รายการอ้างอิง

Åström, K. J.; and Wattenmark, B. *Computer-controlled system : Theory and design.* 2nd ed. New Jersey : Prentice Hall, 1990.

Anderson, A. E.; and Heinze, W. J. *C++ programming and fundamental concepts.* New Jersey : Prentice Hall, 1992.

Anderson, Brian D. O. *Optimal filtering.* New Jersey : Prentice-Hall, 1979.

Beck, J. V.; and Arnold, K. J. *Parameter estimation in engineering and science.* New York : John Wiley & Sons, 1977.

Bonvin, D.; de Valliere, P.; and Rippin, D. W. T. Application of estimation techniques to batch reactors — I. Modelling thermal effects. *Comput Chem. Eng.* 13 (1989) : 1-9.

Chen, C. Y.; and Sun, C. C. Estimation of unmeasured output variables in packed-bed reactors. *J. Chin. Inst. Chem. Eng.* 19 (1988) : 291-301.

Cott, B. J.; and Macchietto, S. Temperature control of exothermic batch reactors using generic model control. *Ind. Eng. Chem. Res.* 28 (1989) : 1177-1184.

David, M. H. A. *Linear estimation and stochastic control.* New York : John Wiley & Sons, 1977.

de Vallière, P.; and Bonvin, D. Application of estimation techniques to batch reactors — II. Experimental studies in state and parameter estimation. *Comput. Chem. Eng.* 13 (1989) : 11-20.

Eckel, B. *C++ inside & out.* California : McGraw-Hill, 1993.

Elbert, Theodore F. *Estimation and control of system.* New York : Van Nostrand Reinhold, 1984.

Jang, S. S.; Joseph, B.; and Mukai, H. Comparison of two approaches to on-line parameter and state estimation of nonlinear systems. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* 25 (1986) : 809-814.

Hanly, J. R.; Koffman, E. B.; and Horvath, J. C. *C program design for engineers.* California : Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

Hamilton, J. C.; Seborg, D. E.; and Fisher, D. G. An experimental evaluation of Kalman filtering. *AIChE J.* 19 (1973) : 901-909.

Harvey, A. C. *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter.* Great Britain : Cambridge University Press, 1990.

Haykin, S. *Adaptive filter theory.* 3rd ed. New Jersey : Printice-Hall, 1996.

Kantor, J. C. A finite dimensional observer for an exothermic stirred-tank reactor. *Chem. Eng. Sci.* 44 (1989) : 1503-1510.

Kershenbaum, L.; and Kittisupakorn, P. Use of predictive control techniques for the control of a reactor with exothermic reactions. *IChemE Res. Event* 2 (1994) : 979-981.

Kershenbaum, L. S.; and Kittisupakorn, P. The use of a partially simulated exothermic (PARSEX) reactor for experimental testing of control algorithms. *Chem. Eng. Res. Des.* 72 (1994) : 55-63.

Lee, P. L.; and Sullivan, G. R. Generic model control. *Comput. Chem. Eng.* 12 (1988) : 573-580.

Leigh, J. R. Achieving close control from poor or noisy signals. *Process Eng.* 64 (1983) : 24-25.

Leigh, J. R. *Applied control theory.* Revised 2nd ed. London, UK : Peregrinus, 1987.

Limqueco, L. C.; and Kantor, J. C. Nonlinear output feedback control of an exothermic reactor. *Comput. Chem. Eng.* 14 (1990) : 427-437.

Miano, J; Cabanski, T.; and Howe, H. *C++ builder how-to.* California : The Waite Group, 1997.

Myers, M. A.; and Luecke, R. H. Process control applications of an extended Kalman filter algorithm. *Comput. Chem. Eng.* 15 (1991) : 853-857.

Noton, M. *Modern control engineering.* New York : Pergamon Press, 1972.

Ramirez, W. F. *Process control and identification.* California : Academic Press, 1994.

Sage, A. P.; and Melsa, J. L. *Estimation theory with applications to communications and control.* New York : McGraw-Hill, 1971.

Saridis, G. N. *Stochastic processes, estimation, and control : The entropy approach.* New York : John Wiley & Sons, 1995.

Schildt, H. *C++ nuts & bolts : For experienced programmers.* California : McGraw-Hill, 1995.

Seborg, D. E.; Edgar, T. F.; and Mellichamp, D. A. *Process dynamics and control.* New York : John Wiley & Sons, 1989.

Siouris, G. M. *An engineering approach to optimal control and estimation theory.* New York : John Wiley & Sons, 1996.

Smith, C. A. and Corripio, A. B. *Principles and practice of automatic process control.* New York : John Wiley & Sons, 1985.

Thompson, D. *The art of control engineering.* 1st ed. New York : McGraw-Hill, 1997.

Wang, P. S. *C++ with object-oriented programming.* Massachusetts : PWS Publishing Company, 1994.

Wells, C. H. Application of modern estimation and identification techniques to chemical processes. *AIChE J.* 17 (1971) : 966-973.

Zhon, J.; and Luecke, R. H. Estimation of the covariances of the process noise and measurement noise for a linear discrete dynamic system. *Comput. Chem. Eng.* 19 (1995) : 187-195.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ความรู้พื้นฐานของทฤษฎีระบบ

ก.0 ทฤษฎีระบบ

ภาคผนวกนี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั่วไปของทฤษฎีระบบที่จำเป็นสำหรับเข้าใจสูตรของระบบสโตแคสติคพลวัต

ก.1 พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ก.1.1 เวกเตอร์

เวกเตอร์ คือแถวตั้ง (column) ของสมาชิก n ตัว เมื่อ n = 1 เป็น *สเกลาร์* เวกเตอร์แถวนอนคือเวกเตอร์แถวตั้งสลับเปลี่ยน (column vector transposed) ที่มีมิติ 1xn

$$x^T = [x_1 \ \dots \ x_n] \qquad (ก.1)$$

การดำเนินการบนเวกเตอร์ คือการบวกและการคูณโดยค่าคงที่

$$x + y = [x_i + y_i] \qquad kx = [kx_i] \qquad (ก.2)$$

ผลคูณภายใน (inner product)

$$x^T y = \sum_i (x_i y_i) \qquad (ก.3)$$

และผลคูณภายนอก (outer product) หรือไดแอด (dyad)

$$xy^T = \{x_i y_i\} \qquad (ก.4)$$

เมตริก (metric) ของเวกเตอร์คือความยาวของเวกเตอร์ ค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean norm) คือ

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \qquad (ก.5)$$

อนุพันธ์ของเวกเตอร์และอินทิกรัลของเวกเตอร์ คือ

$$dx(t)/dt = [dx_1/dt \ \dots \ dx_n/dt]^T$$

$$\int x(t)dt = \left[\int x_1 dt \ \dots \ \int x_n dt\right]^T \qquad (ก.6)$$

สมมติว่าเวกเตอร์ x เป็นฟังก์ชันของเวลา

ก.1.2 เมทริกซ์

เมทริกซ์ คือแถวลำดับ (array) mxn ที่มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ i = 1 … m, j = 1 … n

$$A = \{a_{ij}\} \qquad (ก.7)$$

การดำเนินการบนเมทริกซ์ คือ การบวก, การคูณและการคูณด้วยค่าคงที่

$$A + B = B + A = \{a_{ij} + b_{ij}\}$$
$$AB \neq BA = \left\{\sum_k a_{ik} b_{kj}\right\} \qquad (ก.8)$$
$$kA = Ak = \{ka_{ij}\}$$

การหาอนุพันธ์เมทริกซ์และการอินทิเกรต คือ

$$dA(t)/dt = \{da_{ij}/dt\} \qquad (ก.9)$$
$$\int A(t)dt = \left\{\int a(t)_{ij} dt\right\} \qquad (ก.10)$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ

$I = \{\delta_{ij}\}$ เมื่อ δ_{ij} คือ ครอเนคเคอร์เดลตา $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (ก.11)

ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์จตุรัส (nxn)1 เป็นสเกลาร์

$$\det[A] = |A| = \sum_{i=1}^{n} \cdots \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i\ldots j}}^{n} \left[a_{1i} \quad a_{2j} \quad \ldots \quad a_{nl}\right] \qquad (ก.12)$$

เมทริกซ์ที่มี det[A] = 0 เรียกว่าเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

ตัวสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ คือ

$$A^T = \{a_{ij}\} \qquad (ก.13)$$

ตัวผูกผัน (adjoint) ของเมทริกซ์ (ใช้สัญลักษณ์ Adj[A]) คือเมทริกซ์ที่จัดรูปโดยการแทนที่แต่ละสมาชิก a_{ij} โดยตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยที่จัดรูปโดยการลบแถวนอนที่ i และแถวตั้งที่ j ของ A และคูณด้วย $(-1)^{i-j}$ (โคแฟกเตอร์) และสลับเปลี่ยนผลลัพธ์

การทำเมทริกซ์ผกผัน (matrix inverse) ของเมทริกซ์จตุรัสถูกนิยามได้เป็น

$$A^{-1} = |A|^{-1} \mathrm{Adj}|A| \qquad AA^{-1} = I \qquad (ก.14)$$

ผลบวกเฉียง (trace) ของเมทริกซ์ คือผลรวมของพจน์แนวทแยงมุม

$$\mathrm{Trace}[A] = \mathrm{Tr}[A] = \sum_i a_{ii} \qquad (ก.15)$$

สังเกตว่า

$$\mathrm{Trace}\left[aa^T\right] = a^T a$$

ถ้าตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ไม่ได้มีอยู่ เพราะว่าไม่ได้เป็นจตุรัสหรือค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์น้อยกว่าค่ามากที่สุด แล้วอาจจะแทนด้วยตัวผกผันเทียม (pseudoinverse)

$$A^{\#} = \left(A^T A\right)^{-1} = A^T \qquad (ก.16)$$

สังเกตว่า $AA^{\#}A = A$ และ $\left(A^{\#}A\right)^T = A^{\#}A$

สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ คือ

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \qquad (ก.17)$$

ผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะให้ค่าเจาะจง (eigenvalue) $\lambda = \lambda_1 \ldots \lambda_n$

ค่าลำดับชั้นของเมทิกซ์ rank[A] คือขนาดของตัวกำหนดไม่เป็นศูนย์สูงสุดของมันของ A

การแปลงแบบคล้าย (similarity transformation) T บน A โดยที่หา T^{-1} ได้ (ไม่เอกฐาน) ให้เมทริกซ์ B มีค่าเจาะจงเหมือนกัน

$$TAT^{-1} = B \qquad (ก.18)$$

เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) ของเมทริกซ์ A nxn (e_i) เกี่ยวข้องกับค่าเจาะจง มีสมการคือ

$$\lambda_i e_i = Ae_i \qquad (ก.19)$$

เมทริกซ์ E = {e_i} ประกอบด้วยเวกเตอร์เจาะจงของ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานและมีเงื่อนไขคือ

$$AE = E\Lambda \qquad \text{เมื่อ } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} \qquad (ก.20)$$

ทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน (Cayley-Hamilton Theorem) กล่าวว่าการแทนที่ λ ด้วย A ในสมการลักษณะเฉพาะ (ก.17) ให้

$$f(A) = 0 \qquad (ก.21)$$

สิ่งนี้นำไปสู่คำจำกัดความของเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะ

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots \qquad (ก.22)$$

พหุนามเอกพันธุ์กำลังสอง (quadratic form) ถูกนิยามเป็น

$$x^T A x = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j \qquad (ก.23)$$

ค่าประจำของเมทริกซ์ถูกนิยามเป็น

$$\|A\| = \max_x \|Ax\|/\|x\| = \sqrt{\lambda_1} \qquad (ก.24)$$

เมื่อ λ_1 คือค่าเจาะจงมากที่สุดของ A

เกรเดียนต์ (Gradient) ของ z(x)

สเกลาร์ x $\quad \partial z/\partial x = a$ (สเกลาร์) $\quad \partial^2 z/\partial x^2 = A$ เมทริกซ์เฮสเซียน (Hessian matrix)

เวกเตอร์ x $\quad \partial z/\partial x = A$ (เมทริกซ์) $\quad$ ยาโคเบียน (Jacobian);

เมทริกซ์ X $\quad \partial z/\partial X = B$ (เมทริกซ์)

ก.1.3 ปริภูมิเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์ คือเซตที่สมาชิกเป็นไปตามกฎของการบวกและการคูณด้วยค่าคงที่ ปริภูมิเวกเตอร์เมตริก (metric vector space) เป็นเรื่องหนึ่งที่มีเมตริกเกี่ยวข้อง ปริภูมิเวกเตอร์เมตริกปกติส่วนใหญ่ คือยุคลิด (Euclidean) ซึ่งเกี่ยวข้องกับค่าประจำแบบยุคลิด (ก.5)

ก.1.4 ทฤษฎีเซต

เซต ประกอบด้วยสมาชิกที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน การดำเนินการต่อไปนี้ : การผนวก (union ใช้สัญลักษณ์ $\cup$), การตัดกัน (intersection ใช้สัญลักษณ์ $\cap$), ส่วนเติมเต็ม (complement ใช้สัญลักษณ์ $^{-}$) และผลรวมอนันต์ (infinite summation ใช้สัญลักษณ์ $\cup_i^\infty$), เซตว่าง (null set ใช้สัญลักษณ์ $\varnothing$), ปริภูมิทั้งหมด (whole space) ถูกนิยามเป็น

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{A}, \quad \bigcup_i^\infty A, \quad \varnothing, \quad S \qquad (\text{ก.}25)$$

ทฤษฎีบท ก.1 เดอมอร์แกน (DeMorgan)

$$\overline{(A+B)} = \overline{A}\overline{B} \quad \text{และ} \quad \overline{(AB)} = \overline{A} + \overline{B} \qquad (\text{ก.}26)$$

เมทริกซ์ $\mu(A)$ อาจจะเกี่ยวพันกับปริภูมิเวกเตอร์ ทฤษฎีความน่าจะเป็นเป็นตัวอย่างตามแบบของปริภูมิ $\{S, F, P\}$

ก.2 ระบบเชิงเส้น

ก.2.1 คำจำกัดความ

ปริภูมิสเตตคือปริภูมิแบบยุคลิดที่มีสมาชิกสเตตของระบบ ถ้า $x(\cdot)$ คือสเตต, $u(\cdot)$ คืออินพุตควบคุม และ $w(\cdot)$ และ $v(\cdot)$ คือสัญญาณรบกวนกระบวนการและการวัด ตามลำดับ ระบบพลวัตแบ่งออกได้เป็นดังนี้

(ก) เวลาต่อเนื่อง $x(t) \in X$

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x,u,t,\xi), \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= h(x,u,t,\eta) \end{aligned} \qquad (\text{ก.}27)$$

หรือเวลาไม่ต่อเนื่อง $t = k\Delta t,\ x(k) = x(t) \in X_k,\ k = 1, 2, \ldots$

$$x(k+1) = f(x(k),u(k),k,\xi(k)), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(k) = h(x(k),u(k),k,\eta(k)) \qquad (\text{ก.}27\text{ก})$$

(ข) แบบเชิงกำหนด (deterministic) ถ้า x_0, ξ, η คือปริมาณเชิงกำหนดในช่วงเวลาทั้งหมด t หรือ k หรือแบบสโตแคสติค ถ้า x_0, ξ, η คือปริมาณสโตแคสติคในช่วงเวลาทั้งหมด t หรือ k

จุดสมดุล (equilibrium point) ของระบบพลวัตถูกนิยามโดย $dx/dt = 0$ ตัวอย่างเช่น $f(x,u,\xi) = 0$

ระบบเชิงเส้นถูกนิยามเมื่อมีสัมประสิทธิ์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาหรือไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเชิงเส้น ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Gamma(t)\xi(t), \quad x(0) = x \\ y(t) &= C(t)x(t) + \eta(t) \end{aligned} \qquad (ก.28)$$

โดยกำหนดให้ $p(x_0), p(\xi(t)), p(\eta(t))$ อยู่ในช่วงเวลาทั้งหมด $t \in [0,\infty]$

ระบบไม่เชิงเส้นอาจจะถูกทำให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดเฉพาะแห่ง (local point) รูปแบบบัญญัติ (canonic form) อาจจะถูกจัดให้เป็นระบบเชิงเส้นเพื่อใช้พารามิเตอร์จำนวนน้อยที่สุดสำหรับระบบอินพุตเดี่ยว-เอาต์พุตเดี่ยว (single-input-single-output system) แสดงสมการที่มีรูปแบบบัญญัติ 2 รูปแบบดังนี้ :

รูปแบบบัญญัติสเตต (State Canonic Form)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ & f^T \end{bmatrix}, \quad b^T = [0 \cdots 0, \; 1], \quad g^T = [0 \cdots 0, \; 1], \quad h^T = [h_1 \; \cdots \; h_n] \qquad (ก.29)$$

รูปแบบบัญญัติเอาต์พุต (Output Canonic Form)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ & f^T \end{bmatrix}, \quad b^T = [b_1 \; \cdots \; b_n], \quad g^T = [g_1 \; \cdots \; g_n], \quad h^T = [0 \cdots 0, \; 1] \qquad (ก.30)$$

การแปลงแบบคล้าย T สมการ (ก.18) อาจจะแปลงเซตของสมการสเตตเชิงเส้นเป็นสมการอื่นได้ ตัวอย่างเช่น รูปแบบบัญญัติ :

$$z(t) = Tx(t) \qquad (ก.31)$$

และ

$$\begin{aligned} dz/dt &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) + T\Gamma\xi(t) = Az(t) + Ku(t) + L\xi(t), \\ y(t) &= CT^{-1}z(t) + \eta(t) = Mz(t) + \eta(t), \qquad z(0) = Tx(0) \end{aligned} \qquad (ก.32)$$

เมื่อ $TFT^{-1} = A, TB = K, TG = L$ และ $HT^{-1} = M$

ในกรณี $T = E = \{ e_i \}$ เมทริกซ์เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector matrix, $A = \Lambda = diag\{ \lambda_i \}$), เมทริกซ์เวกเตอร์เจาะจงเฉียง (diagonal eigenvector matrix) และสมการสเตตถูกแก้การเชื่อมต่อ

(decoupled) ปริภูมิ $X \times T$ เรียกว่าปริภูมิผลเฉลย และ $\{x(t),t\} \in X \times T$ ผลแบบเดียวกันประยุกต์ไปยังระบบที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง

ก.2.2 ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้น

แนวทางนี้ประยุกต์ไปยังระบบเชิงเส้นที่มีเวลาต่อเนื่องของสมการอนุพันธ์

เมทริกซ์ถ่ายทอดสเตต, ผลเฉลยเอกพันธุ์ นิยามเมทริกซ์ถ่ายทอดคือผลเฉลยเอกพันธุ์ของระบบเชิงเส้นสมการ (ก.28)

$$dx/dt = A(t)x(t), \qquad x(t) = \Phi(t,0)F, \qquad F = \text{ค่าคงที่}$$

แล้ว

$$dx/dt = d\Phi/dt\,F = A\Phi(t,0)F, \qquad \forall F, \qquad \Rightarrow\ d\Phi/dt = A\Phi(t,0) \tag{ก.33}$$

ถ้า $F = x_0$ แล้ว $\Phi(0,0) = I$ และ

$$x(t) = \Phi(t,0)x_0 \tag{ก.34}$$

คุณสมบัติของเมทริกซ์ถ่ายทอดสเตต

$$\Phi(t_2,t_1) = \Phi(t_2,t_0)\Phi(t_0,t_1) \tag{ก.35}$$

$$\Phi(t,t) = \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,t) = I \qquad \Rightarrow\ \Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t) \tag{ก.36}$$

ตัวผกผันของเมทริกซ์ถ่ายทอดสเตตมีอยู่เสมอเพราะว่า

$$\det\left[\Phi(t,t_0)\right] \neq 0, \qquad \forall t \in [0,\infty] \tag{ก.37}$$

การขยาย (ก.35) เป็นอนุกรมเทย์เลอร์ และจาก (ก.22)

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + dx(t_0)/dt(t-t_0) + \frac{1}{2}d^2x(t_0)/dx^2(t-t_0)^2 + \cdots \\ &= \left[I - A(t-t_0) + \frac{1}{2}A^2(t-t_0)^2 + \cdots\right]x(t_0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) \end{aligned} \tag{ก.38}$$

เมทริกซ์ถ่ายทอดสเตต, ผลเฉลยเฉพาะราย (Particular solution) วิธีที่นำมาใช้เพื่อให้ได้ผลเฉลยเฉพาะรายของสมการอนุพันธ์เรียกว่า การแปรผัน (variation) ของพารามิเตอร์ ผลเฉลยสมบูรณ์จะได้จากอินทิกรัลทับซ้อน (superposition integral) ซึ่งเหมาะสมเพราะว่าระบบเป็นเชิงเส้น

สมการอนุพันธ์สมบูรณ์ คือ

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Gamma(t)\xi(t), \qquad x(0) = x \\ y(t) &= C(t)x(t) + \eta(t) \end{aligned} \tag{ก.28}$$

สมมติว่าในผลเฉลยเอกพันธุ์ ค่าคงที่ F ถูกแทนที่โดย F(t) ที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

$$x(t) = \Phi(t,t_0)F(t)$$

$$dx/dt = d\Phi/dt\,F(t) + \Phi(t,t_0)\,dF/dt$$
$$= A(t)\Phi(t,t_0)F(t) + \Phi(t,t_0)\,dF/dt \qquad (ก.39)$$

พิจารณาสมการเดิม

$$dx/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Gamma(t)\xi(t)$$
$$= A(t)\Phi(t,t_0)F(t) + B(t)u(t) + \Gamma(t)\xi(t)$$
$$= A(t)\Phi(t,t_0)F(t) + \Phi(t,t_0)\,dF/dt$$

และกำจัดพจน์ปกติจะได้

$$\Phi(t,t_0)\,dF/dt = B(t)u(t) + \Gamma(t)\xi(t)$$

หรือ

$$dF/dt = \Phi(t,t_0)^{-1}\left[B(t)u(t) + \Gamma(t)\xi(t)\right] \qquad (ก.40)$$

อินทิเกรตสมการ (ก.40) และพิจารณาว่า $\Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t)$ และ $F(t_0) = x_0$

$$F(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)\left[B(\tau)u(\tau) + \Gamma(\tau)\xi(\tau)\right]d\tau$$

แทนกลับในสมการ (ก.39)

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)\left[B(\tau)u(\tau) + \Gamma(\tau)\xi(\tau)\right]d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\left[B(\tau)u(\tau) + \Gamma(\tau)\xi(\tau)\right]d\tau \qquad (ก.41)$$

และ

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)\left[B(\tau)u(\tau) + \Gamma(\tau)\xi(\tau)\right]d\tau + \eta(t) \qquad (ก.42)$$

ก.2.3 ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้น

มีแนวทางอยู่ 2 ทางที่จะให้กำเนิดระบบที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง ทางหนึ่ง คือโดยการประมาณค่าอนุพันธ์เวลา (time derivatives) ในสมการอนุพันธ์โดยการแทนที่ dt ด้วยค่าที่น้อยมากซึ่งมีช่วงระยะเวลา t จำกัด อีกทางหนึ่งโดยการพิจารณาระบบข้อมูลที่ถูกสุ่มตัวอย่างซึ่งให้ค่าของระบบที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่น เครื่องคอมพิวเตอร์ดิจิตอล แนวทางที่กล่าวทีหลังแทนรูปแบบที่ถูกต้องของระบบที่มีเวลาต่อเนื่อง ถ้าเป็นไปตามทฤษฎีบทไนควิส์ต (Nyquist theorem)

การประมาณระบบที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องของสมการอนุพันธ์ พิจารณาระบบที่มีเวลาต่อเนื่องของสมการ (ก.28) และเขียนคำจำกัดความของเวกเตอร์อนุพันธ์

$$ds(t)/dt = \lim_{\Delta t \to 0}\left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]/dt$$
$$= A'(t)x(t) + B'(t)u(t) + \Gamma'(t)\xi(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \eta(t)$$

การขจัดการดำเนินการลิมิต (limit operation) และแทนที่ $t = k\Delta t$ ด้วย k สมการ (ก.28) ถูกประมาณโดย

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left[I + A'(k)\Delta t\right]x(k) + B'(k)\Delta t u(k) + \Gamma'(k)\Delta t \xi(k) \\ &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + \Gamma(k)\xi(k), \qquad x(0) = x \end{aligned} \qquad (ก.43)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + \eta(k)$$

และการกระจายความน่าจะเป็น (probability distributions) $P(x_0)$, $P(\xi(k))$ และ $P(\eta(k))$ ถูกนิยามเป็นไปตามนั้น

รูปแบบข้อมูลตัวอย่าง (Sample data representation) ของระบบที่มีเวลาต่อเนื่อง รูปแบบเหล่านี้เริ่มต้นด้วยผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ (ก.41) บนช่วงระยะเวลา $[t, t+\Delta t]$

$$x(t+\Delta t) = \Phi(t+\Delta t, t)x(t) + \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t+\Delta t, \tau)\left[B(\tau)u(\tau) + \Gamma(\tau)\xi(\tau)\right]d\tau$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \eta(t) \qquad (ก.44)$$

การพิจารณาว่า $u(\tau) = u(k)$ และ $w(t) = w(k)$ เป็นค่าคงที่บนช่วง $[t, t+\Delta t]$ และสามารถดึงออกนอกอินทิกรัลได้ การแทนที่ $t = k\Delta t$ ด้วย k จะได้

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + u(k)\int_t^{t+\Delta t} \Phi(t+\Delta t, \tau)B'(\tau)d\tau \\ &\quad + \xi(\tau)\int_t^{t+\Delta t} \Phi(t+\Delta t, \tau)\Gamma'(\tau)d\tau \\ &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + \Gamma(k)\xi(k) \end{aligned}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + \eta(k) \qquad (ก.45)$$

มันเห็นได้ชัดว่า 2 นิพจน์ของระบบที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง สมการ (ก.43) และ (ก.45) เหมือนกันทุกประการ ด้วยเหตุนี้ มีผลเฉลยเดียวสำหรับทั้งสองสมการ ในกรณีของสัมประสิทธิ์ A, B, Γ และ C คงที่ ผลเฉลยคือ

$$y(k) = CA^{k+1}x_0 + \sum_{i=1}^{k+1} CA^{i-1}\left[Bu(k-i) + \Gamma\xi(k-i)\right] + \eta(k) \qquad (ก.46)$$

ภาคผนวก ข

สัญญาณสุ่ม (Random Signal)

ข.1 คำจำกัดความของปริมาณสัญญาณสุ่ม

ข.1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

สำหรับตัวอย่างสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา x(t) n ตัวอย่าง เกิดขึ้นที่เวลา $t_1, t_2, \ldots, t_n$ และมีค่าที่สอดคล้องกัน $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างง่ายมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าทั้งหมดหารด้วยจำนวนของตัวอย่าง

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

ถ้าต้องการเดาค่าของ x มีค่าเป็นเท่าไร ณ เวลาที่กำหนดไว้ (เนื่องจากขาดรายละเอียดเกี่ยวกับสัญญาณ x(t)) แล้วบางทีค่าเฉลี่ยนี้เป็นการเดาที่ดีที่สุดที่สามารถทำได้ ดังนั้นมักเรียกว่า "ค่าคาดหมาย (expected value หรือ expectation)" ของ x (แทนด้วย E[x]) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างทั้งหมด

$$E[x] = \bar{x}$$

ข.1.2 ความแปรปรวน

ความแปรปรวนเป็นอีกปริมาณหนึ่งที่ต้องการในการวิเคราะห์ต่อไป ซึ่งเป็นการวัดความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นเมื่อมีการเดาค่าของสัญญาณจากค่าเฉลี่ยของสัญญาณ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับการกระจายของตัวอย่างสัญญาณ x(t) (นั่นคือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$) รอบค่าเฉลี่ยของตัวอย่างว่าเป็นเช่นใด ความแปรปรวนมีค่าน้อยแสดงว่า ตัวอย่างส่วนใหญ่อยู่ใกล้กับค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่าเฉลี่ยของสัญญาณในช่วงเวลาทั้งหมดเป็นค่าที่น่าเป็นจริงของสัญญาณ ณ เวลานี้ อีกด้านหนึ่ง ความแปรปรวนมีค่าสูงหมายความว่า ตัวอย่างสัญญาณแต่ละค่ากระจัดกระจายออกไปเป็นวงกว้างในแต่ละด้านของค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่าเฉลี่ยไม่ได้เป็นค่าที่ดีที่นำไปสู่ค่าสัญญาณที่น่าเป็นจริงที่เวลาใด ๆ และดังนั้นค่ามีความไม่แน่นอน ซึ่งจะขอกล่าวรายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องนี้ในหัวข้อ ข.1.3

นิยามของความแปรปรวน คือกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร σ_x ซึ่งเป็นรากของกำลังสองเฉลี่ย (root-mean-square) ของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็นดังนี้:-

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}$$

ดังนั้น

$$\text{ความแปรปรวน} = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}\right] - \bar{x}^2$$

หรือในพจน์ของค่าคาดหมาย

$$\sigma_x^2 = E\left[(x - \bar{x})^2\right] = E\left[x^2\right] - \bar{x}^2 = E\left[x^2\right] - \left\{E[\bar{x}]\right\}^2$$

ความแปรปรวนของชุดของค่าการวัด (หรือชุดของตัวอย่างสัญญาณ) คือค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของชุดของแต่ละตัวอย่างทั้งหมด ถ้าความแปรปรวนเป็นศูนย์แล้วสัญญาณต้องเท่ากับค่าเฉลี่ยของมันทุก ๆ ตัวอย่าง

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 ตัวกรองคาลมานเป็นตัวประมาณค่าที่มีความแปรปรวนน้อยสุด (minimum-variance estimator) ในที่นี้ ความแปรปรวนคือความผิดพลาดระหว่างค่าที่ประมาณกับค่าจริงของเวกเตอร์สเตตของระบบ ดังนั้นตัวกรองคาลมานทำให้ความไม่แน่นอนในค่าประมาณสเตตน้อยลงเมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณค่าแบบอื่น ๆ ในลักษณะเช่นนี้ บางครั้งอาจกล่าวได้ว่าเป็นตัวประมาณค่าสเตตที่ได้ผลดีที่สุด (optimal state estimator)

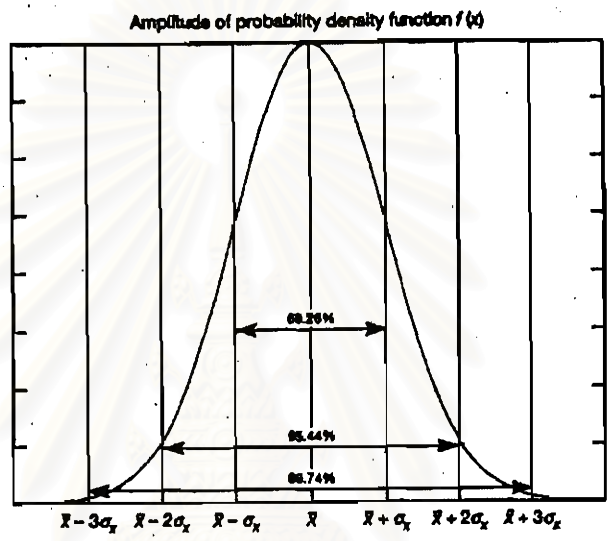
ข.1.3 การแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution)

