^T \quad (4.22)$$

ขั้นตอนที่5 ทำการบวกหนึ่งให้กับค่า $k$ แล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 1 ใหม่อีกครั้ง

แผนภาพแสดงการคำนวณตามขั้นตอนของอัลกอริธึมของคาลมานฟิลเตอร์แสดงดังรูปที่ 4.3




รูปที่ 4.3 แสดงการคำนวณตามขั้นตอนของอัลกอริธึมของคาลมานฟิลเตอร์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การประยุกต์ใช้คาลมานฟิลเตอร์นั้นจะต้องอาศัยแบบจำลองซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่วัดค่าได้กับตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณนอกจากนี้จะต้องให้ค่าความไม่แน่นอนจากการประมาณ, $P$ ความไม่แน่นอนของแบบจำลอง, $Q$ และความไม่แน่นอนของการวัด, $R$ ซึ่งความไม่แน่นอนเหล่านี้จะส่งผลถึงประสิทธิภาพในการประมาณค่าของคาลมานฟิลเตอร์ แต่ในการประยุกต์ใช้ส่วนใหญ่ คาลมานฟิลเตอร์แบบสภาวะคงตัวจะให้สมรรถนะที่น่าพอใจ (Ricker, 1990) ซึ่งในกรณีนี้ค่าเมตริกซ์เกนคาลมาน, $K$ เป็นค่าคงที่

### 4.3.2 คาลมานฟิลเตอร์แบบสภาวะคงตัว (Steady – State Kalman Filter)

การหาค่าเมตริกซ์เกนคาลมาน, $K$ ซึ่งเป็นค่าคงที่นั้น เริ่มจากการหาค่าของเมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วมของความผิดพลาดจากการประมาณ $M$ ซึ่งเป็นการหาคำตอบของสมการเรคคาติที่สภาวะคงตัว (steady-state Riccati) ในรูปแบบของสมการ

$$F^T XF - X - F^T XG1(G2 + G1^T XG1)^{-1} G1^T XF + H = 0 \qquad (4.23)$$

เมื่อ

$$X = P \qquad (4.24)$$

$$F = \Phi^T \qquad (4.25)$$

$$G1 = C^T \qquad (4.26)$$

$$G2 = R \qquad (4.27)$$

$$H = Q \qquad (4.28)$$

เริ่มจากสมการเรคคาติแบบไม่คงตัว ( non-steady-state Riccati )

$$X(k) = H + F^T X(k+)G1[G2 + G1^T X(k+1)G1]^{-1} G1^T X(k)F \qquad (4.29)$$

โดยการกลับทิศทางของเวลา สามารถแปลงสมการที่ (4.29) ได้เป็น

$$X(k+1) = H + F^T X(k)G1[G2 + G1^T X(k)G1]^{-1} G1^T X(k)F \qquad (4.30)$$

เริ่มต้นคำตอบด้วย $X(0)=0$ และอิเทอเรทสมการจนกระทั่งได้คำตอบคงที่ จากนั้นคำนวณหาค่าเมตริกซ์เกนคาลมานจากสมการ

$$K = PC^T[R + CPC^T]^{-1} \tag{4.29}$$

จากนั้นคำนวณชุดของสมการ

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + K[y(k) - C\hat{x}(k/k-1)] \tag{4.30}$$

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi\hat{x}(k/k) + \Gamma_u \Delta u(k) \tag{4.31}$$

$$\hat{y}(k/k) = C\hat{x}(k/k) \tag{4.32}$$

ดังนั้นสมการของการประมาณค่าสเตตจะลดรูปเป็นสมการที่ (4.30), (4.31) และ (4.32)

สำหรับงานวิจัยนี้มีเป้าหมายคือการพัฒนาทฤษฎีเบื้องต้นของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟและทฤษฎีของคาลมานฟิลเตอร์ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้นสำหรับการออกแบบเครื่องควบคุมสำหรับระบบเครื่องปฏิกรณ์เคมีถังกวนแบบต่อเนื่องซึ่งเป็นระบบเวลาต่อเนื่องที่ไม่เป็นเชิงเส้นภายใต้ขอบเขตจำกัดของการดำเนินงาน ที่สามารถรับประกันถึงเสถียรภาพและสมรรถนะความทนทานของการควบคุม โดยในงานวิจัยได้พิจารณาถึงปัญหาการควบคุมในด้านต่าง ๆ เป็นต้นว่า สมรรถนะของการควบคุม, การกำจัดค่าการรบกวนระบบ, การติดตามค่าเซ็ทพอยท์ และการควบคุมในกรณีที่มีความผิดพลาดของพารามิเตอร์ของแบบจำลอง/กระบวนการที่ทำการควบคุมเป็นต้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย