บทที่ 3

ทฤษฎีของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

บทนี้กล่าวถึงทฤษฎีของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟซึ่งอธิบายถึงข้อดีและข้อจำกัดของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟและสิ่งที่ต้องการสำหรับการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ, โครงสร้างโดยทั่วไปของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ, หลักการพื้นฐานของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟและรูปแบบของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ในงานวิจัย

3.1 บทนำ

การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟเป็นการควบคุมที่อาศัยแบบจำลองเป็นพื้นฐาน (Model Based Control) ในการคำนวณค่าตัวแปรปรับที่เหมาะสมเพื่อควบคุมตัวแปรควบคุมให้อยู่ที่ค่าที่ต้องการ โดยแบบจำลองที่ใช้สำหรับการควบคุมมีทั้งแบบจำลองที่เป็นเชิงเส้น (linear model) และแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear model) ซึ่งสามารถครอบคลุมข้อมูลต่าง ๆ ของระบบทั้งที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นได้ รูปแบบต่าง ๆ ของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่เป็นที่รู้จักกันดีเช่น การควบคุมแบบไดนามิกส์เมตริกซ์ (Dynamic Matrix Control, DMC) (Culter and Ramgker, 1980), การควบคุมแบบโมเดลอัลกอริธึมมิก (Model Algorithmic Control, MAC) (Rouhani and Methra, 1982), การควบคุมแบบอินเทอนัลโมเดล (Internal Model Control, IMC) (Garcia and Morari, 1982), การควบคุมแบบควอดราติกไดนามิกส์ (Quadratic Dynamic Matric Control, QDMC) (Garcia and Moshedi, 1986), การควบคุมแบบเจเนอริกโมเดล (Generic Model Control ,GMC) (Clarke, 1987) ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันคือเป็นการควบคุมโดยอาศัยแบบจำลองในการคำนวณชุดของค่าการควบคุมในอนาคตโดยการออฟติไมซ์ด้วยออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น (objective function) ซึ่งทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ทำนายน้อยที่สุดภายใต้ขอบเขตจำกัดของการดำเนินการต่าง ๆ เพื่อให้ได้ค่าการตอบสนองที่ต้องการ นอกจากนี้รูปแบบทั่วไปของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟไม่ถูกจำกัดในเทอมของแบบจำลอง, ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น, และฟังก์ชั่นขอบเขตจำกัดซึ่งสามารถรวมไว้ในอัลกอริธึมสำหรับการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟได้ นอกจากนี้ยังได้มีการประยุกต์ใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟร่วมกับการประมาณค่าตัวแปรสเตตและพารามิเตอร์ เช่นคาลมานฟิลเตอร์ซึ่งจะช่วยส่งเสริมให้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟมีประสิทธิภาพการทำงานสูงยิ่งขึ้น ซึ่งในส่วนนี้ได้กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟรวมถึงสิ่งที่ต้องการสำหรับการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

3.1.1 ข้อดีและข้อจำกัดของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟมีข้อดีที่เหนือกว่าการควบคุมแบบเชิงเส้นแบบดั้งเดิม เช่น การควบคุมแบบพีไอดีคือ

- การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ สามารถรับประกันเสถียรภาพของระบบได้ตราบเท่าที่แบบจำลองของกระบวนการสามารถเป็นตัวแทนของระบบได้อย่างน่าเชื่อถือ นั่นคือเมื่อแบบจำลองสามารถเชื่อถือได้ในระดับหนึ่งเครื่องควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟจะสามารถควบคุมกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามอาจกล่าวได้ว่าการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟสามารถที่จะรับประกันเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ ที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูงได้โดยขึ้นกับแบบจำลองที่ใช้ว่าเป็นเชิงเส้น/ไม่เชิงเส้น หรือเป็นแบบจำลองที่ง่ายหรือมีความยุ่งยากซับซ้อนเป็นต้น
- สามารถใช้ควบคุมกระบวนการที่ไม่เป็นเชิงเส้นสูงกระบวนการที่มีตัวแปรอินพุทตัวแปรเอาท์พุทจำนวนมากและกระบวนการที่มีขอบเขตจำกัดได้ดี
- สมรรถนะการควบคุมที่ดีของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ สามารถกำหนดได้โดยเลือกออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นที่เหมาะสมซึ่งขึ้นกับวัตถุประสงค์ในการควบคุม

ข้อจำกัดของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟคือ

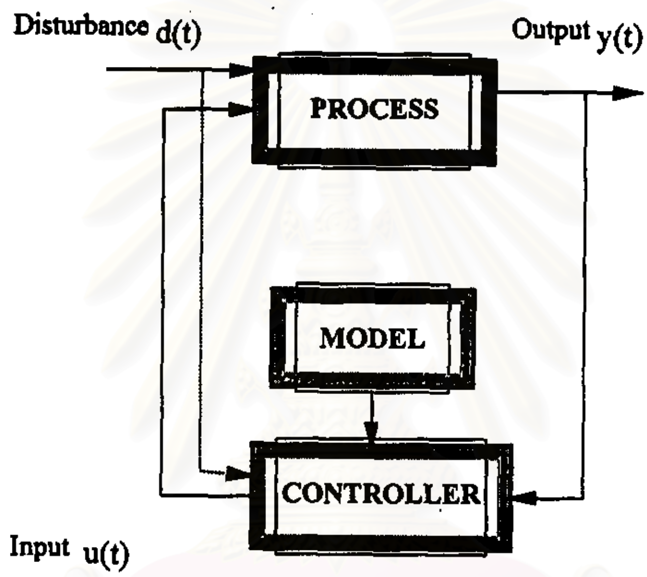
- การประยุกต์ใช้งานของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ จำกัดสำหรับกระบวนการหรือระบบซึ่งสามารถหาแบบจำลองของกระบวนการที่น่าเชื่อถือและมีความถูกต้องพอสมควรทั้งนี้เนื่องจากการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ เป็นการควบคุมที่อยู่บนพื้นฐานของแบบจำลอง

3.1.2 สิ่งที่ต้องการสำหรับการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

- การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟต้องการแบบจำลองของกระบวนการและพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่มีความน่าเชื่อถือและถูกต้องพอสมควร โดยเราสามารถคาดหมายได้ว่าการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ จะสามารถทำการควบคุมระบบใด ๆ ที่มีแบบจำลองที่น่าเชื่อถือได้เป็นอย่างดี แต่เมื่อมีความผิดพลาดของแบบจำลองหรือพารามิเตอร์ต่าง ๆ จะทำให้การคำนวณค่าตัวแปรปรับผิดไป วิธีแก้คือใช้การประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์เพื่อช่วยในการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ให้ถูกต้องหรือใกล้เคียงกับค่าที่ถูกต้อง แต่อย่างไรก็ตามการประมาณค่ายังขึ้นกับแบบจำลองที่ใช้และพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของกระบวนการว่ามีความผิดพลาดมากน้อยเพียงใด
- การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟต้องการ การวัดค่าของตัวแปรควบคุมรวมทั้งเอาท์พุทต่าง ๆ ของกระบวนการ ซึ่งทำให้รู้สภาวะปัจจุบันของระบบ และอาศัยค่าเอาท์พุทที่วัดได้เป็นพื้นฐานในการคำนวณค่าตัวแปรปรับที่เหมาะสมหรือประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งถ้าไม่มีการวัดค่าเอาท์พุทนี้เครื่องควบคุมและตัวประมาณค่าจะไม่สามารถคำนวณค่าตัวแปรปรับหรือประมาณค่าพารามิเตอร์หรือตัวแปรต่าง ๆ ได้เนื่องจากไม่สามารถทราบค่าที่ปัจจุบันของระบบ

3.2 โครงสร้างของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

การนำใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟรูปแบบต่าง ๆ นั้นมีโครงสร้างโดยรวมเหมือนกันโดยจะแตกต่างกันไปในรายละเอียด โครงสร้างโดยทั่วไปของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟแสดงได้ดังรูปที่ 3.1

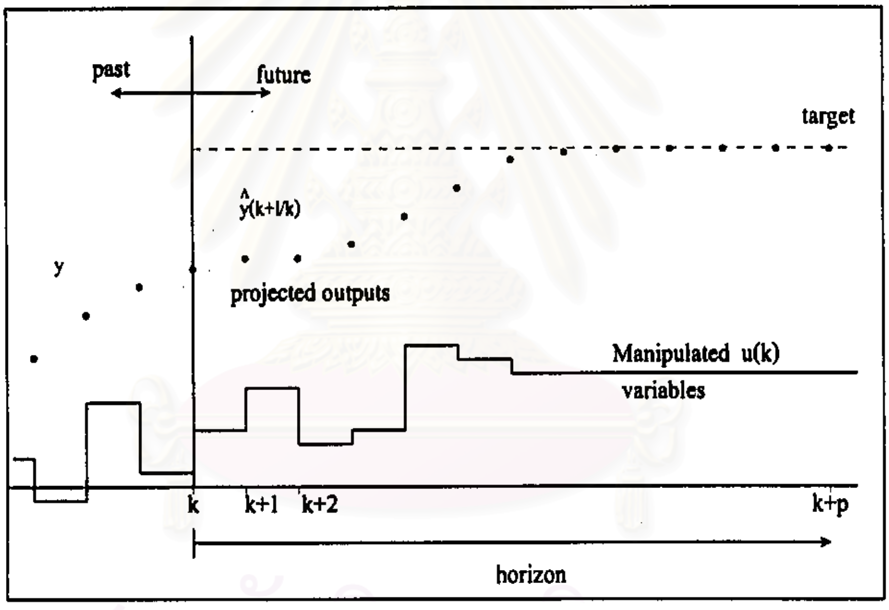


รูปที่ 3.1 โครงสร้างโดยทั่วไปของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

รูปแบบของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟนั้นเป็นการควบคุมแบบป้อนกลับ (Feedback Control) ซึ่งหมายความว่าเครื่องควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟจะทำการปรับค่าของตัวแปรปรับโดยอาศัยค่าเบี่ยงเบนจากค่าเซ็ทพอยท์ของตัวแปรควบคุม นอกจากนี้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟยังเป็นการควบคุมแบบป้อนไปข้างหน้าด้วย คือสามารถรวมค่าการรบกวนระบบเข้าไว้ในแบบจำลองสำหรับการควบคุม ซึ่งทันทีที่ตัวควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟรับรู้ว่าเกิดการรบกวนกับระบบ ตัวควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟก็จะทำการปรับค่าตัวแปรปรับกระบวนการ โดยที่ไม่จำเป็นต้องให้ตัวแปรควบคุมเกิดการเบี่ยงเบนไปจากค่าเซ็ทพอยท์ก่อนจึงเริ่มทำการควบคุม ดังนั้นจึงเป็นที่คาดหมายได้ว่า การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟจะสามารถทำการควบคุมระบบใด ๆ ที่มีแบบจำลอง

ของกระบวนการที่สามารถเป็นตัวแทนของระบบได้อย่างน่าเชื่อถือได้เป็นอย่างดี และให้สมรรถนะการควบคุมที่ดีกว่าการควบคุมแบบดั้งเดิมเช่นการควบคุมแบบพีไอดี

หลักการของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟคือตัวควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ จะใช้ข้อมูลเอาท์พุทของกระบวนการ ในการคำนวณค่าของตัวแปรปรับที่เหมาะสมโดยอาศัยแบบจำลอง และอาศัยแบบแผนของการออฟติไมซ์ในการทำนายแนวทางของตัวแปรควบคุม, y ผ่านแกนการทำนาย (prediction or output horizon), P ด้วยค่าของตัวแปรปรับกระบวนการ, u ซึ่งเปลี่ยนแปลงผ่านแกนการควบคุม (control or input horizon), M โดยที่ $M \leq P$ ซึ่งสเต็บของการทำนายนี้ แสดงได้ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การออฟติไมซ์ของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่เวลา k

ที่สเต็บเวลา k เครื่องควบคุมจะทำการคำนวณชุดของตัวแปรปรับในปัจจุบันและในอนาคตผ่านแกนการควบคุมไป M สเต็บ คือ $\Delta u(k/k), \Delta u(k+1/k), ..., \Delta u(k+M-1/k)$ ซึ่งจะทำนายพฤติกรรมในอนาคตของเอาท์พุทของกระบวนการผ่านแกนการทำนาย ไป P สเต็บ คือ $y(k+1/k), y(k+2/k), ..., y(k+P/k)$ โดยจะได้ค่าของเอาท์พุทซึ่งสอดคล้องตามเป้า

หมายที่ต้องการ โดยการออฟติไมซ์ด้วยออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นซึ่งทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ทำนายน้อยที่สุดภายใต้ขอบเขตจำกัดต่าง ๆ ของอินพุทและเอาท์พุทของกระบวนการ ซึ่งขอบเขตจำกัดเหล่านี้สามารถรวมเข้าไว้ในปัญหาของการออฟติไมซ์โดยตรง

จากชุดของตัวแปรปรับที่คำนวณได้ ค่าของตัวแปรปรับเพียงค่าแรก $\Delta u(k/k)$ เท่านั้นที่นำมาประยุกต์กับกระบวนการจริงจากสเต็บเวลา k ถึง $k+1$ ที่สเต็บเวลา $k+1$ จะได้ค่าวัด $y(k+1)$ ซึ่งจะถูกเปรียบเทียบกับค่าเป้าหมาย ถ้ายังมีความคลาดเคลื่อนอยู่จะทำการคำนวณชุดของตัวแปรปรับใหม่ที่เวลาถัดไป 1 สเต็บ และที่ช่วงเวลาถัดไปจะได้ค่าวัดใหม่ของเอาท์พุท แกนการควบคุม M และแกนการทำนาย P จะเคลื่อนที่ไปข้างหน้า 1 สเต็บและทำการคำนวณซ้ำในทำนองเดียวกันโดยอาศัยค่าวัดใหม่เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ วิธีการดังกล่าวเป็นวิธีการที่เรียกว่าแกนการเคลื่อนที่ (moving horizon) หรือ แกนการถดถอย (receding horizon) การเลือกค่าพารามิเตอร์ของเครื่องควบคุม M , P ที่เหมาะสมจะสามารถรับประกันเสถียรภาพของระบบได้

3.3 หลักการพื้นฐานของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงโครงสร้างของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟโดยทั่วไป สำหรับในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ ที่อาศัยสมการสเตตสเปซ (state space formulation of Model Predictive Control) ในรายละเอียดซึ่งพิจารณาถึง แบบจำลองของกระบวนการ (plant model), แบบจำลองสำหรับการควบคุม (controller model), รูปแบบของออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น (objective function), ขอบเขตจำกัด (constraints) ต่าง ๆ และการแก้ปัญหาการออฟติไมซ์ เพื่อหาค่าการควบคุมที่เหมาะสม

3.3.1 แบบจำลองของกระบวนการ (Plant Model)

กระบวนการในทางเคมีที่มีการเปลี่ยนแปลงจะสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ของกระบวนการ ซึ่งเรียกว่าแบบจำลองของกระบวนการได้ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติอาจไม่สามารถเขียนสมการทางคณิตศาสตร์อย่างสมบูรณ์ครบถ้วนเพื่ออธิบายกระบวนการจริงซึ่งมีความซับซ้อนได้อย่างถูกต้อง แต่เป็นเพียงการประมาณการของกระบวนการจริงเท่านั้น ทั้งนี้แบบจำลองของกระบวนการจะสร้างขึ้นเพื่อวัตถุประสงค์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. เพื่อทำความเข้าใจกระบวนการ โดยไม่ต้องใช้กระบวนการจริง
2. เพื่อทดสอบ/ ออกแบบ รวมทั้งเลือกค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม
3. เพื่อออกแบบระบบและข้อจำกัดต่าง ๆ ที่ใช้ในการควบคุม
4. เพื่อหาจุดที่เหมาะสมของกระบวนการและปรับค่าสภาวะการดำเนินการผลิตเพื่อให้ได้ผลกำไรสูงสุด

โดยทั่วไปกระบวนการแบบไม่เชิงเส้นต่าง ๆ (Nonlinear Plant) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

$$y(t) = g(x(t),u(t),t) \tag{3.2}$$

โดยที่

$$t \in [t_0, t_f]$$

เมื่อ f เป็นไดนามิกส์ของกระบวนการที่ต้องการควบคุม และสภาวะเริ่มต้น (initial condition) เป็นค่าวัดจากกระบวนการจริง, x_0, ที่เวลา t_0 ในช่วงเวลาจากปัจจุบัน, t_0 ถึง เวลาในอนาคต, t_f โดยแบบจำลองไดนามิกส์ของกระบวนการสามารถหาได้จาก

1. แบบจำลองกล่องดำ (Black-Box Model)

เป็นแบบจำลองซึ่งอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างค่าอินพุทและเอาท์พุทต่าง ๆ ของกระบวนการ โดยเริ่มต้นด้วยการกำหนดขอบเขตของระบบ (system boundary) ที่ต้องการวิเคราะห์ด้วยการสร้างกรอบสี่เหลี่ยมรอบกระบวนการเพื่อดูว่ามีกระแสใดบ้างที่เข้าไปในกรอบ และกระแสใดบ้างที่ออกจากกรอบ เทคนิคนี้ใช้ได้ทั้งกับกระบวนการแบบต่อเนื่อง (Continuous).และกระบวนการแบบครั้งคราว (Batchs) โดยสมมติว่ามีกระแสของมวลสารไหลเข้าและออกจากกระบวนการเช่นเดียวกับกระบวนการแบบต่อเนื่อง
แบบจำลองกล่องดำที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรอินพุทกับตัวแปรเอาท์พุทในเวลาต่าง ๆ ดังตัวอย่างเช่น

$$y(k+1) = y(k) + y(k-1) + u(k) + u(k-1) \tag{3.3}$$

แบบจำลองดังกล่าวมักใช้ในกรณีที่ระบบมีความยุ่งยากซับซ้อน รวมทั้งระบบที่ไม่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ได้ถูกต้องหรือใกล้เคียงกับระบบจริงยกตัวอย่างเช่นกระบวนการทางชีวภาพเป็นต้น

2. แบบจำลองสมการสมดุลมวลสารและพลังงาน (Material and Energy Balance Model)

เป็นวิธีการหาแบบจำลองของกระบวนการที่นิยมใช้กันมากที่สุด การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถทำได้โดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงมวลสารและพลังงาน ในรูปของตัวแปรอื่นทั้งที่สามารถวัดค่าได้โดยตรงหรือไม่สามารถวัดค่าได้โดยตรงก็ตาม สมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถหาได้โดยใช้พื้นฐานความรู้ต่าง ๆ เพื่ออธิบายกระบวนการ แต่อย่างไรก็ตามวิธีนี้ไม่นิยมใช้สำหรับระบบที่มีความยุ่งยากซับซ้อน, ระบบซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปสมการสมดุลมวลสารและพลังงานได้ยากและระบบซึ่งมีตัวแปรจำนวนมากเป็นต้น สำหรับในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้แบบจำลองของสมการสมดุลมวลสารและพลังงานในการอธิบายกระบวนการที่ทำการควบคุม

3.4.2 แบบจำลองสำหรับการควบคุม (Controller Model)

แบบจำลองที่ใช้สำหรับตัวควบคุมในการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบคือ

1. แบบจำลองของการตอบสนองแบบสเต็บ (Step Response Model)

พิจารณาได้จากการตอบสนองของกระบวนการในแบบลูพเปิด โดยสมมติให้ระบบเริ่มต้นที่สภาวะคงตัว สำหรับระบบเชิงเส้นซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time- invariant) การเปลี่ยนแปลงอินพุทแบบสเต็บ 1 หน่วย (unit step) ที่เวลา k ให้ค่าการตอบสนอง 1 หน่วยสเต็บแบบดิสครีตของเอาท์พุทเป็น

$$
\begin{aligned}
y(k+i/k) &= a_i \quad i = 1, 2, 3, ..., N \\
&= a_{ss}, \quad i > N
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

เมื่อ $a_i =$ สัมประสิทธิ์ของการตอบสนองแบบสเต็บ

$y(k+i/k) =$ ค่าเอาท์พุทที่เวลา k ซึ่งขึ้นกับค่าอินพุทของกระบวนการที่เวลา $k-1$ โดยใช้ช่วงเวลาการสุ่มเป็น dt

ค่าการตอบสนองแบบสเต็บ $\{a_1, a_2, a_N\}$ ประกอบกันเป็นแบบจำลองที่สมบูรณ์ของระบบซึ่งทำให้เราคำนวณค่าเอาท์พุทของระบบสำหรับลำดับใด ๆ ของอินพุทได้เป็น

$$
y(k/k) = \sum_{i=1}^{N} a_i \Delta u(k-i) + a_{ss} u(k-N-1)
\tag{3.5}
$$

แบบจำลองการตอบสนองแบบสเต็บสามารถใช้ได้ทั้งกระบวนการที่มีเสถียรภาพและกระบวนการอินทีเกรท (integrating processes) สำหรับกระบวนการอินทีเกรทจะสมมติให้ความชันของการตอบสนองคงที่หลังจาก N สเต็บ

สำหรับกระบวนการซึ่งแสดงพฤติกรรมที่เป็นไดนามิกส์แบบไม่ปกติจะทำให้การเลือกโครงสร้างของแบบจำลองที่เหมาะสมได้ยาก การหลีกเลี่ยงปัญหานี้ทำได้โดยการใช้แบบจำลองของ

การตอบสนองแบบดิสครีตอิมพัลส์ (impulse response model) ซึ่งให้ผลดี โดยสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองสามารถหาได้โดยตรงจากการตอบสนองแบบสเต็บโดยไม่ต้องมีการสมมติโครงสร้างของแบบจำลอง และสมการต่าง ๆที่ใช้สำหรับแบบจำลองแบบสเต็บยังคงใช้ได้โดยการแทน

a_i ด้วย h_i เมื่อ $h_i = a_i - a_{i-1}$, $h_1 = a_1$
$\Delta u(k+i)$ แทนด้วย $u(k+i)$
a_{ss} แทนด้วย h_{ss} เมื่อ $h_{ss} = a_{ss} - a_N$

การตอบสนองแบบสเต็บสามารถหาได้โดยตรงจากการทดลองทำไอเดนติฟิเคชั่นแบบจำลอง หรือสร้างจากทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นแบบต่อเนื่องหรือแบบดิสครีตของระบบ หรือสร้างได้จากแบบจำลองแบบสเตตสเปซ

2. แบบจำลองสเตตสเปซ (State-Space Model)

แบบจำลองในรูปแบบของสมการสเตตสเปซของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟสามารถแบ่งได้เป็น

2.1 แบบจำลองในระบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous-Time Systems)

2.1.1 แบบจำลองเชิงเส้น (Linear Model)

รูปแบบโดยทั่วไปของแบบจำลองเชิงเส้นในระบบเวลาต่อเนื่องสามารถแทนได้โดยสมการ

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + E(t) \quad ;x(0) = x_0 \tag{3.6}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{3.7}$$

เมื่อ $x(t) \in \Re^{n}$ แสดงถึงสเตตที่เวลา t ใด ๆ, $u(t) \in \Re^{m}$ แสดงถึงค่าของตัวแปรปรับกระบวนการหรืออินพุท และ $y(t) \in \Re^{p}$ แสดงถึงค่าของตัวแปรควบคุมหรือเอาท์พุท โดยทั่วไป $E(t)$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ของความผิดพลาดจากแบบจำลองซึ่งสามารถละได้ $A(t), B(t), C(t), D(t)$ เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ซึ่งได้จากการทำการประมาณเชิงเส้นของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและถ้าเมตริกซ์ $A(t), B(t), C(t), D(t)$ เป็นฟังก์ชั่นของเวลา ระบบเชิงเส้นนี้จะเรียกว่าระบบเชิงเส้นซึ่งแปรเปลี่ยนตามเวลา (linear time-varying, LTV) และถ้าเมตริกซ์เหล่านี้เป็นค่าคงที่ ระบบเชิงเส้นนี้จะเรียกว่าระบบเชิงเส้นซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time-invariant, LTI)

2.1.2 แบบจำลองแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Model)

รูปแบบโดยทั่วไปของแบบจำลองไม่เชิงเส้นในระบบเวลาต่อเนื่องสามารถแทนได้โดยสมการ

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t); x(0) = x_0 \tag{3.8}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \tag{3.9}$$

ในกรณีส่วนใหญ่ระบบแบบไม่เชิงเส้นมักเป็นระบบซึ่งเปลี่ยนแปลงตามเวลา, LTI โดยปกติแล้ว f และ g นิยามเป็นฟังก์ชั่นที่สามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง (continuously differentiable functions)

2. 2 แบบจำลองระบบเวลาดิสครีต (Discrete-Time Systems)

2.2.1 แบบจำลองเชิงเส้น (Linear model)

รูปแบบโดยทั่วไปของแบบจำลองเชิงเส้นในระบบเวลาดิสครีตสามารถแทนได้โดยสมการ

$$x(t+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k); x(0) = x_0 \tag{3.10}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \tag{3.11}$$

เมื่อรวมค่าการรบกวนระบบ (noize) เข้าไว้ในแบบจำลอง แบบจำลองดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น

$$x(k+1)=\Phi(k)x(k)+\Gamma_u(k)u(k)+\Gamma_d(k)d(k)+\Gamma_w(k)w(k)+\zeta(k);x(0)=x_0 \tag{3.12}$$

$$y(k)=C(k)x(k)+D_u(k)u(k)+D_d(k)d(k)+D_w(k)w(k)+\eta(k) \tag{3.13}$$

เมื่อ $d(k)$ เป็นเวกเตอร์ของค่าการรบกวนระบบที่วัดได้, $w(k)$ แทนค่าการรบกวนระบบที่วัดไม่ได้ และ $\eta(k)$ แทนการรบกวนระบบ และนิยามเมตริกซ์ $\Phi(t)$ เป็นสเตตทรานซิทชั่นเมตริกซ์ (state transition matrix)

โดยทั่วไปสำหรับระบบเชิงเส้นแบบเวลาต่อเนื่องสมการ (3.10) และ (3.11) ที่ไม่ขึ้นกับเวลาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบเวลาดิสครีตโดยที่ $\Phi(k),\Gamma(k),\zeta(k)$ นิยามโดย

$$\Phi(k)=e^{AT} \tag{3.14}$$

$$\Gamma(k)=\int_0^T e^{A(T-t)}Bdt \tag{3.15}$$

$$\zeta(k)=\int_0^T e^{A(T-t)}Edt \tag{3.16}$$

เมื่อ T เป็นช่วงเวลาสุ่ม (sampling time) และสเตตทรานซิทชั่นเมตริกซ์ $\Phi(T,t)$ นิยามโดย

$$\Phi(T,t)=e^{A(T-t)}=I+A(T-t)+A^2\frac{(T-t)^2}{2!}+,\ldots,+A^k\frac{(T-t)^k}{k!} \tag{3.17}$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่โดยอาศัยข้อมูลจากระบบเวลาต่อเนื่องได้ในรูปของสมการ

$$x(k+1)=e^{AT}x(k)+A^{-1}(e^{AT}-I)Bu(k) \tag{3.18}$$

2.2.2 แบบจำลองแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Model)

$$x(k+1)=F(x(k),u(k),k);\quad x(0),u(0)\ \text{นิยาม} \tag{3.19}$$

$$y(k) = G(x(k), u(k), k) \tag{3.20}$$

ในกรณีทั่วไปนั้นไม่สามารถหารูปแบบของคำตอบที่ใกล้เคียงกับระบบไม่เชิงเส้นแบบเวลาต่อเนื่อง (continuous-time nonlinear system) ดังสมการ (3.8) ซึ่งหมายความว่า F และ G ไม่ทราบค่า สำหรับแบบจำลองของระบบส่วนใหญ่ที่เดิมอยู่ในรูปแบบของเวลาต่อเนื่อง

3.4.3 ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น (Objective Function)

หลักการของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟนั้นอาศัยออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นในการออฟติไมซ์ให้ได้ค่าการควบคุมที่เหมาะสมซึ่งทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ทำนายน้อยที่สุดภายใต้ขอบเขตจำกัดของการดำเนินการต่าง ๆ รูปแบบโดยทั่วไปของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟนั้นไม่ถูกจำกัดในเทอมของออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นในการออกแบบการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟสามารถเลือกใช้ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นในรูปแบบต่าง ๆ ได้ ซึ่งขึ้นกับเป้าหมายของการควบคุม รูปแบบโดยทั่วไปของออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นเขียนได้ในรูปของสมการ

$$\min_{u(t)} \Phi[x(t),u(t),y(t)] \tag{3.21}$$

ในกรณีทั่วไปโดยส่วนใหญ่มักประยุกต์ใช้ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นสำหรับระบบเวลาต่อเนื่อง (discrete-time systems) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการ

$$J_k = J(t_k, x_k) = \int_{t_k}^{t_k+P_kT} [\|x_k(t)\|^2 Q + \|u_k(t)\|^2 R]dt \tag{3.22}$$

เมื่อ $\|-\|$ แสดงถึง Euclidean norm ของเวกเตอร์และ $\|x_k\|^2 Q = x_k{}^T Q x_k$ เมื่อ x_k เป็นค่าสเตตของระบบที่เวลา t_k, P_k เป็นแกนของเอาท์พุทหรือแกนการทำนาย (บางอัลกอริธึมกำหนดให้เป็นฟังก์ชั่นของ k), $x_k(t)$ แทนแนวทางของสเตตของแบบจำลองสำหรับทุกค่าของ $t \in [t_k, t_k + P_kT]$, $u_k(t)$ เป็นค่าของตัวแปรปรับที่คำนวณที่ช่วงเวลาและสภาวะเริ่มต้นเดียวกัน;

Q และ R แทนเมตริกซ์ค่าบวก (positive definite matrices) ซึ่งเป็นเมตริกซ์ของค่าถ่วงดุลน้ำหนักในออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น

สำหรับการคำนวณในรูปแบบที่ง่ายขึ้น, ให้ชุดของค่าการควบคุม เป็นค่าที่ไม่ต่อเนื่อง $\{u(k/k), u(k+1/k), ..., u(k+M-1/k)\}$ แทนค่าที่ต่อเนื่อง, $u_k(t)$ ในกรณีนี้ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นเขียนใหม่ได้ในรูปของสมการ

$$J_k = J(t_k, x_k) = \int_{t_k}^{t_k+PT} x_k(t)^T Q x_k(t) dt + T\sum_{i=0}^{M-1} u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \tag{3.23}$$

สำหรับระบบเวลาดิสครีตส่วนใหญ่มักใช้ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นเป็นสมการควอดราติกในรูปของสมการ

$$\begin{aligned} J_k &= \sum_{i=1}^{P} x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + \sum_{i=0}^{M-1} u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \\ &+ \sum_{i=0}^{M-1} \Delta u(k+i/k)^T S \Delta u(k+i/k) \end{aligned} \tag{3.24}$$

เมื่อ S เป็นเมตริกซ์ค่าบวก (positive definit matrix)

$$\Delta u(k/k) = u(k/k) - u(k-1/k) \tag{3.25}$$

$$\Delta u(k+i/k) = u(k+i/k) - u(k+i-1/k), i \in [1, M-1] \tag{3.26}$$

ในกรณีทั่วไปสามารถเลือกค่าถ่วงดุลน้ำหนัก Q,R และ S เป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (เป็นฟังก์ชั่นของ k) แต่ในกรณีที่ง่ายขึ้นสามารถกำหนดให้เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับเวลา นอกจากนี้ยังมีการใช้อัลกอริธึมการควบคุมแบบควอดราติกไดนามิกส์ (Quadratic Dynamic Matrix Control) ซึ่งใช้ควอดราติกออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น เป็นค่าถ่วงดุลน้ำหนักกำลังสองของค่าความผิดพลาดที่ทำนายผ่านแกนการทำนายในอนาคตที่จำกัด $(k+1, k+2, ... k+P)$ เช่นเดียวกับค่าถ่วงดุลน้ำหนักบนอินพุทและอัตราการเปลี่ยนแปลงบนอินพุท (Garcia and Morshedi, 1986; Garcia and Morari, 1985b) ในรูปของสมการ

$$J_k = \sum_{i=1}^{P} e(k+i/k)^T Q^2 e(k+i/k) + \sum_{i=0}^{M-1} u(k+i/k)^T R^2 u(k+i/k)$$
$$+ \sum_{i=0}^{M-1} \Delta u(k+i/k)^T S^2 \Delta u(k+i/k) \tag{3.27}$$

$$e(k/k) = r(k/k) - \hat{y}(k/k) = setpo\text{int} - predicted\ output \tag{3.28}$$

ค่าพารามิเตอร์ปรับจูน (tuning parameter) ของออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น Q, R และ S สามารถปรับให้การควบคุมมีเสถียรภาพ และสมรรถนะที่ดีได้

3.4.4 ขอบเขตจำกัด (Constraints)

การปฏิบัติงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ ในโรงงานอุตสาหกรรมมักจะมีขอบเขตจำกัด ดังนั้นในการออกแบบการควบคุมต้องมีการป้องกันไม่ให้อุปกรณ์ต่าง ๆ ปฏิบัติการภายนอกขอบเขตที่กำหนดไว้จนเกิดอันตรายหรือกระบวนการไม่สามารถปฏิบัติงานได้ ในการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ การออฟติไมซ์ หรือสเต็บของการทำนายนั้นขึ้นกับขอบเขตจำกัดต่าง ๆ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของสมการดังนี้

Equality Constraints :

$$K(x(t), u(t), t) = 0 \tag{3.29}$$

Inequality Constraints :

$$h(x(t), u(t), t) \geq 0 \tag{3.30}$$

โดยทั่วไปขอบเขตจำกัดแบบ inequality constraints มักพบมากกว่า equality constraints สำหรับกรณีของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นการตั้งขอบเขตจำกัดแบบ equality constraints ไม่สามารถทำให้สอดคล้องกับจำนวนจำกัดของอิเทอเรชั่น (iterations) ได้ดังนั้นจึงควรหลีกเลี่ยง

ในปัญหาของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ ส่วนใหญ่มักพิจารณาขอบเขตจำกัดเพียง 2 ชนิดเท่านั้นคือขอบเขตจำกัดบนตัวแปรอินพุทและขอบเขตจำกัดบนตัวแปรสเตต (โดยเฉพาะเอาท์

พุท) ขอบเขตจำกัดต่าง ๆ บนตัวแปรอินพุทโดยทั่วไปแล้วมักเป็นขอบเขตจำกัดอย่างแข็ง (hard constraint) ซึ่งประกอบด้วยขอบเขตจำกัดล่างและบน (lower and upper bound) บนตัวแปรเหล่านั้น ซึ่งอยู่ในรูปของสมการ

$$u(t) \in U = \left\{u \in \Re^m : u_{\min} \le u \le u_{\max}\right\}, \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{3.31}$$

เพื่อให้ความหมายของปัญหาการควบคุมสมบูรณ์ U มักบรรจุค่าเริ่มต้นไว้ด้วย

ส่วนขอบเขตจำกัดอื่น ๆ ที่ปกติแล้วมักใช้กันมากคือขอบเขตจำกัดบนอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรปรับกระบวนการซึ่งอยู่ในรูปของสมการ

$$\left|\Delta u_j(k+i/k)\right| \le \Delta u_{\max,j}, \forall i = 0,\ldots,M-1, k \ge 0, \text{ ด้วย } \Delta u_{\max,j} > 0, \forall j = 1,\ldots,M \tag{3.32}$$

เมื่อ $\Delta u_j(k+i/k), \Delta u_{\max,j}, j = 1,\ldots,M,$ เป็นสมาชิกของเวกเตอร์ $\Delta u(k+i/k), \Delta u_{\max}$, ตามลำดับ เราสามารถแสดงขอบเขตจำกัดเหล่านี้ในรูปของเวกเตอร์ดังสมการ

$$\left|\Delta u_j(k+i/k)\right| \le \Delta u_{\max}, \forall i = 0,\ldots,M-1, k \ge 0, \quad \Delta u_{\max} > 0 \tag{3.33}$$

สำหรับขอบเขตจำกัดบนเอาท์พุทโดยทั่วไปสามารถเขียนได้อยู่ในรูปของสมการ

$$y_{\min} \le y(k+i/k) \le y_{\max}, \quad \forall i = 1,\ldots,P, \quad k \ge 0 \tag{3.34}$$

หรืออยู่ในรูปแบบของขอบเขตจำกัดอย่างอ่อน (soft constraints) ดังสมการ

$$y_{\min} - \varepsilon \le y(k+i/k) \le y_{\max} + \varepsilon, \quad \forall i = 1,\ldots,P, \quad k \ge 0 \tag{3.35}$$

รูปแบบของขอบเขตจำกัดนี้อนุญาติให้ละเมิดขอบเขตของ $y_{\min}$ และ $y_{\max}$ อย่างมากที่สุดเท่ากับ ε เมื่อปัญหาของขอบเขตจำกัดอย่างแข็ง (hard constraints) เป็นไปไม่ได้ ค่าของ ε ถูกเพิ่มเข้าไปในออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นเพื่อลดการละเมิดขอบเขตจำกัดเหล่านี้ให้น้อยที่สุด

นอกเหนือจากขอบเขตจำกัดบนอินพุทและเอาท์พุทแล้ว การออฟติไมซ์ยังอาจขึ้นกับข้อจำกัดทางฟิสิกส์ (physical constraints) บนตัวแปรสเตตต่าง ๆ (ยกตัวอย่างเช่น สัดส่วนโมล (mole fraction) ควรมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1, อุณหภูมิในหน่วยเคลวินต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ หรือความเข้มข้นต้องไม่มีค่าติดลบเป็นต้น) ส่วนข้อจำกัดอื่น ๆ ของตัวแปรสเตตที่เป็นประโยชน์คือข้อจำกัดที่แสดงที่จุดสิ้นสุดของแกนการทำนาย (end constraints) ซึ่งข้อจำกัดบางอย่างเหล่านี้ได้ถูกนำมาใช้ประโยชน์ ยกตัวอย่างเช่นเพื่อรับประกันเสถียรภาพของระบบลูพปิด รูปแบบของขอบเขตจำกัดที่เป็นที่รู้จักกันดีคือ

Equality End Constraint :

$$x(k+P/k)=0, \quad \forall k \geq 0 \tag{3.36}$$

Inequality End Constraint :

$$x(k+P/k)\in W, \quad \forall k \geq 0 \tag{3.37}$$

จากการมีขอบเขตจำกัดของการดำเนินการทำให้ไดนามิกส์ของกระบวนการควบคุมทั้งหมดเป็นแบบไม่เชิงเส้น ถึงแม้ว่ากระบวนการที่ควบคุมถูกสมมติว่าเป็นเชิงเส้นรอบจุดปฏิบัติการ

3.4 รูปแบบของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ในงานวิจัย

จากการที่การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ เป็นการควบคุมโดยอาศัยแบบจำลองในการคำนวณชุดของค่าการควบคุมในอนาคตโดยการแก้ปัญหาการออฟติไมซ์ด้วยออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น ที่แต่ละช่วงเวลาสุ่มซึ่งทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ทำนายน้อยที่สุดภายใต้ขอบเขตจำกัดของการดำเนินการต่าง ๆ เพื่อให้ได้ค่าการควบคุมที่เหมาะสมในการควบคุมกระบวนการให้ได้ค่าการตอบสนองที่ต้องการ และดังที่ได้กล่าวแล้วว่ารูปแบบทั่วไปของโมเดลพรีดิกทีฟ ไม่ถูกจำกัดในเทอมของแบบจำลอง, ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น, และฟังก์ชั่นขอบเขตจำกัดต่าง ๆ อีกทั้งคุณสมบัติต่าง ๆของเครื่องควบคุมไม่ขึ้นกับชนิดของแบบจำลองที่ใช้อธิบายกระบวนการ (e.g., Morari et al., 1989) ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้แบบจำลองของเครื่องควบคุมในรูปแบบของสมการสเตตสเปซ (State-