เพื่อที่จะกล่าวถึงบางอย่างเกี่ยวกับความสุ่ม (randomness) ของสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สามารถพิจารณาได้จากการเปลี่ยนแปลงช่วงกว้างของคลื่นกับเวลาหรือสเปคตรัมความถี่ (frequency spectrum) ที่สร้างขึ้นจากสัญญาณหรือทั้งสองอย่าง ตัวอย่างเช่น อาจจะวัดช่วงกว้างของคลื่นตัวอย่างของสัญญาณจำนวนมาก และจากการวัดค่าเหล่านี้ทั้งหมด ความน่าจะเป็นของสัญญาณที่ระดับหนึ่ง ณ เวลาที่กำหนดไว้สามารถคำนวณหาค่าได้ ถ้าเขียนกราฟความน่าจะเป็นเหล่านี้กับระดับสัญญาณจะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ ข.1 (อาจมีรูปร่างแบบอื่นได้มากมายเป็นอนันต์) พิจารณารูปร่างทั้งหมดของรูปที่ ข.1 เท่านั้น ความน่าจะเป็นสูงที่สุด หมายถึงตัวอย่างสัญญาณแต่ละค่าจะอยู่ใกล้ค่าเฉลี่ยของมัน $\bar{x}$ รูประฆังของเส้นโค้งนี้ หมายความว่าความน่าจะเป็นที่แต่ละตัวอย่างสัญญาณจะมีช่วงกว้างของคลื่นสูงกว่า (หรือน้อยกว่า) ค่าเฉลี่ยมาก ๆ มีค่าน้อยมาก

เส้นโค้งเรียบดังแสดงในรูปที่ ข.1 สามารถแสดงได้ด้วยสมการ (ดังที่ทราบว่าเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function)) ตัวแปรที่อธิบายว่าเป็น "แบบเกาส์" ในการแจกแจงความน่าจะเป็นสามารถแสดงได้โดยสมการ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma_x^2)}$$

เส้นโค้งรูประฆังนี้เรียกว่า "การแจกแจงแบบปกติ" และชุดที่ใหญ่พอของตัวอย่างของปริมาณที่มีอยู่จริงมากมาย (จากสัญญาณสุ่มไปถึงเกณฑ์การตรวจสอบ) มีการแจกแจงในลักษณะเช่นนี้



รูปที่ ข.1 สัญญาณแจกแจงปกติ

สำหรับการแจกแจงแบบปกตินี้ ตัวอย่างสัญญาณสามารถถูกคาดหมายให้อยู่ภายใน ±1, 2 หรือ 3 เท่าของค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยได้ ซึ่งมีความน่าจะเป็นดังแสดงในรูปที่ ข.1 ถ้าความแปรปรวนมีค่าน้อย ยอดแหลมของกราฟในรูปที่ ข.1 จะแหลมเมื่อเทียบกับช่วงข้อมูลของแกน x แต่ถ้าความแปรปรวนมีค่าสูง ยอดแหลมของกราฟจะกว้างหรือค่อนข้างแบนเมื่อเทียบกับช่วงข้อมูลของแกน x

ข.2 การรวมกันของสัญญาณสุ่ม

สำหรับเหตุผลของความสะดวกทางคณิตศาสตร์เป็นเรื่องปกติที่จะใช้ความแปรปรวนของสัญญาณมากกว่าค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน สำหรับการวิเคราะห์ระบบประกอบด้วยสัญญาณสุ่มดังที่กล่าวไว้ข้างต้น ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทราบว่าเกิดอะไรขึ้นต่อสัญญาณในพจน์ของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน เมื่อนำมารวมกันในแบบต่าง ๆ กับสัญญาณอื่น

ข.2.1 การคูณด้วยสเกลาร์

ถ้าสัญญาณสุ่ม x(t) ที่มีค่าเฉลี่ย $\overline{x}$ และความแปรปรวน σ_x^2 คูณกับค่าคงที่ c และบวกพจน์ d แล้วจะได้ตัวแปร (สุ่ม) ใหม่ y(t) คือ

$$y(t) = cx(t) + d$$

ค่าเฉลี่ยของสัญญาณใหม่ y(t) เป็นดังนี้ :

$$E[y] = \overline{y} = c\overline{x} + d$$

และเหตุนี้ ความแปรปรวนของ y(t) เป็นดังนี้ :

$$E\left[(y-\overline{y})^2\right] = \sigma_y^2 = c^2\sigma_x^2$$

ข.2.2 การบวก

ถ้าบวกสัญญาณ 2 สัญญาณเข้าด้วยกัน ดังเช่น y(t) = w(t)+v(t) แล้ว

$$E[y] = E[w] + E[v] \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \overline{y} = \overline{w} + \overline{v}$$

และ $\quad E\left[(y-\overline{y})^2\right] = \sigma_y^2 = \sigma_w^2 + \sigma_v^2 + 2\sigma_{vw}$

เมื่อ $\quad \sigma_{vw} = E\left[(v-\overline{v})(w-\overline{w})\right]$ = ความแปรปรวน (ดูด้านล่าง)

ข.2.3 การคูณ

การคูณกันของสัญญาณสุ่ม 2 สัญญาณ สัญญาณหนึ่งที่อาจจะเป็นการเลื่อนเวลาเมื่อเทียบกับอีกสัญญาณหนึ่งออกไป τ วินาที สามารถนำไปสู่ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ไขว้ (cross-correlation), อัตสหสัมพันธ์ (auto-correlation) หรือความแปรปรวน (covariance) ได้ดังนี้ :

สำหรับสัญญาณสุ่ม v(t) และ w(t)

$$E\left[v(t)w(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T v(t)w(t+\tau)dt = R_{vw}(\tau)$$

สมการนี้คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ไขว้

ถ้า w(t) = v(t) ผลที่ได้ คือ

$$E\left[v(t)v(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T v(t)v(t+\tau)dt = R_{vv}(\tau)$$

นี่คือ ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์

ถ้า v(t) และ w(t) เป็นสัญญาณที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (หรือมีค่าเฉลี่ยลบกันหมด) และ τ เป็นศูนย์ (นั่นคือ ไม่มีการเลื่อนเวลา) แล้ว

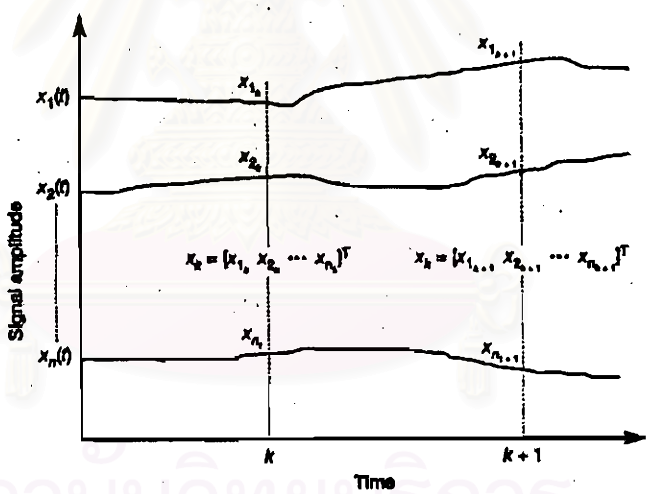
$$E\left[\{v(t)-\bar{v}\}\{w(t)-\bar{w}\}\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\{v(t)-\bar{v}\}\{w(t)-\bar{w}\}dt$$
$$= \mathrm{cov}(vw) = \sigma_{vw}$$

นี่คือ ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วม (covariance)

สรุปได้ว่า ถ้า v(t) และ w(t) ไม่เกี่ยวเนื่องกัน (นั่นคือ เป็นอิสระซึ่งกันและกัน) แล้ว cov(vw) = ศูนย์

ข.2.4 กรณีเวกเตอร์-เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

เวลานี้ จินตนาการสัญญาณสุ่ม x(t) มากกว่า 1 สัญญาณ เป็นชุด (หรือทั้งชุด) ของสัญญาณสุ่ม $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ n สัญญาณมีอยู่ การสร้างสัญญาณเวกเตอร์ x(t) ขึ้นดังแสดงในรูปที่ ข.2 ดังนั้นที่เวลาสุ่ม k มีชุดของค่า $x_k = [x_{1k}\ x_{2k}\ \ldots\ x_{nk}]^T$ ที่เวลาถัดไป k+1 ชุด $x_{k+1} = [x_{1k+1}\ x_{2k+1}\ \ldots\ x_{nk+1}]^T$ จะมีอยู่



รูปที่ ข.2 ชุด (ทั้งชุด) ของสัญญาณสุ่ม

เพื่อให้มีส่วนร่วมกับเวกเตอร์สัญญาณสุ่มคือ *เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม* ประกอบด้วยความแปรปรวนร่วมที่เป็นไปได้ทั้งหมดระหว่างแต่ละค่าของเวกเตอร์ เหตุนี้

$$\mathrm{cov}[x(t)] = R = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1^2} & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1x_3} & \cdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2^2} & \sigma_{x_2x_3} & \cdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \sigma_{x_3x_1} & \sigma_{x_3x_2} & \sigma_{x_3^2} & \cdots & \sigma_{x_3x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2} & \sigma_{x_nx_3} & \cdots & \sigma_{x_n^2} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เช่นนี้มีคุณสมบัติพิเศษ ซึ่งจะมีประโยชน์ต่อไป กล่าวคือ

- จากคำจำกัดความของความแปรปรวนร่วมในหัวข้อ ข.2.3 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ดังนั้นเมทริกซ์มี *สมมาตรเสมอ* ดังนั้น $R^T = R$
- ถ้าสมาชิก $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ของเวกเตอร์สัญญาณ $x(t)$ ไม่เกี่ยวเนื่องกัน (นั่นคือเป็นอิสระซึ่งกันและกัน) แล้วพจน์ $\sigma_{x_i x_j | i \neq j}$ ทั้งหมดจะเป็นศูนย์ แล้ว R จะอยู่ในแนวเส้นทแยงมุม
- $R = E\left[xx^T\right]$ (อย่าลืมว่า $R = E\left[x^2\right]$ สำหรับกรณีสเกลาร์ของสัญญาณที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์)

ข.2.5 การแปลงความแปรปรวนร่วม

ถ้า $x(t)$ ประกอบด้วยตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และ C เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ ซึ่งคูณกับมัน ดังเช่น $y(t) = Cx(t)$ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $y(t)$ คืออะไร

$$\mathrm{cov}\left[y(t)\right] = E\left[yy^T\right] = E\left[Cxx^TC^T\right] = CE\left[xx^T\right]C^T$$

ดังนั้น $\mathrm{cov}[Cx(t)] = CRC^T$ เมื่อ $R = \mathrm{cov}[x(t)]$

ภาคผนวก ค
ตัวควบคุมเจเนริกโมเดล

ค.1 โครงสร้างการควบคุม

พิจารณากระบวนการซึ่งอธิบายโดยสมการต่อไปนี้ :

$$\dot{x} = f(x,u,d,t) \qquad (ค.1)$$

$$y = g(x) \qquad (ค.2)$$

เมื่อ x คือเวกเตอร์สเตตมีมิติ n, u คือเวกเตอร์ของตัวแปรปรับมีมิติ m, d คือเวกเตอร์ของตัวแปรรบกวนมีมิติ l และ y คือเวกเตอร์เอาต์พุตมีมิติ p โดยทั่วไป f และ g เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น จากสมการ (ค.1) และ (ค.2) จะได้ว่า

$$\dot{y} = G_x f(x,u,d,t)$$

เมื่อ

$$G_x = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (ค.3)$$

ในการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดแบบดั้งเดิม โดยปกติแนววิถีของ y ถูกเปรียบเทียบกับแนววิถีปกติ [(y)*(t)] เช่นเดียวกับสมรรถนะระบบ สำหรับทางเลือกอื่น พิจารณาสมรรถนะของระบบเป็นดังนี้ :

$$(\dot{y})^*(t) = r^*(y) \qquad (ค.4)$$

เมื่อ r* แทนฟังก์ชันไม่เจาะจงซึ่งมีค่าเฉพาะ การหาค่าสมรรถนะโดยใช้อนุพันธ์เวลาของตัวแปรเอาต์พุตได้ถูกพิจารณาใน robotic manipulator (Guo และ Sardis, 1985)

ให้ตรวจสอบการเลือกที่เหมาะสมของฟังก์ชันเจาะจง r* เมื่อกระบวนการมีค่าห่างออกไปจากสถานะคงตัวที่ต้องการ y* เราต้องการอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ($\dot{y}$) โดยที่กระบวนการกำลังกลับเข้าสู่สถานะคงตัวดังนี้ :

$$\dot{y} = K_1(t)(y^* - y) \qquad (ค.5)$$

เมื่อ $K_1(t)$ คือเมทริกซ์เฉียง

นอกจากนี้ เราต้องการกระบวนการที่ไม่มีออฟเซต คือ

$$\dot{y} = K_2(t)\int(y^* - y)dt \qquad (ค.6)$$

เมื่อ $K_2(t)$ คือเมทริกซ์เฉียง ต่อจากนั้น เราจะพิจารณาว่า $K_1(t)$ และ $K_2(t)$ เป็นค่าคงที่เมื่อเทียบกับเวลา

สมรรถนะการควบคุมที่ดีจะได้มาจากผลรวมของเป้าหมายเหล่านี้ คือ

$$(\dot{y})^* = K_1(t)(y^*-y)+K_2(t)\int(y^*-y)dt \qquad (ค.7)$$

การเลือก K_1 และ K_2 ที่เหมาะสมสำหรับผลตอบสนองของ $y(t)$ สามารถทำได้ ดังที่จะกล่าวถึงต่อไปในหัวข้อการปรับค่าคงที่

เราต้องการที่จะเลือก $u(t)$ อย่างเช่น ระบบที่เป็นไปตามสมการ $(\dot{y})^*t$ การแปลงสมการนี้เข้าสู่ปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด

กำหนดให้ $\dot{x} = f(x,u,d,t)$

$y = g(x)$

เลือก $u(t)$

อย่างเช่น $|u| \le \alpha$

เพื่อที่ลด

$$\int_0^{t_f}\left[h(x,u,d,t)^T Wh(x,u,d,t)\right]dt \qquad (ค.8)$$

เมื่อ

$$h[x,u,d,t] = G_x f(x,u,d,t)-K_1(y^*-y)-K_2\int(y^*-y)dt \qquad (ค.9)$$

และ W คือเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเป็นบวกแน่นอนที่เหมาะสม ถ้าการควบคุมสามารถทำได้เมื่อเทียบกับข้อจำกัด มิติ m และ p เหมือนกันและสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของ u ปรากฏในแต่ละสมการ m สมการ ซึ่งแสดงได้โดยสมการ (ค.9) แล้วผลเฉลยของปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดได้มาจากผลเฉลยของสมการ m สมการในตัวไม่ทราบค่า m ตัว

$$G_x f(x,u,d,t)-K_1(y^*-y)-K_2\int(y^*-y)dt = 0 \qquad (ค.10)$$

โดยทั่วไป แบบจำลองกระบวนการที่ถูกต้องแทบจะไม่ทราบและใช้แบบจำลองโดยประมาณแทน อย่างเช่น สมการ (ค.10) ได้เป็น

$$\hat{G}_x\hat{f}(x,u,d,t)-K_1(y^*-y)-K_2\int(y^*-y)dt = 0 \qquad (ค.11)$$

เมื่อ $\hat{f}$ และ $\hat{G} = \partial\hat{g}/\partial x$ แทนการประมาณค่าของแบบจำลองจริง

การทำการควบคุมตามสมการ (ค.11) ต้องให้ผลในการควบคุมที่ดี ถ้าแบบจำลองกระบวนการ $\hat{f}$ และ $\hat{G}_x$ ถูกต้องและ $(\dot{y})^*(t)$ ถูกต้องถึงกับทำให้เราปฏิบัติการภายในข้อจำกัดการปฏิบัติการควบคุมได้ การลดสมรรถนะการควบคุมเนื่องมาจากอันตรกิริยาของความไม่เป็นเชิงเส้นสามารถถูกอธิบายผ่านการเลือก $\hat{f}$ และ $\hat{G}_x$ เพื่อใช้ภายในกฎการควบคุมของสมการ (ค.11)

สำหรับระบบที่ไม่เชิงเส้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ดังนี้ :

$$f(x,u,d,t) = f(x)+h(x)u \quad (ค.12)$$

จาก (ค.11) จะได้

$$\hat{G}_x\left[\hat{f}(x)+\hat{h}(x)u\right]-K_1(y^*-y)-K_2\int(y^*-y)dt = 0 \quad (ค.13)$$