Space Model) ซึ่งสามารถทำการคำนวณและปรับปรุงสมรรถนะของการควบคุมได้ง่าย โดยที่แบบจำลอง, ออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น และ ฟังก์ชั่นขอบเขตจำกัดต่าง ๆ ดังกล่าวสามารถรวมไว้ในอัลกอริธึมสำหรับการควบคุมได้ แต่ถึงแม้ว่าจะมีการประยุกต์ใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ ที่อาศัยแบบจำลองไดนามิกส์แบบไม่เชิงเส้น (Garcia, 1984) กับระบบต่าง ๆ แต่การประยุกต์ใช้โดยทั่วไปแล้วมักสมมติให้ไดนามิกส์ต่าง ๆ เป็นแบบเชิงเส้น ปัญหาความไม่เป็นเชิงเส้นนั้นเกิดจากการมีขอบเขตจำกัดอย่างมากในการดำเนินงานซึ่งทำให้ไดนามิกส์ของกระบวนการควบคุมทั้งหมดเป็นแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นเพื่อให้เทคนิคการควบคุมนี้สามารถประยุกต์ใช้ในช่วงกว้างขึ้น การประยุกต์ใช้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟในงานวิจัยนี้จึงได้มีการปรับปรุงการทำการประมาณระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นโดยเปลี่ยนจากการประมาณรอบจุดสภาวะคงตัวให้เป็นการประมาณรอบจุดใด ๆ ณ. เวลานั้น (locally linearization) ซึ่งการทำการประมาณนี้จะส่งผลให้เมตริกซ์ A และ B ในสมการ (3.6) เป็นค่าคงที่ที่เวลานั้น เปลี่ยนแปลงค่าไปเมื่อได้รับข้อมูลใหม่และจุดที่ทำการประมาณค่าเปลี่ยนไปตามเวลา (ต่างจากการประมาณค่าแบบเดิมที่เมตริกซ์ A และ B เป็นค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา)

พิจารณาแบบจำลองสเตตสเปซในระบบเวลาดิสครีต

$$x(t+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) \tag{3.38}$$

$$y(k) = C(k)x(k) \tag{3.39}$$

ใช้สมการสเตตสเปซข้างต้น ในการทำนายค่าเอาท์พุทต่าง ๆ ของกระบวนการผ่านแกนการทำนาย P สำหรับ $P \geq M$

ให้ค่า $\Delta u(k+M-1) = \Delta u(k+M) = \Delta u(k+M+1) = \ldots = \Delta u(k+P-1)$ (3.40)

และอาศัยการออฟติไมซ์ด้วยควอดราติกออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นในรูปแบบของสมการ

$$J_k = \min_{\Delta u(k+1/k)\ldots\Delta u(k+M-1/k)} \sum_{i=1}^{P} [Y_{sp}(k+i/k) - Y(k+i/k]^T Q^2 [Y_{sp}(k+i/k) - Y(k+i/k] +$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}\Delta U(k+i/k)^T R^2 \Delta U(k+i/k) \tag{3.41}$$

เมื่อ $$Q^2 = diag\{Ywt^2\} \in R^{(n_i,P)X(n_i,P)} \tag{3.42}$$

$$R^2 = diag\{Uwt^2\} \in R^{(n_i M)X(n_i M)} \tag{3.43}$$

Ywt = เมตริกซ์ถ่วงดุลน้ำหนักของเอาท์พุทของกระบวนการ

Uwt = เมตริกซ์ถ่วงดุลน้ำหนักของอินพุทของกระบวนการ

ภายใต้ขอบเขตจำกัด

$$|\Delta U(k+i/k) \le \Delta U_{max}(k+i/k)| \tag{3.44}$$

$$U_{min}(k+i/k) \le U(k+i/k) \le U_{max}(k+i/k) \tag{3.45}$$

$$Y_{min}(k+i/k) \le Y(k+i/k) \le Y_{max}(k) \tag{3.46}$$

เมื่อ $U(k)$ เป็นเวกเตอร์ของค่าตัวแปรปรับในอนาคต และ $Y(k)$ เป็นเวกเตอร์ของเอาท์พุทในอนาคต

$$U(k) = [u^T(k/k) \quad u^T(k+1/k) \ldots u^T(k+M-1/k)]^T \tag{3.47}$$

$$Y(k) = [y^T(k+1/k) \quad y^T(k+2/k) \ldots y^T(k+P/k)]^T \tag{3.48}$$

เนื่องจากการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟต้องการการคำนวณค่าของคำตอบที่เหมาะสม (optimum) หรือเป็นไปได้ (feasible) ดังนั้นในการแก้ปัญหาออฟติไมซ์นี้จึงต้องการทางเลือกที่สามารถรับประกันได้ว่าสามารถแก้ปัญหาขอบเขตจำกัดต่าง ๆ ได้ภายในจำนวนของสเต็บเวลาที่จำกัด ซึ่งทำได้โดยอาศัยอัลกอริธึมของควอดราติกโปรแกรมมิ่ง (Quadratic Programming, QP)

3.4.1 การหาคำตอบของสมการควอดราติกโปรแกรมมิ่ง (Solution of Quadratic Programing)

ปัญหาของควอดราติกโปรแกรมมิ่งเป็นปัญหาการออฟติไมซ์ด้วยออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นซึ่งเป็นสมการควอดราติก และฟังก์ชั่นของขอบเขตจำกัดต่าง ๆ พิจารณาแบบจำลองสเตตสเปซในระบบเวลาดิสครีต สมการ (3.38) และ (3.39) ในการทำนายค่าเอาท์พุทของกระบวนการผ่านแกน

การทำนาย และอาศัยการออฟติไมซ์ด้วยควอดราติกออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นในรูปแบบของสมการ (3.41) ภายใต้ขอบเขตจำกัด ดังสมการ (3.44) – (3.46)

ปัญหาของควอดราติกโปรแกรมมิ่ง นี้สามารถแสดงได้ในเทอมของอัตราการเปลี่ยนแปลงของอินพุท $\Delta U(k)$ เหมือนรูปแบบที่ใช้ในการควบคุมแบบควอดราติกไดนามิกส์ (Garcia and Morari, 1982) สำหรับในที่นี้สามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายโดยการแทนค่า $U(k)$ ด้วย

$$U(k) = S_\Delta \Delta U(k) + \delta(k) \tag{3.49}$$

เมื่อ

S_Δ เป็น เมตริกซ์ที่มีสมาชิกใต้แนว (lower triangular matrix) ทะแยงมุมเป็น 1

$$\delta(k) = [u^T(k-1) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \tag{3.5}$$