ส่วนใหญ่ $\hat{G}_x$ มีค่าเป็นหนึ่ง

ในที่สุด จะได้สมการสำหรับการควบคุมแบบเจเนริกโมเดล เป็นดังนี้ :

$$K_1(y^*-y)+K_2\int(y^*-y)dt = \left[\hat{f}(x)+\hat{h}(x)u\right] \quad (ค.14)$$

กฎการควบคุมมีคุณสมบัติเฉพาะที่ต้องการ 4 ข้อ คือ

1. กฎการควบคุมดังที่แสดงโดยสมการ (ค.11) มีแบบจำลองกระบวนการโดยประมาณอยู่ภายในโครงสร้างของมัน

2. ความไม่ถูกต้องที่ได้จากการประมาณค่านี้จะมีผลทำให้ $\dot{y}$ ไม่ติดตาม $(\dot{y})^*(t)$ แต่จะถูกชดเชยโดยพจน์อินทิกรัลในขั้นตอนวิธีการควบคุม พจน์อินทิกรัลนี้ในกฎการควบคุมรับรองว่าตัวควบคุมทนทานถึงแม้ว่าการสร้างแบบจำลองผิดพลาด

3. เป็นกฎขั้นเดียว ซึ่งมีคุณสมบัติเฉพาะแบบ time horizon ดังที่นิยามโดยสมการ (ค.11) ผลเฉลยจากขั้นการควบคุมสุดท้ายคือการประมาณค่าที่ดีสำหรับผลเฉลยของขั้นการควบคุมปัจจุบัน

4. ไม่มีความจำเป็นที่จะกระทำการอินทิเกรตแบบออนไลน์ของแบบจำลองกระบวนการที่ให้ ซึ่งสเตตที่ทั้งหมดสังเกตได้

ค.2 การปรับค่าคงที่

พิจารณากระบวนการซึ่งอธิบายโดยสมการต่อไปนี้ :

$$u = \frac{K_1(y^*-y)+K_2\int_0^{t_f}(y^*-y)dt-\hat{f}(x)}{\hat{h}(x)} \quad (ค.15)$$

การทำ implement ต้องอยู่ในรูปไม่ต่อเนื่อง

$$u = \frac{K_1(y^*-y(k))+K_2\sum_{k=0}^{k}(y^*-y(k))\Delta t-\hat{f}(x)}{\hat{h}(x)} \quad (ค.16)$$

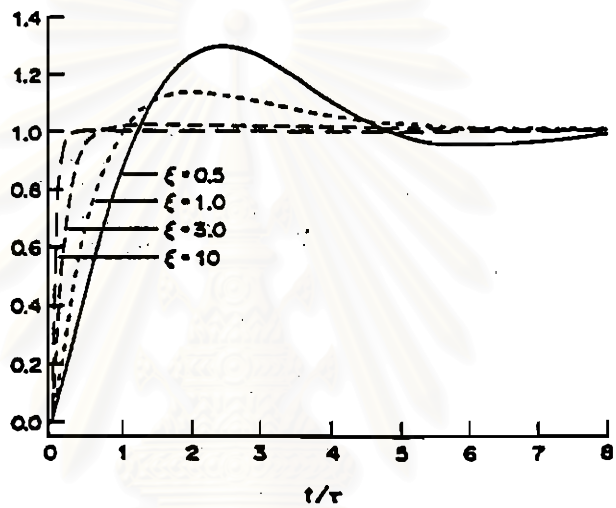
โดยที่ $K_1 = 2\xi/\tau$

$K_2 = 1/\tau^2$

ซึ่งค่า ξ และ τ สามารถหาได้จากแผนภาพข้างล่างนี้

หลักการปรับตัวแปรปรับเพื่อให้ได้ผลการตอบสนองที่ต้องการ

1. เลือก ξ จากรูปเพื่อให้ได้ผลการตอบสนองที่ต้องการ
2. เลือก τ จากรูปเพื่อให้ได้จังหวะเวลาที่เหมาะสมที่สอดคล้องกับความเร็วของผลตอบสนองของกระบวนการ
3. คำนวณหาค่า K_1 และ K_2



รูปที่ ค.1 ข้อกำหนดโพรไฟล์ของตัวควบคุมเจเนริกโมเดลโดยทั่วไป

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าต้องการให้ผลตอบสนองเข้าสู่จุดปรับตั้งที่เวลา 20 นาที โดยเลือก $\xi = 10$ แล้ว $\tau = ?$

$t/\tau = 0.25 \rightarrow 20/\tau = 0.25 \rightarrow \therefore \tau = 80$ นาที

ดังนั้น $K_1 = 2\xi/\tau = 2\times10/80 = 1/4$

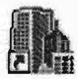
$K_2 = 1/\tau^2 = 1/80^2$

ภาคผนวก ง

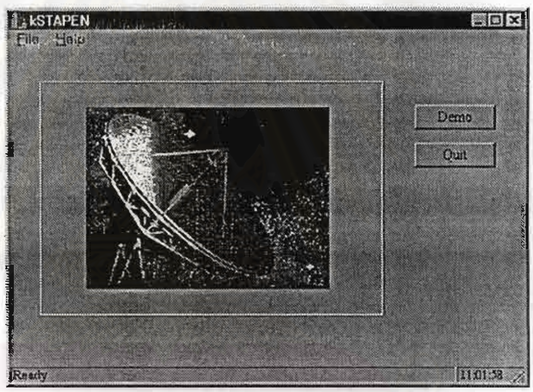
การใช้โปรแกรม kSTAPEN

การเปิดโปรแกรม

1. หลังจากติดตั้งโปรแกรม kSTAPEN ให้คลิกเมาส์ที่ icon ของโปรแกรมสองครั้ง (double click) เป็นการเรียกใช้โปรแกรม kSTAPEN

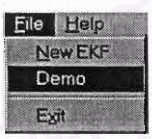


ส่วนองค์ประกอบหลักอื่น ๆ ของ kSTAPEN ได้แก่ เมนูที่เป็น pulldown อยู่ด้านบนและปุ่มกด ที่เก็บคำสั่งในรูปของปุ่มกด

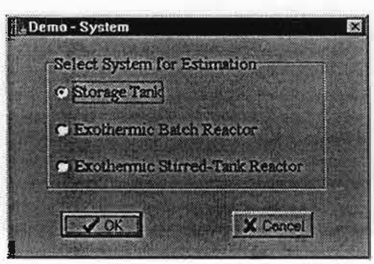


เริ่มต้น

1. ให้เมาส์คลิกที่ปุ่ม Demo หรือเรียกคำสั่ง Demo จากเมนู File

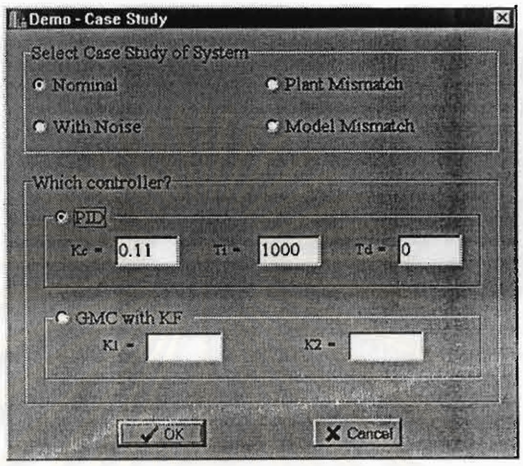


2. เลือกกระบวนการที่ต้องการทดสอบโดยใช้เมาส์เลือก
3. คลิกปุ่ม OK



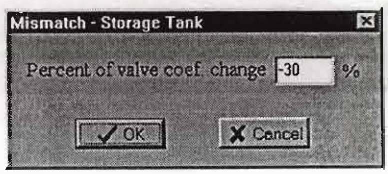
เลือกกรณี

1. เลือกกรณีศึกษาของระบบตัวอย่างโดยใช้เมาส์เลือก
2. คลิกปุ่ม OK



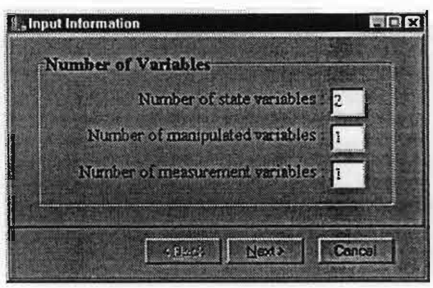
เลือกพารามิเตอร์ผิดพลาด

1. เลือกรายการโดยใช้เมาส์จากในช่องของตัวแปรและช่องของการเปลี่ยนแปลง
2. ใส่ค่าของเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงในช่อง Percent
3. คลิกปุ่ม OK



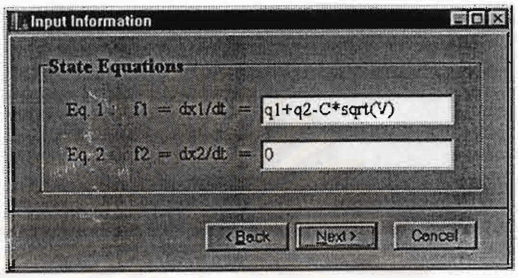
จำนวนตัวแปร

1. กำหนดค่าของจำนวนตัวแปรต่าง ๆ
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสด



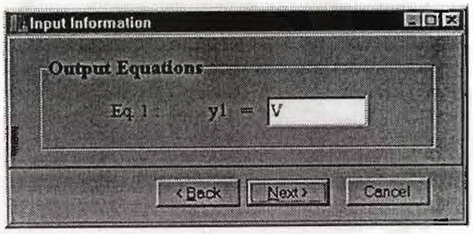
สมการสเตต

1. พิมพ์สมการสเตตแต่ละสมการลงในช่องสมการ
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



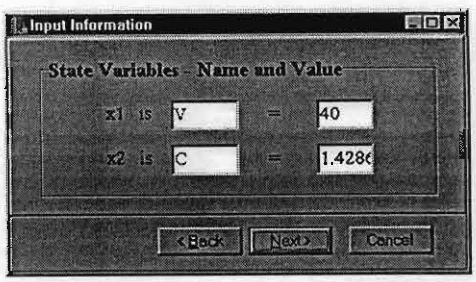
สมการด้านขาออก

1. พิมพ์สมการด้านขาออกแต่ละสมการลงในช่องสมการ
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



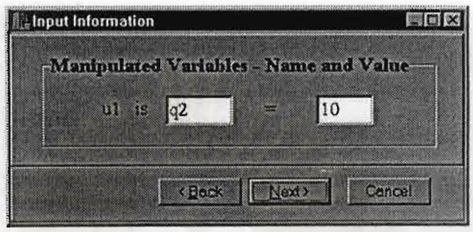
ตัวแปรสเตต

1. พิมพ์ชื่อและค่าของตัวแปรสเตตแต่ละตัวทั้งหมด
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



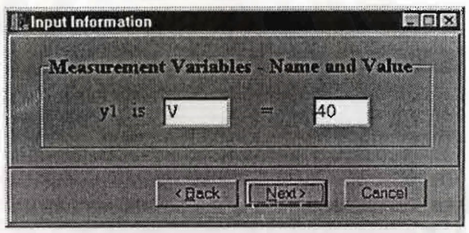
ตัวแปรปรับ

1. พิมพ์ชื่อและค่าของตัวแปรปรับแต่ละตัวทั้งหมด
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



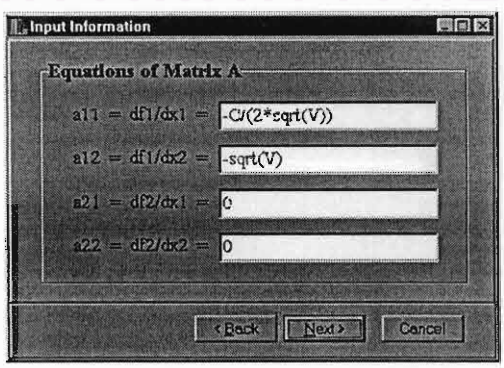
ตัวแปรวัด

1. พิมพ์ชื่อและค่าของตัวแปรวัดแต่ละตัวทั้งหมด
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



เมทริกซ์ยาโคเบียน A

1. พิมพ์สมการเมทริกซ์ยาโคเบียน A
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม

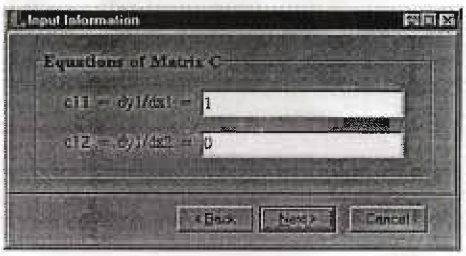


เมทริกซ์ยาโคเบียน B

1. พิมพ์สมการเมทริกซ์ยาโคเบียน B
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม

เมทริกซ์ยาโคเบียน C

1. พิมพ์สมการเมทริกซ์ยาโคเบียน C
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม

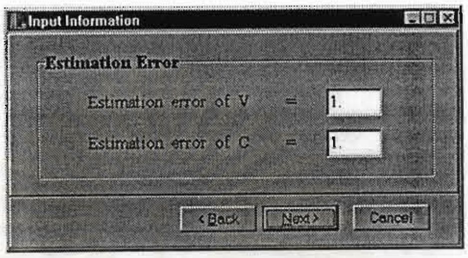


เมทริกซ์ยาโคเบียน D

1. พิมพ์สมการเมทริกซ์ยาโคเบียน D
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม

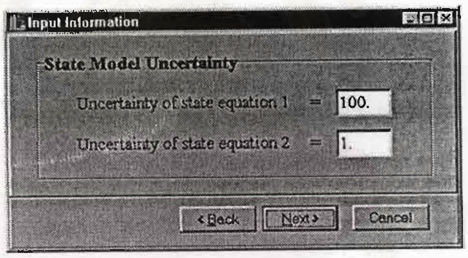
เมทริกซ์ P

1. กำหนดค่าของความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณเริ่มต้นของตัวแปรสเตตแต่ละตัว
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



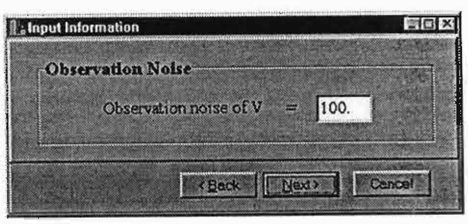
เมทริกซ์ Q

1. กำหนดค่าของความแปรปรวนร่วมของแบบจำลอง
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



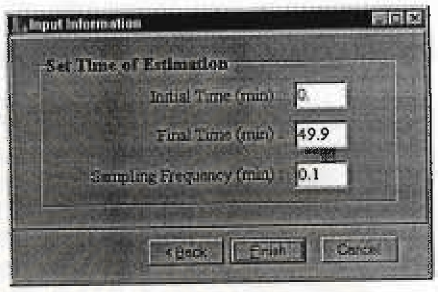
เมทริกซ์ R

1. กำหนดค่าของความคลาดเคลื่อนของสัญญาณรบกวนการวัดแต่ละตัว
2. คลิกปุ่ม Next เพื่อแสดงไดอะล็อกบล็อกอันต่อไปของโปรแกรม



เวลา

1. กำหนดเวลาเริ่มต้น, เวลาสิ้นสุดและช่วงระยะเวลาในการสุ่มค่าการวัด
2. คลิกปุ่ม Finish



การจบโปรแกรม

1. เรียกคำสั่ง Exit จากเมนู File

2. อาจจะจบโปรแกรมได้โดยการกดปุ่ม Quit ซึ่งใช้จบโปรแกรม

ประวัติผู้เขียน

นายสงค์ บำรุงวงศ์ดี เกิดเมื่อวันที่ 15 มิถุนายน พ.ศ. 2519 สำเร็จการศึกษาปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาเคมี คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัย.มหิดล ในปีการศึกษา 2538 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเคมี ภาควิชาวิศวกรรมเคมี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2539