อาศัยพื้นฐานของสมการที่ (3.38) – (3.39) สามารถเขียนสมการสำหรับการทำนายได้เป็น

$$Y(k+1) = Y_0(k) + S_u U(k) \tag{3.51}$$

เมื่อ

$$Y_0(k) = S_x X(k) \tag{3.52}$$

S_x และ S_u เป็นโปรเจ็กชั่นเมตริกซ์ (projection matrices) ของอินพุทและเอาท์พุทตามลำดับ ซึ่งนิยามโดย

$$S_u = \begin{bmatrix} C\Gamma & 0 & 0 & 0 & & \\ C\Phi\Gamma & C\Gamma & 0 & 0 & & \\ & & & & & \\ C\Phi^{M-2}\Gamma & C\Phi^{M-3}\Gamma & C\Gamma & 0 & & \\ C\Phi^{M-1}\Gamma & C\Phi^{M-2}\Gamma & C\Phi\Gamma & C\Gamma & & \\ C\Phi^{M}\Gamma & C\Phi^{M-1}\Gamma & C\Phi^{2}\Gamma & C\Phi\Gamma + C\Gamma & & \\ & & & & & \\ C\Phi^{P-1}\Gamma & C\Phi^{P-2}\Gamma & C\Phi^{P-M+1}\Gamma & C\Phi^{P-M}\Gamma & +\dots+ & C\Gamma \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$S_x = \begin{bmatrix} C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{M-1} \\ C\Phi^{M} \\ C\Phi^{M+1} \\ \vdots \\ C\Phi^{P} \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

การแก้ปัญหาของควอดราติกโปรแกรมมิ่งข้างต้นทำได้โดย นิยามเวกเตอร์ใหม่ของตัวแปรอิสระ (independent variable), $\nu(k)$ ซึ่งจะต้องไม่เป็นค่าลบที่คำตอบที่เป็นไปได้ใด ๆ ในที่นี้กำหนดให้

$$\nu(k) = \Delta U + \Delta U_{max} \tag{3.55}$$

แทนค่า $U(k)$, $Y(k)$ และ $\nu(k)$ ลงในสมการของออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่น ดังนั้นปัญหาของควอดราติกโปรแกรมมิ่ง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (standard quadratic programming) ในรูปของสมการ

$$J = \min_{\nu(k)} \left\{ \frac{1}{2} \nu^T(k) B \nu(k) + a^T(k) \nu(k) \right\} \tag{3.56}$$

เมื่อ

$$a(k) = S_u^T Q (Y_{SP} - Y_0) + B^T \Delta U_{max} \tag{3.57}$$

$$B = S_u^T Q S_u + R \tag{3.58}$$

และขอบเขตจำกัดในสมการที่ (3.45) – (3.47) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\nu(k) \geq 0 \tag{3.59}$$

$$\nu(k) \leq 2\Delta U_{max} \tag{3.60}$$

$$-S_\Delta \nu(k) = -S_\Delta \Delta U_{max} - U_{min} + \delta(k) \tag{3.61}$$

$$S_\Delta \nu(k) = S_\Delta \Delta U_{max} + U_{max} - \delta(k) \tag{3.62}$$

$$-S_u v(k) = -S_u \Delta U_{\max} - Y_{\min} + Y_0(k) \tag{3.63}$$

$$S_u v(k) = S_u \Delta U_{\max} + Y_{\max} - Y_0(k) \tag{3.64}$$

สมการ ที (3.59) ถึง (3.64) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$A v(k) \le b(k) \tag{3.65}$$

เมื่อ A เป็นสัมประสิทธิ์ของ inequality constraints

$$A = \begin{bmatrix} I \\ -S_\Delta \\ S_\Delta \\ -S_u \\ S_u \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

$b(k)$ เป็นเทอมทางขวามือของ inequality constraints (RHS)

$$b(k) = \begin{bmatrix} 2\Delta U_{\max} \\ -S_\Delta \Delta U_{\max} - U_{\min} + \delta(k) \\ S_\Delta \Delta U_{\max} + U_{\max} - \delta(k) \\ -S_u \Delta U_{\max} - Y_{\min} + Y_0 \\ S_u \Delta U_{\max} - Y_{\max} - Y_0 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

ดังนั้นค่า $v(k)$ ที่เหมาะสมสามารถหาได้โดยขึ้นกับสมการที่ (3.55) และ (3.65) ในการหาค่า $v(k)$ ในขั้นแรกต้องเปลี่ยนขอบเขตจำกัดแบบ (inequality constraints) ไปเป็น (equality constraints) โดยผ่านตัวแปรที่เรียกว่า (Slack variable, $\xi(k)$) ซึ่งสมาชิกของ $\xi(k)$ ต้องไม่มีค่าเป็นลบดังนั้นจะได้สมการขอบเขตจำกัดเป็น

$$A v(k) + \xi(k) - b(k) = 0 \tag{3.68}$$

จากนั้นออฟเจ็กทีฟฟังก์ชั่นจะถูกเปลี่ยนไปอยู่ในรูปแบบของแลงแกรเกียน สมการที่ (3.69) (Lagrangian form) (e.g., Boot, 1964) กำหนดให้ $\lambda_v(k)$ และ $\lambda_\xi(k)$ เป็นเวกเตอร์ของ Lagrangian multipliers ซึ่งต้องไม่มีค่าเป็นลบและมีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ของ $v(k)$ และ $\xi(k)$ ตามลำดับ ดังนั้นสามารถแสดงได้ว่า ค่า $v(k)$ ที่เหมาะสมเป็นคำตอบของสมการ

$$\begin{bmatrix} -B & 0 & I & -A^T \\ A & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ \xi(k) \\ \lambda_v(k) \\ \lambda_\xi(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a(k) \\ b(k) \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

วิธีการหาคำตอบซึ่งนำเสนอโดย Ricker (1985) เป็นวิธีการค้นหาแบบอิเทอเรทีฟ (iterative search) ซึ่งคล้ายกับอัลกอริธึมของ Thiel and van de Panne (1960) และ Lemke (1962) ใช้คำตอบของสมการที่ (3.65) เมื่อ $\lambda_v(k)$ และ $\lambda_\xi(k)$ เท่ากับศูนย์

เมตริกซ์เริ่มต้นของควอดราติกโปรแกรมมิ่ง (initial QP tableau matrix) แสดงได้โดย

$$TAB = \begin{bmatrix} -B^{-1} & B^{-1}A \\ AB^{-1} & -CB^{-1}A^T \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

และ ค่าเริ่มต้นของตัวแปรเบสิก (basic variables) หรือเบสิสเวกเตอร์ $v(k)$ และ $\xi(k)$ หาได้โดย

$$\begin{bmatrix} v(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}a(k) \\ b(k) - AB^{-1}a(k) \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

เบสิสเวกเตอร์จะถูกบังคับให้เข้าสู่ค่าที่เหมาะสมที่แต่ละอิเทอเรชั่น คือเมื่อหาค่าที่เหมาะสมของ $v(k)$, ได้แล้ว เครื่องควบคุมจะใช้เพียงค่าแรก $\Delta u(k/k)$ ซึ่ง

$$\Delta u(k/k) = v(k/k) - \Delta u_{\max} \tag{3.72}$$

โดยจะส่งสัญญาณไปยังกระบวนการ จากนั้นจะทำการคำนวณซ้ำที่สเต็บเวลาถัดไป